

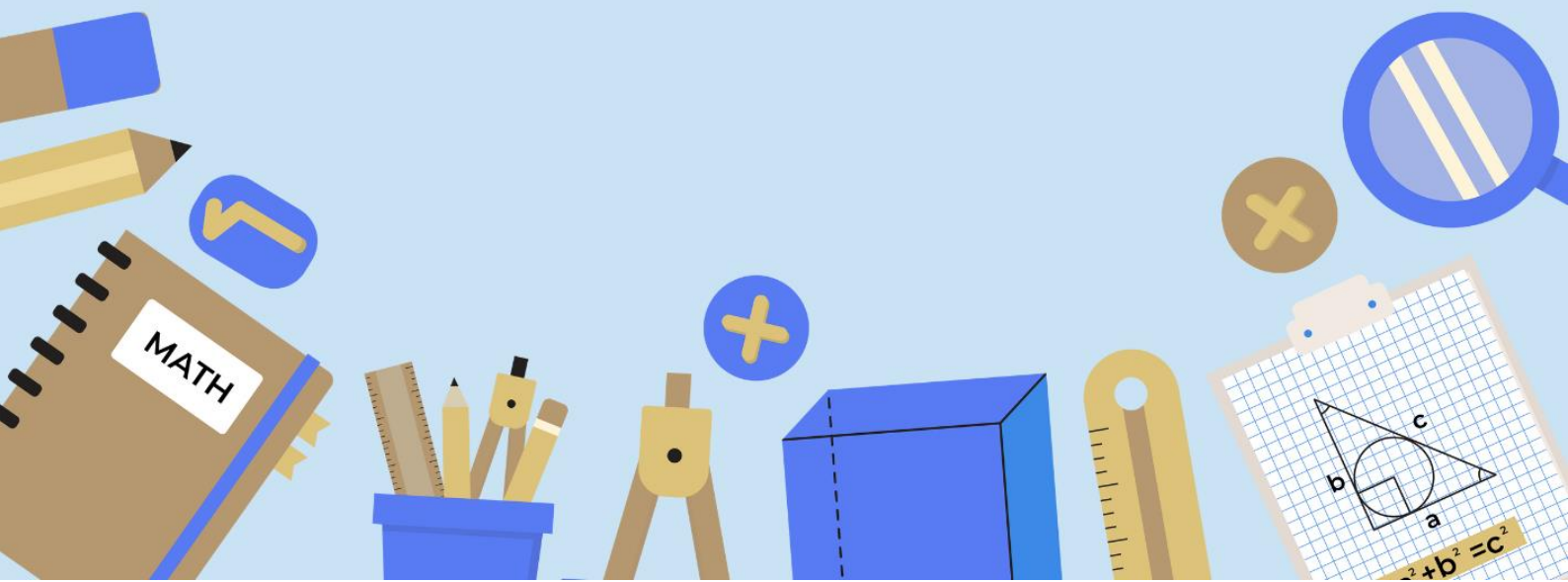
OPAS ONGELMANRATKAISUUN

Anu Laine

Terhi Vessonen

Eija Väisänen

Heidi Hellstrand



Alkuperäisnimi:

Opas ongelmanratkaisuun

Tekijät: Anu Laine, Terhi Vessonen, Eija Väisänen, Heidi Hellstrand

The work is published Open Access under the terms of Creative Commons licence CC BY-NC-ND. This allows third parties to copy and distribute the material in any medium or format in unadapted form only, for noncommercial purposes only and only so long as attribution is given to the creator.

Licence terms: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Opas ongelmanratkaisuun

Kirjoittajat:

Anu Laine

Terhi Vessonen

Eija Väisänen

Heidi Hellstrand

Kuvitus:

Anna Brander

Elena Liikanen



Opas ongelmanratkaisuun

Terveiset kirjoittajilta

Hienoa, että olet löytänyt oppaan ongelmanratkaisuun. Tämä opas syntyi halustamme koota ohjeistusta ja tehtäviä opettajille siitä, miten ongelmanratkaisua voisi käyttää monipuolisesti ja innostavasti oppitunneilla ja miten kaikille oppilaille voisi mahdollistaa ongelmanratkaisutaitojen harjoittelua. Tässä oppaassa käsitellään muun muassa sitä, mitä ongelmanratkaisu on (ja ei ole), miten ohjata oppilaiden ongelmanratkaisuprosessia ja miten arvioida oppilaiden prosessia ja tuotosta.

Tämä opas on suunnattu ensisijaisesti perusopetuksen opettajille, mutta on avoin kaikille ongelmanratkaisusta kiinnostuneille. Sisältö ei vaadi ennakko-osaamista eli kuka tahansa voi hyödyntää tätä opasta omassa opetuksessaan.

Tätä opasta on tarkoitus käyttää siten, että ensimmäisellä käyttökerralla opettaja ainakin silmäilisi koko oppaan läpi. Kun ongelmanratkaisuprosessi ja sen ohjaaminen alkaa olla tutumpaa ja kokemusta erilaisten ongelmatehtävien ohjaamisesta on tullut, riittää, että palauttaa mieleen omasta mielestään olennaisimpien tai haasteellisimpien kohtien vinkit ja ohjeet. Ongelmanratkaisuprosessin ohjaaminen on myös taito, jossa kehittyy jatkuvasti - aivan kuten ongelmaratkaisussakin. Opas sisältää myös runsaasti tehtäviä, jotka toivottavasti selkeyttävät sisältöä ja joita voi suoraan käyttää oppilaiden kanssa.

Tavoitteenamme on osoittaa, että ongelmanratkaisu on parhaimmillaan innostava ja kiehtova prosessi, joka antaa mahdollisuuden iloita, oivaltaa ja onnistua. Haluamme myös tuoda esiin, että ongelmanratkaisu soveltuu ja kuuluu kaikille oppilaille, ja siksi tarvitsemme erilaisia lähestymistapoja. Erilaiset tehtävät, hyvät kysymykset sekä kannustava ilmapiiri ovat olennaisia. Toivomme, että tämä opas tarjoaa sinulle eväitä tällaiseen opetukseen. Hyppää kyytiin!

Sisällysluettelo

1. Miksi ongelmanratkaisua?

- 1.1. Ongelmanratkaisu kehittää arjen taitoja
- 1.2. Oppilaiden ja opettajien kokemuksia ongelmanratkaisusta
- 1.3. Ongelmanratkaisutaidot opetussuunnitelmassa

2. Mitä ongelmanratkaisu on?

- 2.1. Ongelmatehtävän määrittely
- 2.2. Ongelmanratkaisuun liittyviä ennakkokäsityksiä

3. Ongelmanratkaisu prosessina

- 3.1. Ongelmanratkaisuprosessin vaiheet
- 3.2. Esimerkki ongelmanratkaisuprosessista
- 3.3. Kaikki ongelmanratkaisuprosessin vaiheet ovat tärkeitä

4. Ongelmanratkaisu oppilaan näkökulmasta

- 4.1. Oppilas ongelmatehtävän ymmärtäjänä
- 4.2. Oppilas suunnitelman tekijänä
- 4.3. Oppilas suunnitelman toteuttajana
- 4.4. Oppilas ratkaisun tarkastelijana

5. Ongelmanratkaisu opettajan näkökulmasta

- 5.1. Valmisteluvaihe
- 5.2. Johdatteluvaihe
- 5.3. Tutkimisvaihe
- 5.4. Yhteenvetovaihe

6. Ongelmanratkaisun osaamisen arviointi

- 6.1. Prosessin arviointi
- 6.2. Oppilaan ratkaisun ja tuotoksen arviointi
- 6.3. Tähtitaulukoiden arviointikohteita

7. Yhteenveto

Lähteet

Lisämateriaalia

- A. Ongelmatehtäviä sisältäviä kirjoja
- B. Ongelmatehtäviä sisältäviä sivustoja

1. Miksi ongelmanratkaisua?

Ongelmanratkaisu on tärkeä osa tulevaisuuden osaamisen suuntaa niin arkielämässä kuin opetussuunnitelmassakin. Kohtaamamme ongelmatehtävät ovat yleensä muun informaation seassa, joten olennainen tieto on poimittava, joskus itse kysymyksen on vaikeasti määriteltävä. Tämä tarkoittaa, että yhä enemmän tarvitaan tiedon käsittelyyn ja kriittiseen ajatteluun liittyviä taitoja faktojen ulkoa opetteluun ja rutiinitehtävien sijaan.

1.1. Ongelmanratkaisu kehittää arjen taitoja

Ongelmanratkaisu on läsnä jokapäiväisessä elämässä esimerkiksi matkareittiä suunnitellessa tai ruoanlaitossa. Useat arjessa kohtaamamme ongelmat eivät ole rutiinitehtäviä, joissa on esimerkiksi yksi selkeä vastaus, vaan usein ne vaativat erilaisia ongelmanratkaisutaitoja (Verschaffel ym., 2020). Lisäksi arjen ongelmanratkaisu vaatii käytännön näkökulman huomioimista ratkaisun järkevyyden arvioimisessa. Oppilas voi esimerkiksi pohtia, mihin aikaan hänen tulisi aloittaa kotitehtävien tekeminen, jotta ehtisi tehdä ne ennen harrastuksen alkamisajankohtaa. Tällaisessa tilanteessa ei riitä, että oppilas huomioi vain kotitehtävien määrän, vaan hänen tulisi myös ottaa huomioon kotitehtävien vaatimukset sekä omat taitonsa. Lisäksi taustalla televisiossa pyörivä animaatio voi viedä oppilaan keskittymistä ja näin ollen hidastaa kotitehtävien tekemistä.

Kun oppilaan ongelmanratkaisutaitoja tuetaan, ei ainoastaan opeteta ratkaisemaan tietynlaista tehtävää, vaan opetetaan taitoja, joita yksilö voi parhaimmillaan soveltaa moniin eri tilanteisiin (Gravemeijer ym., 2017). Toimivia ongelmanratkaisustrategioita oppiessa oppilas voi esimerkiksi oivaltaa, mitä hänen kannattaa tehdä ensin kohdatessaan ongelmatehtävän, mitä asioita hänen tulisi prosessissa ottaa huomioon ja miten hänen tulisi arvioida tehtävän ratkaisua (Polya, 2014).

1.2. Oppilaiden ja opettajien kokemuksia ongelmanratkaisusta

Monet oppilaat kokevat ongelmanratkaisutehtävät kiinnostaviksi. Innostavat ongelmanratkaisutunnit ja -tuokiot voivat innostaa oppilaita tarttumaan ongelmanratkaisutehtäviin myös oppituntien ulkopuolella. Seuraavassa kuvassa on

oppilaiden esittämiä kommentteja ongelmanratkaisusta. Kommentit on poimittu Ymmärrystä ongelmanratkaisuun -webinaarista (Laine & Wass, 2016).



Opettajatkin ovat havainneet ongelmanratkaisutaitojen harjoittelun hyödyllisyyden. Alla olevassa kuvassa on opettajien kommentteja ongelmanratkaisusta samasta webinaarista.



Nämä oppilaiden ja opettajien kommentit vahvistavat, mitä ongelmanratkaisu parhaimmillaan voi olla.

1.3. Ongelmanratkaisutaidot opetussuunnitelmassa

Vuoden 2014 perusopetuksen opetussuunnitelman mukaan oppilaiden pitäisi kehittyä sekä monipuolisiksi ongelmanratkaisijoiksi (T5, T7) että saatujen tuloksien mielekkyyden ja kattavuuden arvioitsijoiksi (T6). Oppilaiden pitäisi myös kyetä esittämään perustelut ratkaisuilleen (T4) ja osata arvioida omaa tietotaidon käyttöään (Ajattelun taidot, S1, Opetushallitus, 2014).

Opetussuunnitelma painottaa myös laaja-alaisen osaamisen tärkeyttä. Laaja-alaisen osaamisen voisi tiivistää osaamiseksi, joka ylittää tiedon- ja taidonalat ja muovautuu tilanteen tarpeiden mukaiseksi esimerkkinä Ajattelu ja oppimaan oppiminen (L1). Tämä pitää sisällään omaksutun tiedon käytön ongelmanratkaisuun, argumentointiin, päättelyyn ja johtopäätösten tekoon sekä itsenäisesti että vuorovaikutuksessa toisten kanssa. Laaja-alaisen osaamisen painotetaan olevan taito, jota tarvitaan yhä enemmän ympäröivän maailman muutoksista johtuen. Tällaista tavoitetta kohti edetessä tarvitaan hyvin monipuolisia tehtäviä rutiinitehtävien rinnalle.

2. Mitä ongelmanratkaisu on?

Tässä luvussa annetaan esimerkkejä ongelmatehtävistä ja erityisesti ongelma- ja rutiinitehtävän eroista. Luvussa myös kuvataan avoimen ja suljetun ongelmatehtävän eroja ja annetaan niistä esimerkkejä. Lopuksi esitellään erilaisia ongelmanratkaisuun liittyviä ennakkokäsityksiä, jotka voivat haastaa sekä ongelmanratkaisun opettamista että oppimista.

2.1. Ongelmatehtävän määrittely

Tehtävä määritellään *ongelmatehtäväksi*, jos sen ratkaiseminen edellyttää aikaisemman tiedon yhdistämistä uudella tavalla. Ongelmatehtävien vastakohtana pidetään usein *rutiinitehtäviä*. Eli jos oppilas pystyy välittömästi tunnistamaan, miten tehtävä tulisi ratkaista, tehtävä ei ole ongelmatehtävä vaan rutiinitehtävä (Leppäaho, 2018). Jaottelu ei kuitenkaan ole yksiselitteinen, koska tehtävä, joka jollekin on ongelmatehtävä, voi olla toiselle rutiinitehtävä.

ESIMERKKI ONGELMATEHTÄVÄSTÄ:

SUUNNITTELE MAHDOLLISIMMAN MONTA ERILAISTA KOLMIRAITAISTA LIPPUA, JOISSA KÄYTÄT KOLMEA ERI VÄRIÄ. PIIRRÄ VAIHTOEHDOT.



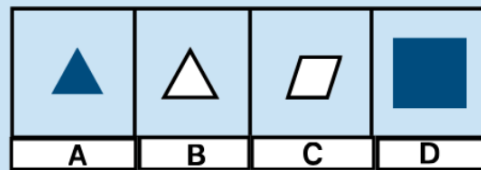
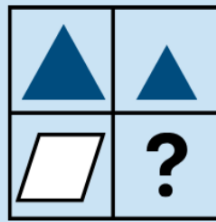
ESIMERKKI RUTIINITEHTÄVÄSTÄ:

SUOMENLIPUN PITUUS ON 150 CM JA LEVEYS 245 CM. KUINKA SUURI ON LIPUN PINTA-ALA?



Ongelmatehtävien sisältö ja esitystavat vaihtelevat paljon. Ne saattavat olla esimerkiksi *kuvallisesti* tai *sanallisesti* esitettyjä. Joskus tehtävissä voidaan käyttää molempia esitystapoja. Aiemmin esitetyt esimerkit ovat sanallisesti esitettyjä, kun taas seuraava on esimerkki kuvallisesta ongelmatehtävästä.

ESIMERKKI KUVALLISESTA ONGELMATEHTÄVÄSTÄ:



Ongelmatehtävät voidaan jaotella myös *avoimiin* ja *suljettuihin* ongelmiin. Avoimet ongelmatehtävät eroavat suljetuista ongelmista siten, että niissä voi olla avoin alkutilanne, menetelmä tai lopputilanne, kun taas suljetuissa ongelmassa on yksi ratkaisu sekä usein myös yksi ratkaisutapa (Leppäaho, 2018).

ESIMERKKI AVOIMESTA ONGELMATEHTÄVÄSTÄ:

LAATIKOLLINEN MUFFINSSEJA MAKSAA 20 EUROA. MITEN ERI TAVOIN VOIT MAKSAA OSTOKSESI TASARAHALLA?



Tehtävä on avoin, koska sen ratkaisemisessa voidaan käyttää erilaisia menetelmiä ja koska sillä on useita oikeita ratkaisuja. Myös aiemmin esitetty ongelmatehtävä kolmiraitaisista lipuista on avoin tehtävä.

ESIMERKKI SULJETUSTA ONGELMATEHTÄVÄSTÄ:

SAMI ON OSTANUT KIRJAHYLLYN RAKENTAMISTA VARTEN NELJÄ LAUTAA, JOISTA JOKAINEN ON 2,5 METRIN PITUIINEN. KUINKA MONTA 1 METRIN PITUISTA LAUTAA HÄN PYSTYY SAHAAMAAN OSTAMISTAAN LAUDOISTA?

Tehtävään on vain yksi oikea ratkaisu, mutta oikeaan ratkaisuun pääseminen vaatii myös ongelmatilanteen realistista pohtimista eikä oikeaa vastausta saada jakamalla 10 metriä metrin pituisiin laudanpätkiin.

Ongelmanratkaisu on usein monivaiheinen prosessi, jonka lopputuloksena voi olla yksi tai useampi oikea ratkaisu tai ei lainkaan oikeaa ratkaisua.

ESIMERKKI ONGELMATEHTÄVÄSTÄ, JOHON EI OLE LAINKAAN OIKEAA RATKAISUA:

PEKKA JUOKSEE 100 METRIÄ 17 SEKUNNISSA. KUINKA KAUAN HÄNELLÄ KESTÄÄ JUOSTA 10 KILOMETRIÄ?

Tehtävää ei voi ratkaista realistisella vastauksella, koska siitä puuttuu informaatiota. Toki voisi ajatella, että vastauksena on, että Pekalla kestää vähintään 28 min ja 20 sek (1700 sekuntia) juosta 10 kilometriä, mutta tätäkään emme voi varmasti sanoa sen tiedon perusteella, mitä tehtävästä löytyy. Tämän huomaaminen vaatii ongelmatilanteen realistista pohtimista, eli ettei nopeus pysy samana sadan metrin juoksussa kuin 10 kilometrin. Alla taas on tehtävä, johon on useita mahdollisia ratkaisuvaihtoehtoja.

ESIMERKKI ONGELMATEHTÄVÄSTÄ, JOHON ON USEITA ERI RATKAISUJA:

SUUNNITTELE HENKILÖAUTOLLA TEHTÄVÄ KESÄLOMARETKI SUOMESSA. NOUDATA MUUTAMIA MATKUSTUKSEEN LIITTYVIÄ EHTOJA.

- AUTON KESKINOPEUS ON 80 KM/H
- LITRA BENSIINIÄ MAKSAA 2 EUROA
- POLTTOAINEEN KULUTUS ON 8 LITRAA/100 KM
- KAHDEN TUNNIN AJON JÄLKEEN ON PIDETTÄVÄ 30 MIN TAUKO
- KESÄLOMARETKI KESTÄÄ 3 PÄIVÄÄ

Olennaista tässä tehtävässä on, että oppilas pystyy esittämään perustelut ratkaisuunsa ja on noudattanut tehtävänannossa esille tulleita ehtoja. Tämä on myös hyvä esimerkki siitä, miten ongelmanratkaisua tarvitaan monessa arjen tilanteessa.

Yhteenvetona voidaan todeta, että ongelmanratkaisutehtäviä on monenlaisia. Olennaista on siis tarjota oppilaille erityyppisiä ongelmatehtäviä, jotka antavat mahdollisuuden kehittää monipuolisia tapoja ymmärtää ja ratkaista ongelmatehtäviä.

2.2. Ongelmanratkaisuun liittyviä ennakkokäsityksiä

Ongelmanratkaisuun, kuten matematiikkaan laajemminkin, liittyy yleisiä ennakkokäsityksiä. Ennakkokäsitykset voivat kohdistua sekä ongelmanratkaisun opettamiseen että oppimiseen. Yhteistä ennakkokäsityksille on se, että ne voivat joissakin tilanteissa olla totta tai toimia, mutta eivät kaikissa. Ennakkokäsitykset voivat vaikuttaa esimerkiksi siihen, mitä ratkaisutapoja opetuksessa painotetaan tai minkälaisiin ratkaisutapoihin oppilas turvautuu. Koska virheelliset ennakkokäsitykset voivat olla haitaksi ongelmanratkaisussa, on tärkeää, että opettaja on tietoinen niistä ja voi välttää virheellisten ennakkokäsitysten kehittymisen. Tällaisia ovat esimerkiksi:

Ennakkokäsitys A:
Vain ja ainoastaan sanalliset tehtävät ovat ongelmatehtäviä.

Ongelmatehtävät ovat usein sanallisia tehtäviä, jotka esitetään kirjallisesti tai suullisesti. On kuitenkin hyvä muistaa, että suuri osa sanallisista tehtävistä on sellaisia, että ne voidaan ratkaista rutiininomaisesti käyttämällä tehtävästä löytyviä tietoja suoraviivaisesti yhtä ratkaisutapaa käyttäen. Näin ollen nämä tehtävät eivät täytä ongelmatehtävän määritelmää. On myös kuvallisessa muodossa esitettyjä ongelmatehtäviä (ks. luku 2.1.).

Ennakkokäsitys B:
Matemaattisilla ongelmilla on aina tasan yksi oikea ratkaisu.

Kuten aikaisemmin on mainittu, ongelmatehtävissä voi olla myös useampi tai ääretön määrä ratkaisuja tai jopa niin, että mahdollista ratkaisua ei voi löytää annetuilla tiedoilla (Verschaffel ym., 2000; 2020). Jos oppilaat ovat tottuneet siihen, että matematiikan tehtävissä on vain yksi ratkaisu – kuten useimmissa oppikirjan tehtävissä – tämä voi aiheuttaa hämmennystä oppilaalle. Koska elämässä vastaan tuleviin matemaattisiin ongelmiin on usein olemassa useampi kuin yksi ratkaisu, on tärkeää opettaa oppilaille myös tällaisten ongelmien ratkaisemista.

Ennakkokäsitys C:

Jokaiseen ongelmaan on vain yksi oikea ratkaisutapa.

Tällainen ennakkokäsitys, että ratkaisutapoja olisi vain yksi, voi estää oppilaita kehittämästä ja käyttämästä erilaisia lähestymistapoja. Joustavien ratkaisutapojen käyttäminen on usein merkki siitä, että oppilaalla on vahva matemaattinen osaaminen. Näin ollen on hyvä kannustaa oppilaita erilaisten ratkaisutapojen harjoitteluun ja käyttämiseen.

Ennakkokäsitys D:

Oppilas, joka on ymmärtänyt opetetut aiheet, pystyy ratkaisemaan jokaisen annetun ongelman alle viidessä minuutissa.

Ongelmatehtävien ratkaiseminen voi viedä – ja saa viedä – aikaa. On toki ongelmatehtäviä, joiden ratkaiseminen vie vain pari minuuttia, mutta on myös sellaisia tehtäviä, joihin ei heti löydetä ratkaisua ja tehtävään on syytä palata yhä uudelleen ja uudelleen. Ennakkokäsitys, jonka mukaan ”hyvä ongelmanratkaisija” ratkaisisi ongelman kuin ongelman nopeasti, voi aiheuttaa sen, että oppilas turhautuu tai epäilee osaamistaan, jos ei nopeasti löydä ratkaisua. Siksi on hyvä tarjota oppilaille erilaisia ongelmatehtäviä - sanallisia ja ei-sanallisia, avoimia ja suljettuja, nopeasti ratkottavia ja enemmän aikaa vaativia. Oppilaiden on myös hyvä ymmärtää, että saman tehtävän ratkaiseminen voi viedä yhdeltä oppilaalta enemmän aikaa kuin toiselta.

Ennakkokäsitys E:

Opettajan pitää ensin opettaa teoriaa ja perusasioita, ja vasta sitten sovelletaan opittua ongelman avulla.

Teoriat ja perusasiat luovat pohjan myöhemmälle osaamiselle, mutta tämä ei tarkoita, ettei ongelmanratkaisua voisi ja kannattaisi harjoitella, vaikka oppilas ei vielä hallitsisi kaikkia perusasioita. Tutkimuksissa on osoitettu, että jo pienet lapset osaavat ratkaista jopa

vaativia ongelmanratkaisutehtäviä ilman, että heille on opetettu kyseistä matemaattista sisältöä tai ratkaisutapaa (Fennema et al., 1993; Vessonen et al., 2023). Lisäksi ongelmatehtävät voivat innostaa oppijoita ja siten muutenkin motivoida matematiikan opiskeluun.

Ennakkokäsitys F:

Sanallisissa tehtävissä oppilaita tulee ohjata etsimään avainsanat ja toteuttamaan sanoja vastaavat matemaattiset operaatiot.

Vaikka joissain ongelmatehtävissä avainsanat saattavat olla linjassa tarvittavien matemaattisten operaatioiden kanssa (esim. “yhteensä” ja yhteenlasku), näin ei läheskään aina ole. Esimerkiksi seuraava tehtävä ohjaisi käyttämään yhteen- tai kertolaskua, vaikka jakolasku olisi todennäköisesti tässä tehtävässä tehokkain strategia: “Koripallojoukkue tekee *yhteensä* 747 pistettä kauden aikana. Kokonaispistemäärä on *yhdeksänkertainen* kauden ensimmäisessä pelissä tehtyihin pisteisiin nähden. Kuinka monta pistettä joukkue teki ensimmäisessä pelissään?”. Onkin hyvä alusta alkaen opettaa oppilaille sellaisia ratkaisustrategioita, joita voi hyödyntää erilaisissa ongelmatehtävissä.

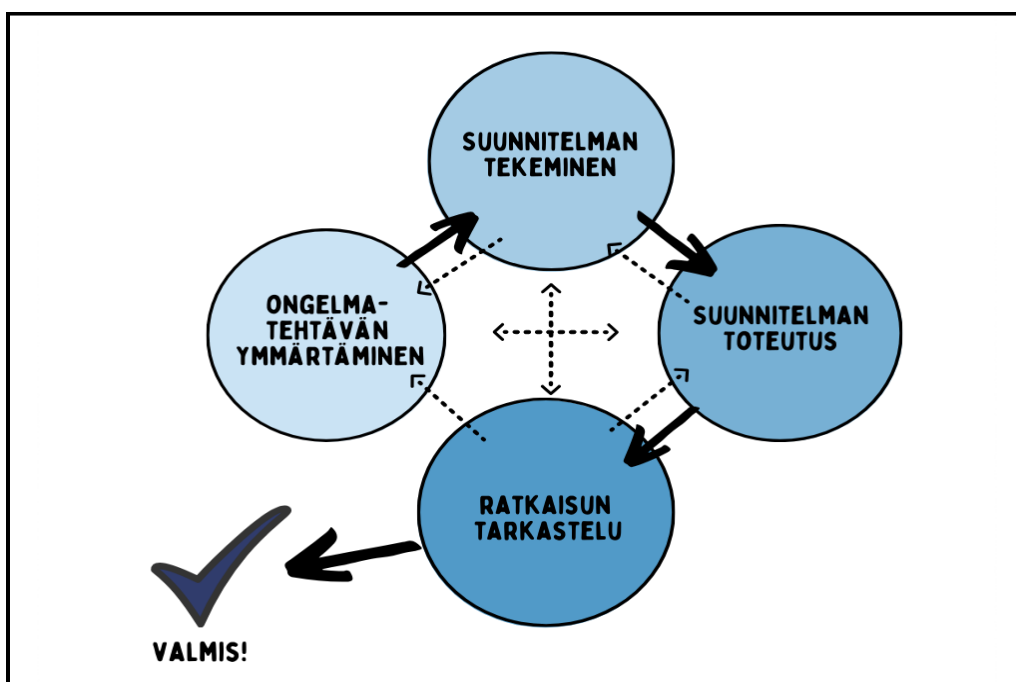
3. Ongelmanratkaisu prosessina

Tässä luvussa kuvataan ongelmanratkaisua syklisenä prosessina, jossa oikeaan ratkaisuun ei aina päädytä ensimmäisellä yrityksellä. Lisäksi kuvataan ongelmanratkaisuprosessin mahdollisia haasteita esimerkkien kautta.

3.1. Ongelmanratkaisuprosessin vaiheet

Ongelmanratkaisuprosessi koostuu useasta eri vaiheesta (Polya, 2014; ks. Salminen-Saari ym., 2021). Monien tutkijoiden mukaan ongelmanratkaisuprosessiin kuuluvat seuraavat neljä vaihetta:

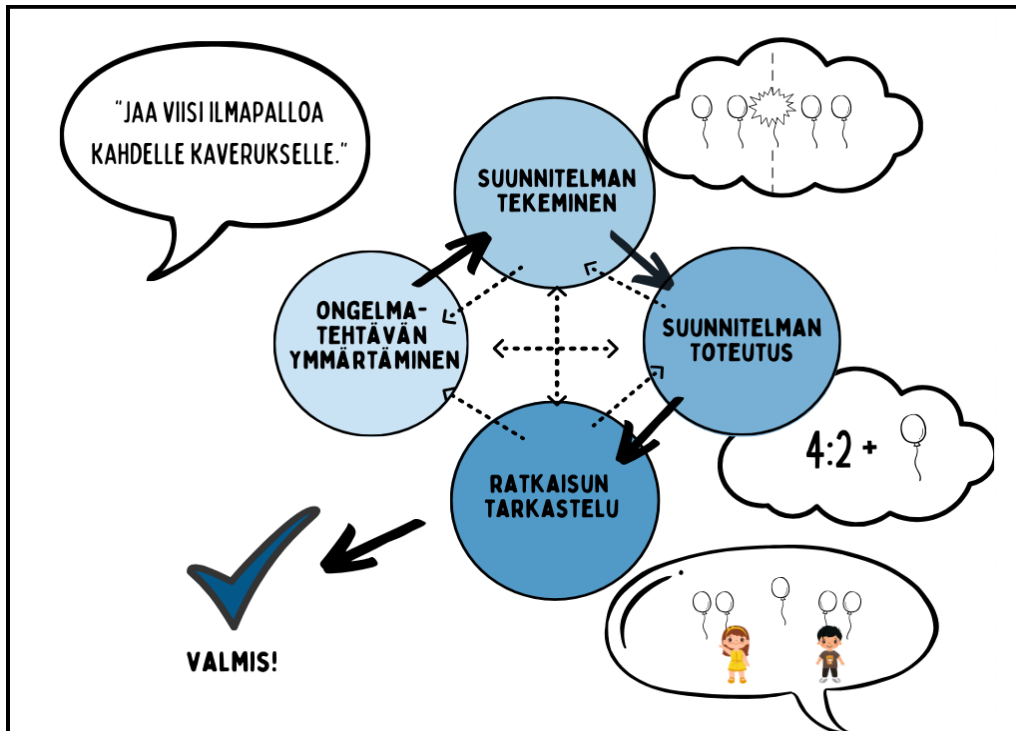
- 1) Ongelmatehtävän ymmärtäminen: oppilas pyrkii ymmärtämään tehtävänannon sekä siihen tarvittavat tiedot (esim. esitetyt luvut). Näin ollen oppilaalle selviää esimerkiksi, voiko tehtävän ratkaista annetuilla tiedoilla.
- 2) Suunnitelman tekeminen: oppilas suunnittelee tehtävän ratkaisua esimerkiksi yhdistämällä ratkaistavan ongelmatehtävän aiempiin ongelmatehtävien ratkaisuihin.
- 3) Suunnitelman toteutus: oppilas toteuttaa tekemänsä suunnitelman eli esimerkiksi toteuttaa suunnittelemansa laskutoimitukset, piirroksiset ja taulukot.
- 4) Ratkaisun tarkastelu: oppilas palaa tehtävänantoon ja tarkastelee ratkaisuaan suhteessa siihen sekä tarkistaa ratkaisun esimerkiksi toisella tavalla.



Kuten yllä olevasta kuvasta voidaan huomata, ongelmanratkaisu on syklinen prosessi eli ratkaisuun ei välttämättä päädytä suoraviivaisesti tai heti ensimmäisellä yrityksellä. Sen sijaan vaiheissa palataan taaksepäin ja yritetään uutta ratkaisutapaa. Takaisinpäin palaaminen ei tarkoita, että oppilas olisi tehnyt asiat jotenkin virheellisesti, vaan päinvastoin voi tarkoittaa, että oppilas tekee huolellista työtä ja etenee systemaattisesti. Jos ratkaisu löytyisi heti, kyseessä olisikin usein rutiinitehtävä eikä varsinainen ongelmatehtävä. Tässä korostuu vahvasti myös se, että tehtävä, joka jollekin oppilaalle on ongelmatehtävä, voi toiselle olla rutiinitehtävä.

3.2. Esimerkki ongelmanratkaisuprosessista

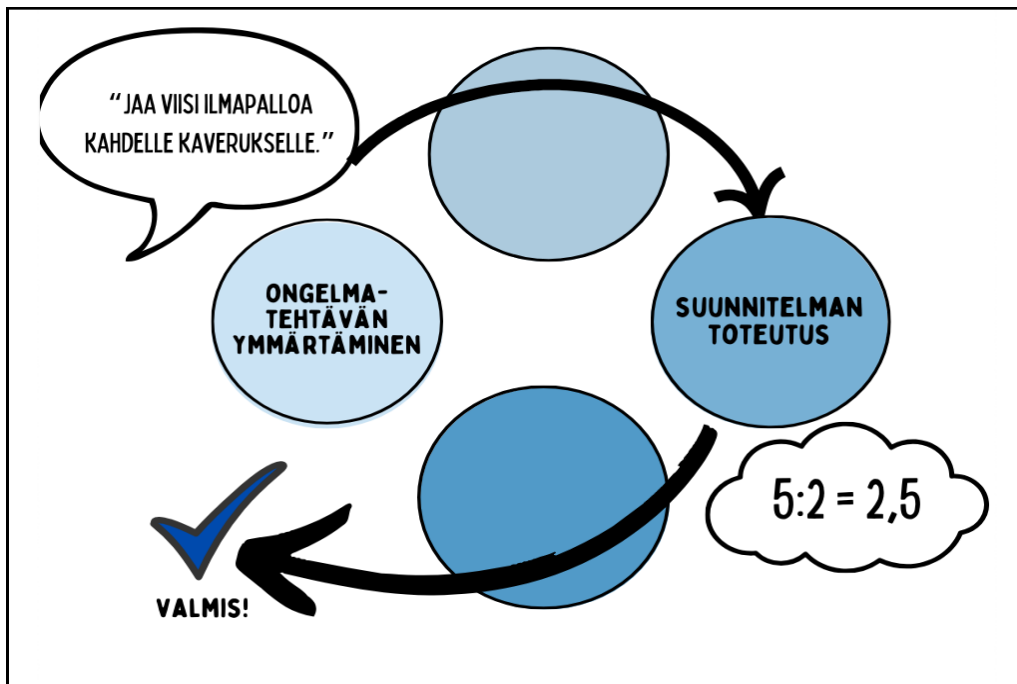
Ongelmanratkaisuprosessi lähtee *ongelmatehtävän ymmärtämisestä*. Tarkastellaan esimerkkinä ongelmatehtävää: "Jaa viisi ilmapalloa kahdelle kaverukselle." Tässä ongelmatehtävässä oppilas voisi helposti ajatella, että viisi jaetaan kahdella ja saisi ratkaisuksi 2,5 ilmapalloa. Oppilas, joka etenee aluksi tällä tavalla, mutta havahtuu *suunnitelman toteutusvaiheessa*, ettei ole mahdollista puolittaa ilmapalloja, palaa tällöin *suunnittelemaan uutta ratkaisutapaa*. Oppilas toteaa, että tehtävässä tarvitaan jotain muutakin kuin peruslaskutoimituksen suorittamista. Hän voi havahtua siihen, että ilmapalloa ei voi puolittaa vasta *ratkaisun tarkasteluvaiheessa* ja palata tehtävän alkuun. Alla olevassa kuvassa havainnollistetaan kyseisen tehtävän ongelmanratkaisuprosessin vaiheiden etenemistä.



Lisäksi voidaan todeta, että ongelmatehtävässä ei pyydetä jakamaan ilmapalloja tasan. Siltä osin tämä ongelma edustaa avointa ongelmatehtävää, ja oikea ratkaisu voisi hyvin olla esimerkiksi se, että toinen kaveruksista saa kaksi palloa ja toinen kolme. Tämä saattaisi jopa olla realistisempi ratkaisu kuin se, että yksi pallo päästetään ilmaan. Tällainen ratkaisu voisi myös herättää antoisaa keskustelua oppilaiden kesken.

3.3. Kaikki ongelmanratkaisuprosessin vaiheet ovat tärkeitä

Edellisessä luvussa (luku 3.2) esittelimme ongelmanratkaisuprosessin neljä vaihetta. Näiden vaiheiden välillä voi palata ja edetä joustavasti. Tavallinen kompastuskivi ongelmanratkaisuprosessissa kuitenkin on, että oppilas ei huomioi kaikkea olennaista tietoa tai kaikkia vaiheita. Esimerkiksi oppilas ei tarkastele, onko ymmärtänyt tehtävän oikein tai ei pohdi tehtävää ja sen ratkaisua realistisesta näkökulmasta. Ilmapallo-tehtävässä tämä voisi näkyä siinä, että oppilas tarttuu sanaan "jaa" ja jakaa mekaanisesti viiden kahdella miettimättä, onko tulos järkevä tai edes mahdollinen, kuten alla olevassa kuvassa on esitelty. Tällaisessa esimerkissä oppilaalla on jäänyt ymmärrys- ja tarkasteluvaiheet kokonaan välistä tai hän ei ole huomioinut kaikkia olennaisia tekijöitä, jotka vaikuttavat tämän tehtävän ymmärtämiseen.

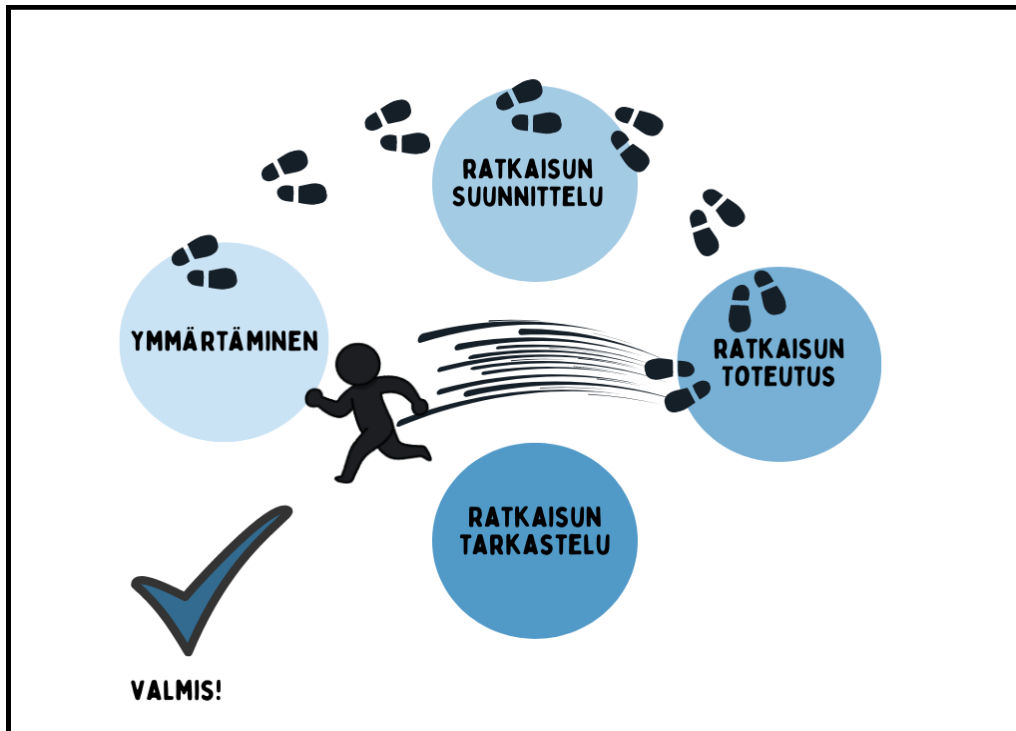


4. Ongelmanratkaisu oppilaan näkökulmasta

Tässä luvussa kuvataan niitä kognitiivisia ja affektiivisia tekijöitä, jotka ovat tarpeen ongelmanratkaisuprosessin onnistumisessa. Luvussa kuvataan ratkaisuprosessin neljä vaihetta sekä kussakin niissä korostuvat taidot (esim. matemaattiset, kielelliset tai visuospatiaaliset taidot).

Jokaisen ongelmanratkaisuprosessin vaiheen kannalta on tärkeää, että oppilas on tarpeeksi *motivoitunut* ja *luottaa taitoihinsa riittävästi* ratkaistakseen ongelman. Jo tehtävän ratkaisemisen aloittaminen voi olla haastavaa oppilaalle, joka ajattelee, ettei tule onnistumaan tehtävässä tai ettei tule tarvitsemaan ongelmanratkaisutaitoja omassa tulevaisuudessaan (Eccles & Wigfield, 2023). Vastaavasti jotkut oppilaat saattavat kokea matemaattiset tehtävät ahdistaviksi, mikä voi esimerkiksi vaikeuttaa muistin toimintaa tehtävää ratkaistaessa (Zhang ym., 2019).

Lisäksi on tärkeää, että oppilas pystyy seuraamaan ja *ohjaamaan omaa toimintaansa* sekä *suuntaamaan keskittymistään* (Barnes & Raghobar, 2014). Tämä tarkoittaa, että oppilas pystyy ohjaamaan itseään ensin lukemaan tehtävän, sitten suunnittelemaan ja niin edelleen. Vastaavasti oppilaan on pystyttävä keskittymään kuhunkin vaiheeseen tarpeeksi, jotta voi ratkaista tehtävän. Monesti voi olla, että oppilas jättää esimerkiksi saadun ratkaisun tarkistamisen välistä, kuten seuraava kuva kuvastaa. Tällöin hän ei välttämättä päädy tarkoituksenmukaiseen ratkaisuun, jossa olisi ottanut kaikki tehtävän piirteet huomioon (Verschaffel ym., 2000).



Toisaalta erilaisten ongelmanratkaisutehtävien tarjoaminen oppilaille ja niiden harjoittelu voi myös tukea ja kehittää näitä taitoja: motivaatiota, itseluottamusta, oman toiminnan ohjausta ja keskittymistä. Ongelmanratkaisussa onnistuminen ja siitä nauttiminen ei edellytä “täydellisiä taitoja”.

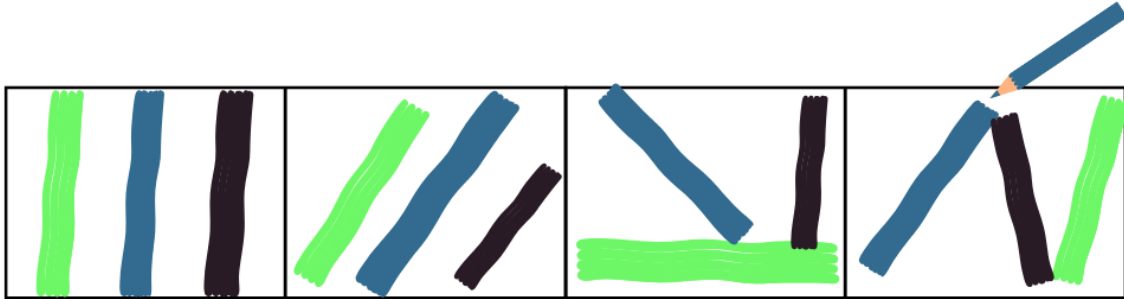
Seuraavaksi ongelmanratkaisun vaiheet on yhdistetty taitoihin, jotka ovat erityisen tärkeitä kussakin vaiheessa.

4.1. Oppilas ongelmatehtävän ymmärtäjänä

Ensimmäisessä ongelmanratkaisuprosessin vaiheessa oppilaan on ymmärrettävä esitetty ongelma. Oppilaan täytyy ymmärtää, mitä tehtävässä kysytään, mitä tietoja ongelmassa on annettuna ja millainen on tilanne, jossa ongelma on esitetty (Polya, 2014). Jos oppilas ei ymmärrä tehtävää, hän saattaa hyppiä ongelmanratkaisuprosessin vaiheiden yli (Verschaffel ym., 2000).

Ongelmatehtävät esitetään usein sanallisessa muodossa (ks. luku 2.1.). Siksi erityisesti oppilaan *kielelliset taidot* (esim. kuullun ymmärtäminen, lukusujuvuus, sanavarasto ja luetun ymmärtäminen) ovat tärkeässä roolissa ymmärtämisen vaiheessa (Boonen ym.,

2016). Voimme varmasti kuvitella, että oppilas, joka ei ymmärrä, mitä “kolmiraitainen lippu” tarkoittaa, on hankaluuksissa, jos häntä pyydetään ratkaisemaan seuraava ongelma: “Suunnittele mahdollisimman monta erilaista kolmiraitaista lippua, joissa käytät kolmea eri väriä. Piirrä vaihtoehdot.” Alla on esimerkki siitä, miten oppilas on ymmärtänyt tämän tehtävänannon niin, että ei ole huomioinut valkoista väriä värinä raitojen määrässä.



Kieli voi myös toimia ajattelun välineenä ongelmanratkaisuprosessin eri vaiheissa. Matematiikassa kieli on tiivistä, toisin kuin kertomakirjallisuudessa. Näin ollen matemaattinen sisältö ja asioiden väliset suhteet voivat olla piilotettuja, epäsuoria tai jopa peitettyjä. Oppilaan on poimittava tietoja ja löydettävä ratkaisun kannalta olennaisin. Matematiikan opetuksessa on otettava huomioon myös oppilaan kyky ymmärtää lukemaansa tekstiä. Jos taas tehtävä on esitetty kuvallisessa muodossa, vastaavasti oppilaan visuaalisen ja avaruudellisen hahmottamisen taidot auttavat hahmottamaan esitettyjä kuvia (Hegarty ym., 1995).

4.2. Oppilas suunnitelman tekijänä

Toisessa ongelmanratkaisuprosessin vaiheessa oppilaan on suunniteltava, miten hän aikoo löytää ratkaisun kyseiseen ongelmaan. Tällöin oppilaan tulee yhdistellä jo olemassa olevia tietoja ja taitoja ratkaistakseen ongelmatehtävän. Oppilas saattaa visualisoida mielessään kyseisen ongelmatilanteen, jonka kautta hän pystyy suunnittelemaan, millaisia matemaattisia operaatioita sen ratkaisemiseksi tarvitaan (Hegarty ym., 1995). Oppilas voi myös pohtia, onko hän aiemmin ratkaissut samantyyllisen tehtävän, joka voisi auttaa häntä ratkaisemaan tämän ongelmatehtävän (Polya, 2014).

Suunnitelman tekemisessä korostuu esimerkiksi *visuospatiaalisten taitojen* sekä *muistin* merkitys (Hegarty & Kozhevnikov, 1999; Krawec, 2014). Tehtävän visualisointi mielessä tai esimerkiksi piirtämällä voivat olla hyödyllisiä keinoja hahmottaa ongelmatehtävää

(Boonen ym., 2016). Todennäköisesti lukiessasi tehtävän: “Sami on ostanut kirjahyllyn rakentamista varten neljä lautaa, joista jokainen on 2,5 metrin pituinen. Kuinka monta 1 metrin pitkää laudanpätkää hän pystyy saamaan ostamistaan laudoista?”, aloit kuvittelemaan mielessäsi tilannetta, jossa henkilö sahaa laudoista lyhyempiä pätkiä. Lyhytkestoisen muistin avulla oppilas taas pitää mielessään tehtävässä esitettyjä lukuja ja työmuistin avulla hakee pitkäkestoisesta muistista tehtäviä, joita on saattanut aiemmin ratkaista (Bull & Lee, 2014).

Ratkaisun suunnittelussa myös *matemaattisilla taidoilla* on merkitystä. Jos oppilaalla on hankaluuksia tunnistaa esimerkiksi lukumäärien suuruuseroja, hän saattaa suunnitella ratkaisevansa tehtävän turhan haastavalla strategilla. Esimerkiksi oppilas saattaa lisätä pienempään lukumäärään suurempaa, vaikka suuremmasta lukumäärästä aloittaminen voisi olla helpompi strategia.

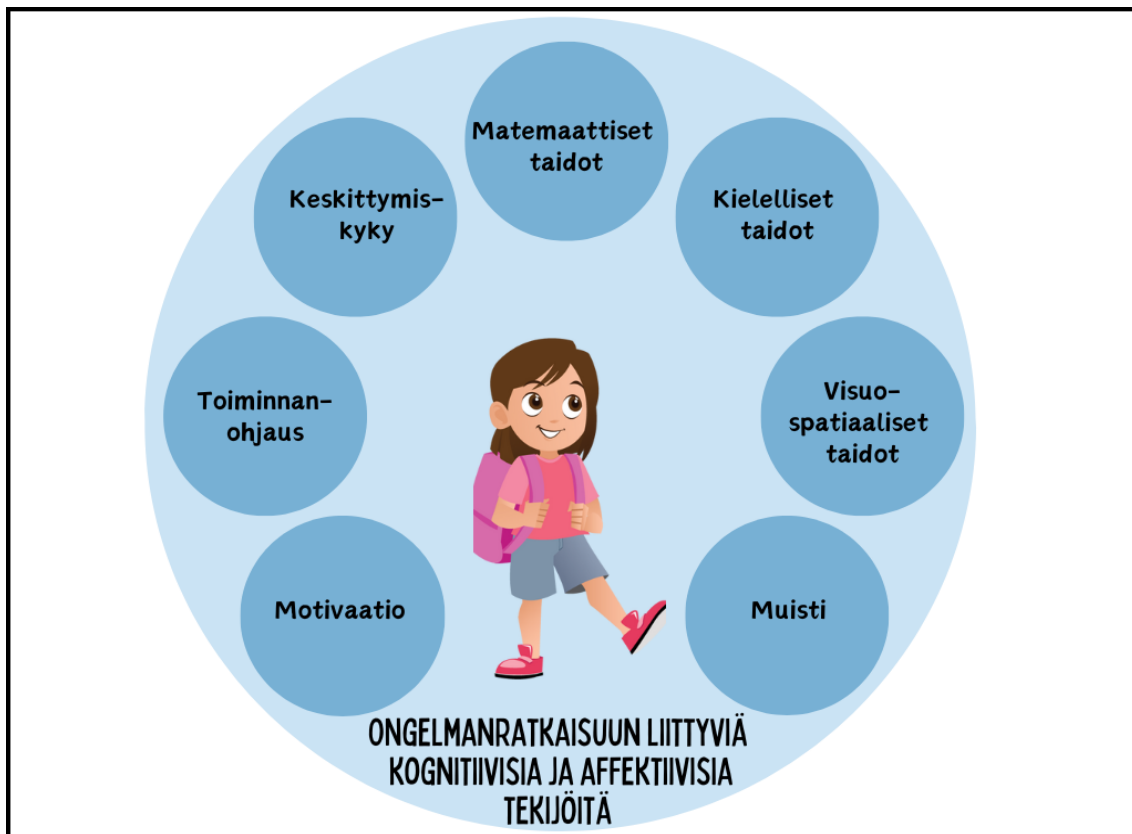
4.3. Oppilas suunnitelman toteuttajana

Suunnitelman toteutusvaiheessa oppilas suorittaa tarvittavat matemaattiset operaatiot. On tärkeää, että oppilaalla on riittävät tehtävän ratkaisemiseen tarvittavat *matemaattiset taidot* toteuttaakseen nämä operaatiot (vaikka jotakin asiaa ei suoranaisesti olisi vielä opetettu). Monissa ongelmatehtävissä on laskutoimituksia, jolloin esimerkiksi aritmeettiset perustaidot ovat avainasemassa (Lin, 2021). Oppilas tarvitsee myös esimerkiksi työmuistia matemaattisten operaatioiden suorittamiseen. Tällöin oppilas hakee pitkäkestoisesta muistista jo valmiiksi hänelle tuttujen matemaattisten operaatioiden vastauksia tai suorittaa uusia operaatioita (Coolen & Castronovo, 2023).

4.4. Oppilas ratkaisun tarkastelijana

Viimeisessä ongelmanratkaisuprosessin vaiheessa oppilaan tulee tarkastella lopputulosta. Tällöin oppilas peilaa saatua lopputulosta alkuperäiseen ymmärrykseensä ongelmatehtävästä. Oppilaan on tarpeellista pohtia, onko lopputulos uskottava ja voiko sen tarkistaa jotenkin (Polya, 2014). Aiempien vaiheiden kannalta tärkeät taidot, kuten kielellinen ja matemaattinen osaaminen, ovat myös tarkistamisen kannalta oleellisia. Lisäksi oppilaan tulisi pystyä ohjaamaan omaa toimintaansa niin, että malttaa tarkistaa tehtävän ratkaisun ennen uuden tehtävän aloittamista. Alla olevassa kuvassa on tiivistetty

keskeiset ongelmanratkaisuprosessin eri vaiheisiin liittyvät kognitiiviset ja affektiiviset tekijät.



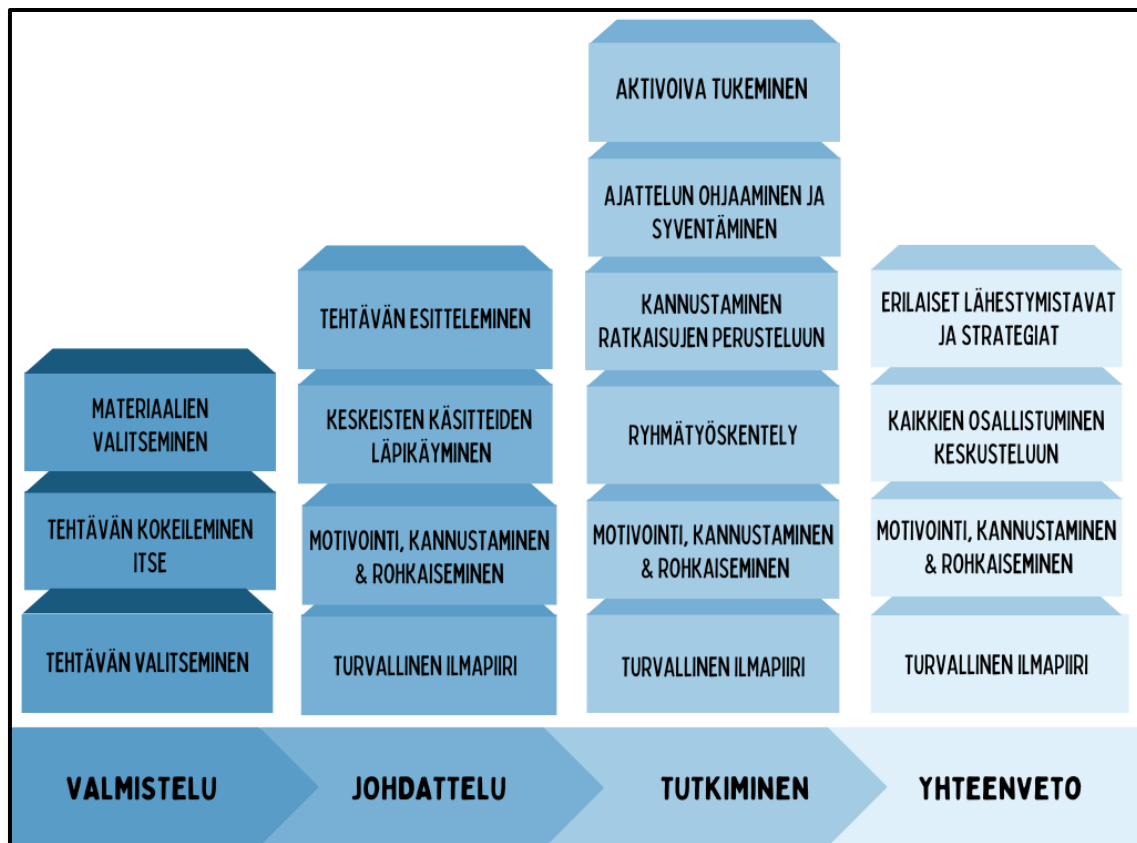
5. Ongelmanratkaisu opettajan näkökulmasta

Tässä luvussa kuvataan opettajan roolia ratkaisuprosessin eri vaiheissa. Opettajan rooliin kuuluu sekä kognitiivisen että affektiivisen tuen varmistaminen. Suuri merkitys on sillä, että opettaja on ennalta valmistautunut valitun ongelmatehtävän ohjaamiseen. Tämä tarkoittaa sekä valittuun ongelmaan perehtymistä että prosessin (esim. työskentelytavat) ja yhteenvetovaiheen suunnittelua ennalta. Toisaalta opettaja myös tarvittaessa muokkaa omaa suunnitelmaansa opetuksen aikana.

Opettajalla on keskeinen rooli oppilaiden ongelmanratkaisutaitojen tukemisessa ja siinä, että hän mahdollistaa kaikille oppilaille kehittäviä oppimistilanteita. Lisäksi opettajan rooli on kaksijakoinen: opettajan tehtävänä on huolehtia oppilaan sekä kognitiivisesta että affektiivisesta tukemisesta. Kognitiivisella tuella tarkoitetaan oppimiseen liittyvää tukemista. Affektiivisella tuella tarkoitetaan, että opettaja huolehtii siitä, että luokan ilmapiiri tukee oppimista (Laine ym, 2019).

Ongelmanratkaisutunnin tai -tuokion pitämisen voi jakaa neljään eri vaiheeseen: valmisteluvaihe, johdatteluvaihe, tutkimisvaihe sekä yhteenvetovaihe.

Ongelmanratkaisutunnin tai -tuokion jokaisessa vaiheessa opettajalla on keskeinen rooli (Stein ym, 2008). Alla olevassa kuvassa kuvataan opettajan roolia tarjota sekä kognitiivista että affektiivista tukea ongelmanratkaisutunnin jokaisessa vaiheessa.



5.1. Valmisteluvaihe

Ennen tuntia keskeisessä roolissa ovat *tehtävän ja materiaalien valitseminen* sekä *tehtävän kokeileminen* (Laine ym, 2018). On tärkeä valita erilaisia tehtäviä, jotta oppilaat saavat monipuolisia kokemuksia ongelmanratkaisusta. On mahdollista valita tehtäviä opiskeltavasta aihepiiristä niin, että ne syventävät opiskeltavaa aihetta. On myös mahdollista valita ongelmatehtävä, jonka avulla pohjustetaan opiskeltavaa asiaa etukäteen ja opitaan ongelmalähtöisen lähestymistavan avulla. Sopivia ongelmatehtäviä voi löytää esimerkiksi tämän oppaan lisämateriaaleista tai oppikirjoista. Tavallisia oppikirjatehtäviä on myös mahdollista muokata ongelmatehtävän muotoon esimerkiksi pyytämällä keksimään mahdollisimman monta erilaista tapaa ratkaista tehtävä.

Tehtävän ratkaisemisessa käytettävien materiaalien valinta voi vaikuttaa keskeisesti tehtävän onnistumiseen. Esimerkiksi tehtävässä "Pekan koulumatka on 6 kilometriä ja Maijan 11 kilometriä. Kuinka kaukana toisistansa Pekka ja Maija asuvat?", paperista leikattujen pituusjanojen käyttäminen voi auttaa oppilasta tehtävän ratkaisemisessa. Toisaalta, materiaalin käyttö voi myös johdattaa oppilasta liikaa tai rajoittaa ratkaisutavan

löytämisessä ja muuttaa ongelmatehtävän turhaan rutiinitehtäväksi. Ei siis kannata heti antaa vihjettä siitä, että pituusjanoja voisi hyödyntää koulumatkojen pituuden vertailussa eikä kertoa suoraan, miten niitä hyödynnetään. On tärkeä jättää oppilaalle oivaltamisen ilo. Jo tässä vaiheessa kannattaa myös miettiä mahdollisia eriyttämistarpeita ja -keinoja. Seuraava kuva on esimerkki ongelmatehtävän valmistelusta.

Pekan koulumatka on 6 kilometriä ja Maijan 11 kilometriä. Kuinka kaukana toisistaan Pekka ja Maija asuvat?

Tarvikkeet:

- Paperia (mieluiten ruutupaperia)
- Sakset

1 kilometri

6

11

M

P

Maksimietäisyys: $6\text{km} + 11\text{km} = 17\text{ km}$

Hmmm..

Ahaa!

Minimietäisyys 5 km

Kokeilemalla tehtäviä itse, opettaja saa tietoonsa mahdollisia ratkaisutapoja ja ymmärtää niiden olennaiset vaiheet. Omakohtainen kokeilu helpottaa oppilaiden ajattelun ymmärtämistä tehtävän ongelmakohdissa ja sitä kautta auttaa opettajaa hyvien kysymysten asettamisessa niin, että oppilaat pääsevät eteenpäin tehtävissä. Tehtävää kokeillessa on hyvä pohtia ongelmanratkaisun eri vaiheita: sekä oikeita että virheellisiä ratkaisutapoja. Valmisteluvaiheessa on myös hyvä miettiä mahdollisia tehtävään liittyviä tekijöitä, jotka voivat auttaa tai vaikeuttaa ongelmanratkaisua.

Valmisteluvaiheessa kognitiivisen tuen suunnittelu (esim. kysymykset, ohjeet ja materiaalit) on usein keskiössä. Samalla on myös hyvä miettiä eri tapoja toteuttaa affektiivista tukea eli pohtia, millä tavalla ja millaisilla ohjeilla voi motivoida ja kannustaa oppilaita ongelmanratkaisuprosessin eri vaiheissa. Opettaja voi esimerkiksi kehua löydetyistä ratkaisuista ja kannustaa oppilasta pohtimaan niitä lisää. Erityisesti jos oppilas on joutunut umpikujaan eikä löydä uusia ratkaisuja, ratkaisujen etsimisessä kannustaminen on tärkeää. Parin kanssa tekeminen auttaa usein ratkaisujen ideoimisessa, joten pari- tai ryhmätyöskentely voi olla hyvä keino tukea ratkaisuprosessia.

Seuraavaksi esitellään esimerkkitehtävä (Laine ym., 2016, Laine ym., 2018) ja miltä tällaisen tehtävän valmistelu voisi näyttää opettajan näkökulmasta.

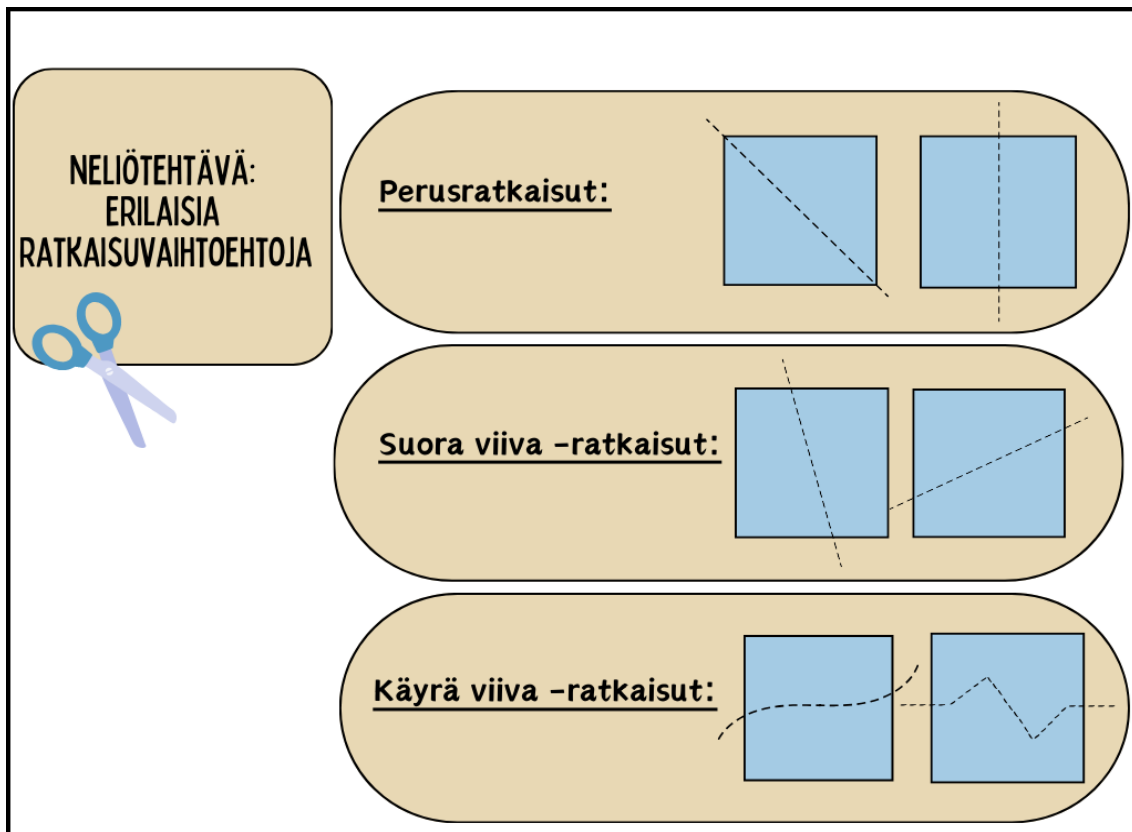
Iaa neliö mahdollisimman monella erilaisella tavalla kahteen täsmälleen samanlaiseen (eli yhtenevään) osaan käyttämällä yhtä viivaa.

Yritä löytää mahdollisimman monta erilaista ratkaisua.

Opettajan näkökulmasta tehtävän valmistelu voisi näyttää esimerkiksi tältä:



Tehtävän mahdolliset ratkaisut voidaan jaotella kolmeen ryhmään, jotka on esitetty alla olevassa kuvassa. Kaikki ratkaisut perustuvat siihen, että neliön puoliskot ovat keskenään pisteen suhteen symmetrisiä.



1. *Perusratkaisut* on löydetty jakamalla neliö keskeltä puoliksi joko kulmasta kulmaan tai sivun keskipisteestä vastakkaisen sivun vastaavaan kohtaan.
2. *Suora viiva -ratkaisut* on löydetty keksimällä, että viiva voi olla vinossa, kun se menee puolelta toiselle. Näitä ratkaisuja on olemassa ääretön määrä, koska viivan kaltevuutta ja paikkaa voidaan muuttaa.
3. *Käyrä viiva -ratkaisut* on osattu käyttää käyrää viivaa. Näitäkin ratkaisuja on olemassa ääretön määrä.

Valmisteluvaiheessa tehtävän kokeileminen itse mahdollistaa opettajalle näiden erilaisten ratkaisutapojen ymmärtämisen. Ongelmanratkaisutunnin pitämisen ensimmäisessä vaiheessa, valmisteluvaiheessa, opettaja siis valitsee tehtävän ja kokeilee sen ratkaisemista sekä valmistelee siihen liittyvät välineet ja tarvikkeet. Lisäksi opettaja suunnittelee, miten tehtävä oppitunnilla toteutetaan.



5.2. Johdatteluvaihe

Johdatteluvaiheessa keskeistä on tehtävän esittely, keskeisten käsitteiden läpikäynti, motivointi, kannustus ja rohkaisu sekä turvallisen ilmapiirin luominen. Tässä vaiheessa nousee hyvin esiin kognitiivisen ja affektiivisen tuen tärkeys. Opettaja esittelee tehtävän ja varmistaa, että oppilaat ymmärtävät tehtävässä käytetyt käsitteet, esimerkiksi kolmiraitainen lippu, tasaraha, keskinopeus (ks. luku 4). Tehtävässä tarvittavien käsitteiden ymmärtäminen on olennaista oppilaan ratkaisuprosessin kannalta (Powell & Nelson, 2017; Riccomini ym., 2015). Tosin yhtä lailla on tärkeää, ettei opettaja kerro ratkaisutapaa tai paljasta liikaa tietoa, vaan varmistaa, että oppilailla on mahdollisuus itse ymmärtää ongelma. Tässäkin vaiheessa opettajan kyky tarvittaessa eriyttää omaa ohjaustaan on merkittävä; yksi tarvitsee apua käsitteiden ymmärtämisessä, toinen sinnikkyudessa jne.

Esimerkiksi johdateltaessa oppilaita neliötehtävään, on hyvä varmistaa, että oppilas ymmärtää ja osaa hahmottaa tehtävänannon. Toisaalta on hyvä antaa oppilaiden kokeilla

ja keskustella tehtävästä. Yhteinen keskustelu usein auttaa ymmärtämään tehtävää paremmin, kun kaikki joutuvat muotoilemaan omaa ajatteluaan puheeksi. Tässä kognitiivinen tuki kohdistuu tehtävän ymmärtämiseen, kun taas affektiivinen tuki motivointiin aloittaa tehtävän ratkaiseminen sekä luomaan kannustava ilmapiiri, jossa jokainen oppilas uskaltaa yrittää. Alla on esimerkki neliötehtävän kohdalla siitä, miltä tämä voisi opettajan näkökulmasta näyttää.



5.3. Tutkimisvaihe

Tutkimisvaiheessa opettaja antaa kognitiivista tukea ohjaamalla ja syventämällä oppilaiden ajattelua. Sopivilla kysymyksillä hän saa selville oppilaiden tavan ajatella ratkaisuprosessin eri vaiheissa. Näin opettaja kykenee tukemaan ongelmanratkaisuprosessia sen edetessä. Tämä edellyttää opettajalta avoimuutta hänen omasta ratkaisutavastaan poikkeaville ideoille. Opettajaa auttaa, kun hän pyytää oppilasta kertomaan lisää omasta ratkaisutavastaan. Ratkaisujen selittäminen ja perusteleminen kehittää myös oppilaiden metakognitiivisia taitoja (Schoenfeld, 1992). Opettajan tehtävänä on ohjata oikealle tielle,

ei paljastaa oikeita ratkaisuja. On tärkeää, että myös oppilaat oppivat tekemään hyviä kysymyksiä.

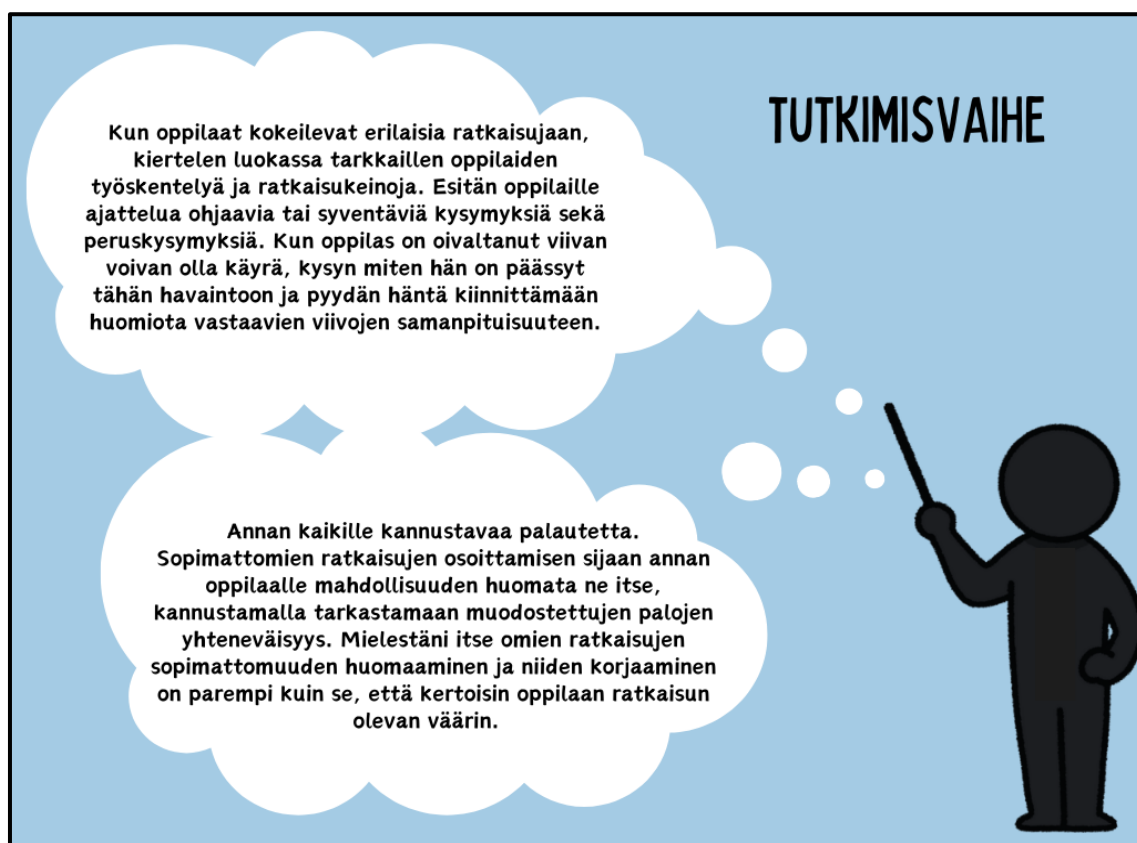
Alla olevassa taulukossa esitellään sopivia kysymyksiä, joita opettaja voi esittää oppilaalle tukeakseen tämän ongelmanratkaisuprosessia. Taulukko on Aura Kojon pro gradu -tutkielmasta (Kojo, 2015). Kysymykset jaotellaan niiden tarkoituksen mukaan peruskysymyksiin, ajattelua ohjaaviin kysymyksiin ja ajattelua syventäviin kysymyksiin.

KYSYMYSTYYPPI	ESIMERKKEJÄ KYSYMYKSISTÄ	HUOMIOITA
PERUSKYSYMYKSET	Kuinka pitkälle olet jo päässyt? Kuinka monta olet löytänyt?	Voidaan käyttää motivointikeinona: opettaja osoittaa olevansa kiinnostunut oppilaan etenemisestä. Pelkkien peruskysymysten esittäminen ei kuitenkaan vie oppilaan ajattelua eteenpäin.
AJATTELUA OHJAAVAT KYSYMYKSET	Mitä voisit ratkaista seuraavaksi? Mitä tehtävänannossa sanotaan? Mitä tämä tarkoittaa? Miksi se ei käy? Miten sitä voisi muuttaa?	Oppilasta voi pyytää perustelemaan, miksi jokin ratkaisu ei käy – ei kannata kertoa sitä itse. Oppilaan esittämään kysymykseen kannattaa vastata vastakysymyksellä, jolloin oppilas saa itse perustella ja vastata omaan kysymykseensä.
AJATTELUA SYVENTÄVÄT KYSYMYKSET	Miten olet tehtävää ratkaissut? Millaista systeemiä olet käyttänyt? Miten olet päätenyt tähän ratkaisuun?	Kysymykseen ei voi yleensä vastata yhdellä sanalla, vaan se edellyttää oppilaalta ajattelunsa sanallistamista. Syventävillä kysymyksillä opettaja osoittaa olevansa kiinnostunut oppilaan ajatuksista.

Myös affektiivinen tuki on tärkeää tutkimisvaiheessa. Affektiivinen tuki sisältää kannustamista ratkaisujen perustelemiseen, motivointia ja rohkaistua sekä turvallisen, avoimen ja sallivan ilmapiirin luomista. Opettaja voi motivoida oppilaita esimerkiksi valitsemalla vaikeustasoltaan sopivia tehtäviä, käyttämällä opetusryhmässä toimivia opetusmenetelmiä ja integroimalla ongelmanratkaisua muihin oppiaineisiin (Leppäaho, 2018). Tässäkin vaiheessa on hyvä miettiä tarpeellisia keinoja eriyttää tehtävää tai opettajan omaa ohjausta, mikäli se on tarpeen. On tärkeä luoda luokkaan ilmapiiri, jossa oppilaat uskaltavat kokeilla ja erehtyä, sekä kannustaa oppilaita puhumaan matematiikasta

ja omasta ymmärryksestään muiden oppilaiden kanssa (Laine ym., 2020). Tällöin virheelliset vastaukset voidaan nähdä tarpeellisina välivaiheina kohti oikeaa ratkaisua - ei ratkaisun epäonnistumisina.

Neliötehtävän osalta kognitiivinen ja affektiivinen tukeminen tutkimisvaiheessa voisi näyttää opettajan näkökulmasta esimerkiksi tältä:



Opettajan kannattaa myös pohtia pari- tai ryhmätyöskentelyn mahdollisuutta. On huomattu, että luokassa, jossa oppilaat tekevät töitä pääsääntöisesti yksin, oppilaat varovat kritiikin saamista ja pelkäävät sekä virheitä että neuvojen pyytämistä.

Ryhmätyöskentelyn on osoitettu olevan hyvä tapa luoda mahdollisuuksia oppilaille kertoa ajattelutavoistaan ja kuulla eri ratkaisutavoista. Pari- ja ryhmätyöskentelyä kannattaakin suosia, sillä näissä työtavoissa oppilaat innostuvat helposti vilkkaaseen ajatusten vaihtoon. Samalla he oppivat vähitellen puhumaan ongelmanratkaisusta ja ratkaisuvaihtoehdoista sekä omista ajattelumalleistaan (Leppäaho, 2018). On myös hyvä miettiä, onko ryhmä taidoiltaan heterogeeninen vai homogeeninen. Erilaisia ryhmittelyjä kannattaa käyttää vaihtelevasti.

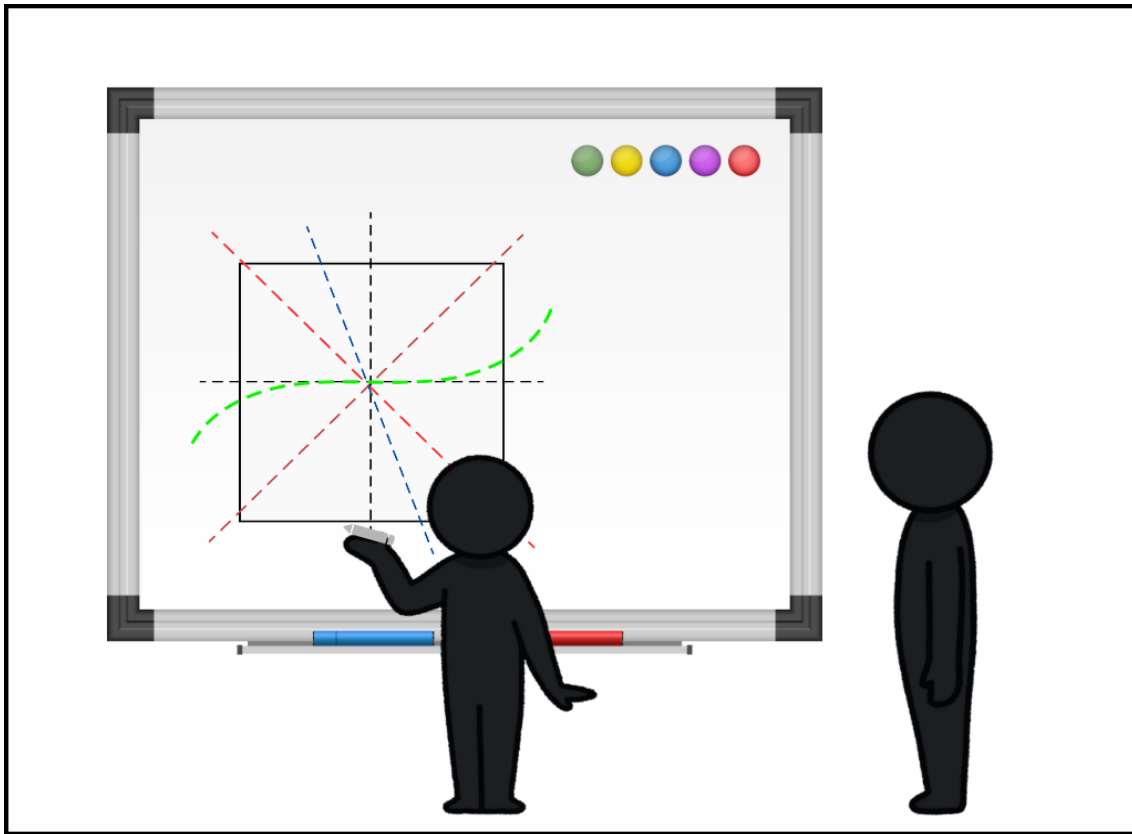
5.4. Yhteenvetovaihe

Yhteenvetovaiheessa on hyvä nostaa esiin oppilaiden erilaiset lähestymis- ja ratkaisutavat. Koko luokka voi osallistua keskusteluun erilaisista ratkaisutavoista. Yhteenvetovaiheessa opettajan keskeisenä tehtävänä on pitää yllä kannustavaa ja sallivaa ilmapiiriä, joka rohkaisee kaikkia oppilaita osallistumaan keskusteluun. Opettaja pystyy hyödyntämään kaikkien oppilaiden tuotoksia aloittamalla perusratkaisuista ja käsittelemällä vasta lopuksi pisimmälle päässeet ratkaisut. Tässä on siis hyvä palata ongelmanratkaisuprosessin vaiheisiin (ongelmatehtävän ymmärtäminen, suunnitelman tekeminen, suunnitelman toteutus, sekä ratkaisun tarkastelu) ja miettiä, miten jokainen vaihe on osa ongelmanratkaisuprosessia. Näin koko prosessi nousee tärkeäksi ja oppilas voi huomata onnistuneensa jossakin vaiheessa, vaikka ei olisikaan päätenyt oikeaan ratkaisuun. Yhteenvetovaiheessa opettajan on myös hyvä kiinnittää oppilaiden huomio keskeisiin käsitteisiin ja vahvistaa oppilaiden matemaattista ajattelua. Tässä yhteydessä on joskus myös mahdollista ”kurkottaa kohti” uutta matemaattista asiaa.

Neliötehtävässä yhteenveto voisi opettajan näkökulmasta näyttää tältä:



Oppilaiden ratkaisut voidaan koota yhteen taululle, joka mahdollistaa erilaisten ratkaisujen tarkastelemisen ja uusien oivallusten syntymisen.



Parhaimmallaan yhteenvetovaihe on yhteisen onnistumisen kokemus, joka voi tuoda lisää iloa matematiikan opiskeluun ja ylipäättään koulutyöhön ja lähentää sitä arkielämään. Toisaalta jos kaikki ei mennytkään suunnitelmien mukaan, voidaan siitäkin yhdessä oppia paljon. Voi myös olla, että opettaja huomaa omia virhearvioitaan tässä vaiheessa (esimerkiksi tehtävä oli liian helppo/vaikea, oikeita materiaaleja ei ollutkaan tarjolla), ja seuraavaan kertaan on helpompi valmistautua. Opettajankaan ei tarvitse olla ensimmäisestä kerrasta alkaen mestari ongelmanratkaisun opettamisessa, tärkeintä on muistaa uudet asiat seuraavalla kerralla.

Seuraavassa kuvassa on havainnollistettu, miltä oppilaiden ohjaaminen ja kysymysten esittäminen voisi näyttää (Kojo, 2015). Kuvassa on käytetty tehtävänä: "Kertolaskumaan aarrearkun voi avata vain tiettyinä kellonaikoina: Kellon neljän numeron summan täytyy olla 6. Näitä kellonaikoja on 38, kun käytetään 12-tunnin näyttöä. Kuinka monta ratkaisua sinä löydät parisi kanssa?"

Suosi näitä

✓

KERTOLASKUMAAN AARREARKUN VOI AVATA VAIN TIETTYINÄ KELLONAIKOINA:

- KELLON NELJÄN NUMERON SUMMAN TÄYTYY OLLA 6.
- NÄITÄ KELLONAIKOJA ON 38, KUN KÄYTETÄÄN 12-TUNNIN NÄYTTÖÄ.

KUINKA MONTA RATKAISUA SINÄ LÖYDÄT PARISI KANSSA?

Vältä näitä

✗

JOHDATTELUVAIHE

Kumpi näistä on digitaalinen kello?



Mikä numero digitaalisessa kellossa on kun on keskiyö?

00:00 12:00

Entä kun on keskipäivä?

Kirjoitetaan vastaukset taululle

Millaisenkohan ratkaisutavan tähän voisi löytää?

Ajatusten herättely kysymyksillä

Tehtävän keskeisten käsitteiden konkretisointi

Ajattelun johdattelu ratkaisutavan löytämiseksi

Epäselvä keskeisten käsitteiden määrittely

Valmiin (ja epäedullisen) ratkaisutavan antaminen

Tässä tehtävässä pitää pysyä pikkuluvuissa eli ei käytetä esimerkiksi 13 tai 15 alkuisia numeroita.

Kirjoittakaa eri kellonaikoja paperille ja etsikää ne ajat, joiden numeroiden summa on kuusi.

TUTKIMISVAIHE

Miten pääsit näihin aikaisempiin ratkaisuihin?

Onko 11:32 hyvä vastaus?

Sopiiko se siihen, mitä tehtävässä pyydettiin?

Joo, koska se sopii 12 tunnin kelloon.

Oliko siinä kaikki mitä pyydettiin?

Ainiin, siinä pyydettiin, että numeroista tulee kuusi. Ei se käykkään.

Teillä on selvästi löytynyt hyvä systeemi ratkaisujen löytämiseksi, mahtavaa!

Oppilaan ajattelun syventäminen ratkaisutapaa paljastamatta

Oppilasta autetaan arvioimaan vastauksia esim. vastakysymyksillä

Kiitoksen antaminen järjestelmällisestä etenemisestä.

Valmiin ratkaisutavan antaminen

Opettaja näyttää virheelliset vastaukset

Oppilaalle ei anneta aikaa miettiä itse ja vastata kysymykseen

Kiitoksen antaminen vain oikeista ratkaisuista

Hei, jos otat luvut 3 1 1 1 ja siirtelet niitä niin saat lisää vastauksia!

Tehtävässähan pyydettiin, ettei mennä yli puolenpäivän, mutta tämä numero meni yli siitä.

Mitä kellonaikoja saisit luvuista 4 1 1 0, - no 11.04 ja 11.40 tietenkin!

No jopas, pojat ovat löytäneet jo 30 vastausta! Yrittäkää te muutkin päästä ainakin siihen.

YHTENVETOVAIHE

Millaisia ratkaisutapoja te käytitte?

Osisitte hienosti perustella vastauksen muistelemalla tehtävänantoa!

Mikäköhän näistä ratkaisutavoista olisi ollut paras oikeiden ratkaisujen löytämiseksi?

Kannustaminen ajattelun sanallistamiseen

Kiitoksen antaminen hyvistä perusteluista

Keskustelun aloittaminen eri ratkaisutavoista

Ei jätetä tarpeeksi aikaa koonti-vaiheelle

Opettaja johtoinen ja passivoiva ratkaisutavan läpikäynti



Tässä tehtävässä piti pyörittää samoja numerosarjoja niin monta kertaa, kun mahdollista. Sitten siirrytään toiseen numerosarjaan ja tehdään sama.

Laine, Vessonen, Väisänen & Hellstrand. (2024). Opas ongelmaratkaisuun.

35

6. Ongelmanratkaisun osaamisen arviointi

Tässä luvussa kuvataan ongelmanratkaisun prosessin ja lopputuloksen arviointia. Ratkaisuprosessin arviointi on formatiivista arviointia, jossa opettaja tekee jatkuvaa havainnointia oppilaan työskentelystä. Luvussa kuvataan näitä havainnointikohteita. Lopuksi kuvataan valmiin ratkaisun arviointia tähtitaulukon avulla ja annetaan siitä esimerkkejä. Arvioinnin kohteet ja niiden määrä kannattaa miettiä kuhunkin tehtävään ja oppilaiden ennakoituihin taitoihin soveltuvaksi.

Ongelmanratkaisun osaamista on hyvä arvioida monipuolisesti ja säännöllisesti. Näin pystytään tukemaan oppilaan oppimista mahdollisimman hyvin. Jotta oppilaan osaamisesta saadaan kattavampi kuva, on tärkeä arvioida ratkaisun ja siitä tehdyn tuotoksen lisäksi myös prosessia, jolla ratkaisuun on päästy.

6.1. Prosessin arviointi

Prosessin arviointi on formatiivista arviointia, jonka tehtävänä on auttaa oppilasta kehittymään ongelmanratkaisijana. Ongelmanratkaisutaito ei ole synnynnäinen ominaisuus, vaan sitä voi oppia. Arvioinnissa on hyvä kiinnittää huomiota ainakin 1) tehtävän aloittamiseen, 2) umpikujaan joutumiseen, 3) strategioiden käyttämiseen ja 4) oman ajattelun sanalliseen ja kirjalliseen kuvailuun.



1. Tehtävän aloittaminen

On tärkeää, että ongelmatehtävää aloittaessa käydään oppilaiden kanssa yhdessä läpi tehtävä ja pohditaan sen keskeiset käsitteet. Oppilaiden kanssa myös keskustellaan tehtävän tavoitteet, esimerkiksi oppilas löytää tehtävään useamman kuin yhden ratkaisun, oppilas osaa esittää tuloksensa loogisesti jne. Oppilaan tulee tietää tehtävän tavoitteet.

Havainnoinnin kohteita:

Miten oppilas tarttuu tehtävään?

Lähteekö hän heti ideoimaan erilaisia lähestymistapoja vai vältteleekö hän tehtävään tarttumista?

Onko oppilas ymmärtänyt tehtävän kannalta keskeiset asiat?

Keskusteleeko hän parinsa/ryhmänsä kanssa aktiivisesti tehtävästä?

2. Umpikujaan joutuminen

Opettajan yhtenä tärkeimmistä tehtävistä on kannustaa oppilaita jatkamaan ja yrittämään. Sitkeys tehtävän teossa lisääntyy vähitellen onnistumisen kokemusten myötä. Opettajan on hyvä ohjata oppilasta kysymysten avulla. Hänen ei kuitenkaan pidä kertoa oppilaalle suoraan, mitä tämän pitää tehdä. Muutoin oppilaalle ei jää mahdollisuutta itse keksimiseen ja onnistumisen kokemukseen. Pieniinkin oppilaan oikeansuuntaisiin ratkaisuyrityksiin kannattaa kiinnittää huomiota ja rohkaista niistä eteenpäin.

Havainnoinnin kohteita:

Mitä oppilas tekee jouduttuaan umpikujaan?

Luovuttaako hän herkästi?

Jaksaako hän yrittää, vaikka ei heti keksi ratkaisua tai ratkaisumenetelmää?

Miten oppilas pyytää apua?

Osaako hän täsmentää kysymyksiään?

3. Strategioiden käyttäminen

Ongelmanratkaisutehtävien tekemisen yhtenä tavoitteena on, että oppilaan taidot käyttää erilaisia strategioita lisääntyisivät. Tämä tapahtuu vähitellen useita erityyppisiä ongelmatehtäviä tekemällä. On hyvä huomata, että myös erilaisten apuvälineiden käyttö voi olla toimiva strategia. Keskeisessä roolissa on se, että tehtävään sopivia strategioita käsitellään aina ongelman käsittelyn lopuksi yhteenvetokeskustelussa. Tällöin oppilaat voivat oppia toisiltaan. Opetussuunnitelman perusteissa (2014) määritellään hyvän osaamisen kriteeriksi 6. luokalla ” Oppilas käyttää ongelmanratkaisussaan erilaisia strategioita.”

Havainnoinnin kohteita:

Minkälaisia ongelmanratkaisustrategioita oppilas käyttää ratkaisuisaan?

Perustuuko strategia arvailuun vai osaako oppilas valita systemaattisen ratkaisustrategian?

Osaako hän käyttää tehtävään sopivaa strategiaa?

Osaako hän vaihdella strategioita tehtävän mukaan?

4. Oman ajattelun suullinen ja kirjallinen kuvailu

Oman ajattelun kuvailu saattaa olla aluksi oppilaille haastavaa. Siksi sitä on harjoiteltava. Työskentelyprosessin aikana kuvailua harjoitellaan selittämällä parille tai ryhmälle ja yhteenvetovaiheessa koko luokalle. Oppilaille on varattava aikaa selittämiseen ja muiden selitysten kuuntelemiseen. Olisi hyvä, että kaikki pääsisivät kuvailemaan omaa ajatteluaan. Opettajan kannattaakin valita oppilaiden järjestys siten, että pidemmälle edenneet ja vaativampia ratkaisuja löytäneet selittävät viimeisenä.

Havainnoinnin kohteita:

Osaako oppilas kertoa omasta ajattelustaan muille?

Pystyykö hän selostamaan ongelmanratkaisuprosessiaan johdonmukaisesti?

Osaako hän esittää ajatteluaan selkeästi myös kirjallisesti?

Pystyykö hän selittämään, mitä strategiaa hän on käyttänyt ja miksi hän valitsi juuri sen strategian?

Seuraavassa kuvassa on yhteenveto mahdollisista havainnoinnin ja arvioinnin kohteista.



6.2. Oppilaan ratkaisun ja tuotoksen arviointi

Opetussuunnitelman perusteissa korostetaan, että oppilaan pitää osata selittää ratkaisujaan ja päätelmiään eri tavoin, esimerkiksi konkreettisin välinein, piirroksin, suullisesti ja kirjallisesti (Opetushallitus, 2014). Ratkaisua arvioidaan niiden tavoitteiden mukaisesti, joita on käsitelty oppilaiden kanssa yhdessä tehtävän aloituksessa. Myös oppilaiden itsearvioinnin hyödyntäminen on hyvä tapa kehittää oppilaiden ongelmanratkaisutaitoja.

Tuotoksia arvioitaessa kiinnitetään tehtävästä riippuen huomiota muun muassa seuraaviin asioihin:

Ratkaisun ja tuotoksen arviointi:

- ratkaisujen lukumäärä
- ratkaisujen systemaattisuus
- ratkaisustrategian sopivuus kyseiseen tehtävään
- piirrosten, kuvioiden ja taulukoiden yms. käyttö ja selkeys
- lukujen ja laskujen käyttö
- kirjallinen selostus
- muut tavoitteet

Arvioinnin apuna voidaan käyttää esimerkiksi tähtitaulukoita. Oppilaat voivat käyttää niitä myös itsearvioinnissa ja ne on hyvä olla näkyvissä ongelmatehtävän yhteydessä. Pyrkimyksenä on saada jokaisesta sille ratkaisukerralle valitusta arviointikohteesta mahdollisimman monta tähteä. Arviointikohteita voi tehtävästä ja oppilaiden harjaantuneisuudesta riippuen olla yksi tai useampi. Seuraavalla sivulla arviointikohteet esitetään yhtenä taulukkona.

MITÄ TARKKAILLAAN?				
Huom. tehtävästä riippuen tarkkaillaan seuraavia asioita:				
MITEN RATKAISUUN PÄÄSTÄÄN?	Lukujen & laskujen käyttäminen	Lukuja ja laskuja käytetään ratkaisussa	Tehtävään sopivia laskuja käytetään ratkaisussa	Käytetyt laskut osoittavat, että ongelma on ymmärretty
	Ratkaisustrategian käyttäminen	Ratkaisussa käytetään arvaus- ja tarkistusstrategiaa	Ratkaisussa käytetään systemaattisempaa strategiaa	Ratkaisussa käytetään tehtävään hyvin sopivaa strategiaa
MIKÄ ON RATKAISUN TASO?	Ratkaisujen lukumäärä	Esitetään yksi ratkaisu	Esitetään useampia ratkaisuja	Esitetään kaikki ratkaisut / on huomattu, että niitä on useita tai äärettömästi
	Ratkaisun systemaattisuus	Ratkaisu esitetään	Ratkaisut esitetään jonkinlaisessa järjestyksessä	Ratkaisut esitetään loogisessa järjestyksessä
MITEN RATKAISUA KUVAILLAAN?	Piirrosten, kuvien tai taulukoiden käyttäminen	Ratkaisussa esitetään kuvio/piirros/taulukko	Ratkaisussa esitetty kuvio on tehty laskuihin liittyvistä asioista	Ratkaisussa esitetty kuvio osoittaa, että tehtävä on ymmärretty
	Kirjallinen tai suullinen kuvailu	Ratkaisua kuvaillaan	Ratkaisua kuvaillaan asioista, jotka näkyvät myös piirroksessa	Ratkaisua kuvaillaan monipuolisesti ja käsitteitä käytetty täsmällisesti

Näistä opettaja voi valita, kuinka monta arviointikohdetta eli tähtitaulukkoa on käytössä kussakin tehtävässä. Esimerkiksi tehtävässä *“Laatikollinen muffinsseja maksaa 20 euroa. Miten eri tavoin voit maksaa ostoksesi tasarahalla? Esitä keksimäsi ratkaisuvaihtoehdot lukujen ja laskujen avulla.”* voisi käyttää tähtitaulukoita Ratkaisujen lukumäärä, Lukujen ja laskujen käyttö sekä Ratkaisujen systemaattisuus. Oppilaan tehtäväsiivu voisi silloin näyttää tältä:

Laatikollinen muffinsseja maksaa 20 euroa. Miten eri tavoin voit maksaa ostoksesi tasarahalla? Esitä keksimäsi ratkaisuvaihtoehdot lukujen ja laskujen avulla.

Käytä tehtävän ratkaisemisessa erillistä paperia

Tehtävän arvioinnissa kiinnitetään huomiota ratkaisujen lukumäärään, lukujen ja laskujen käyttöön sekä ratkaisujen järjestelmällisyyteen. Kun olet ratkaissut tehtävän, arvioi omaa osaamistasi ympyröimällä eri osa-alueista sinun ratkaisuusi sopivat tähdet.

Opettaja merkitsee samaan taulukkoon oman arvionsa.

MITÄ TARKKAILLAAN?			
RATKAISUJEN LUKUMÄÄRÄ	Olen löytänyt yhden ratkaisun.	Olen löytänyt useamman ratkaisun.	Olen löytänyt kaikki ratkaisut/ huomannut niitä olevan useita tai äärettömästi.

MITÄ TARKKAILLAAN?			
LUKUJEN JA LASKUJEN KÄYTTÄMINEN	Olen käyttänyt ratkaisussani tehtävään liittyviä lukuja ja laskuja.	Olen osannut tehdä tehtävään sopivia laskuja.	Laskut osoittavat, että olen ymmärtänyt ongelman.

MITÄ TARKKAILLAAN?			
RATKAISUJEN SYSTEMAATTISUUS	Olen esittänyt ratkaisuni.	Olen esittänyt ratkaisuni jonkinlaisessa järjestyksessä.	Olen esittänyt ratkaisuni johdonmukaisessa järjestyksessä.

6.3. Tähtitaulukoiden arviointikohteita

Tähtitaulukoiden avulla voit valita kuhunkin tehtävään sopivat arviointikohteet. Alla on kuvattu tähtitaulukoiden arviointikohteet ja -kriteerit. Oppaan liitteenä on ladattava versio taulukoista, joita voit hyödyntää, kun valmistelet tehtävää oppilaille.

1. Ratkaisujen lukumäärä

MITÄ TARKKAILLAAN?			
RATKAISUJEN LUKUMÄÄRÄ	Olen löytänyt yhden ratkaisun.	Olen löytänyt useamman ratkaisun.	Olen löytänyt kaikki ratkaisut/ huomannut niitä olevan useita tai äärettömästi.

Yhden tähden saa, kun on löytänyt yhden ratkaisun. Kahteen tähteen vaaditaan useampia ratkaisuja. Kolme tähteä saa, kun on löytänyt kaikki ratkaisut tai huomannut, että niitä on todella paljon tai jopa äärettömästi.

2. Ratkaisun systemaattisuus

MITÄ TARKKAILLAAN?			
RATKAISUJEN SYSTEMAATTISUUS	Olen esittänyt ratkaisuni.	Olen esittänyt ratkaisuni jonkinlaisessa järjestyksessä.	Olen esittänyt ratkaisuni johdonmukaisessa järjestyksessä.

Yhden tähden saa, kun on löytänyt useampia ratkaisuja, mutta ne ovat sekalaisessa järjestyksessä. Kahteen tähteen vaaditaan ratkaisujen jonkinlaista järjestystä. Järjestys voi olla oppilaalle looginen, mutta se ei ole sitä ulkopuolisen mielestä. Kolme tähteä saa, kun on pystynyt esittämään ratkaisut ulkopuolisenkin mielestä loogisessa järjestyksessä.

3. Ratkaisustrategia

MITÄ TARKKAILLAAN?			
RATKAISUSTRATEGIOIDEN KÄYTTÄMINEN	Olen käyttänyt arvaus ja tarkistus-strategiaa.	Olen käyttänyt järjestelmällisempää strategiaa.	Olen käyttänyt tehtävään hyvin sopivaa strategiaa.

Vastauksen systemaattisuus liittyy usein siihen, kuinka edistynyttä ratkaisustrategiaa oppilas käyttää. Yhden tähden saa, kun on käyttänyt arvausta ratkaisustrategiana. Tämä näkyy usein siinä, että ratkaisut ovat jäsentymättömiä. Kahteen tähteen vaaditaan systemaattisempaa strategiaa. Tämä näkyy ratkaisussa siten, että osaratkaisut liittyvät selkeämmin toisiinsa. Kolme tähteä saa, kun on osannut käyttää tehtävään hyvin sopivaa strategiaa. Kannattaa muistaa, että useissa tehtävissä on monta sopivaa strategiaa.

4. Piirrosten, kuvioden ja taulukoiden yms. käyttö

MITÄ TARKKAILLAAN?			
PIIRROSTEN KÄYTTÄMINEN	Olen tehnyt tehtävään liittyvän piirroksen.	Olen tehnyt piirroksen tehtävän ratkaisuun liittyvistä asioista.	Piirros osoittaa, että olen ymmärtänyt tehtävän.

MITÄ TARKKAILLAAN?			
KUVIOIDEN KÄYTTÄMINEN	Olen tehnyt tehtävään liittyvän kuvion.	Olen tehnyt kuvion tehtävän ratkaisuun liittyvistä asioista.	Kuvio osoittaa, että olen ymmärtänyt tehtävän.

MITÄ TARKKAILLAAN?			
TAULUKOIDEN KÄYTTÄMINEN	Olen tehnyt tehtävään liittyvän taulukon.	Olen tehnyt taulukon tehtävän ratkaisuun liittyvistä asioista.	Taulukko osoittaa, että olen ymmärtänyt tehtävän.

Yhden tähden saa, kun on tehnyt tehtävään liittyvän piirroksen/kuvion/taulukon. Kahteen tähteen vaaditaan, että piirros/kuvio/taulukko sopii tehtävän ratkaisuun. Kolme tähteä saa, kun piirros/kuvio/taulukko kuvaa ongelman ratkaisua ja siitä voi nähdä tehtävän ratkaisun ja/tai ratkaisun idean.

5. Lukujen ja laskujen käyttö

MITÄ TARKKAILLAAN?			
LUKUJEN JA LASKUJEN KÄYTTÄMINEN	Olen käyttänyt ratkaisussani tehtävään liittyviä lukuja ja laskuja.	Olen osannut tehdä tehtävään sopivia laskuja.	Laskut osoittavat, että olen ymmärtänyt ongelman.

Yhden tähden saa, kun ratkaisusta löytyy jonkinlaisia tehtävään liittyviä laskuja. Ei haittaa, vaikka laskut ovat väärinä, eivätkä auta tehtävän ratkaisemisessa. Kahteen tähteen vaaditaan tehtävään sopivia laskuja. Kolme tähteä saa, kun laskut osoittavat, että on ymmärtänyt ongelman ja laskut on ratkaistu oikein.

6. Kirjallinen tai/ja suullinen selostus

MITÄ TARKKAILLAAN?			
KIRJALLINEN JA/TAI SUULLINEN KUVAILMINEN	Olen kuvaillut ajatteluaani ja/ tai ratkaisuaani.	Olen kuvaillut ratkaisuuni liittyviä asioita.	Olen kuvaillut asioita monipuolisesti ja käyttänyt käsitteitä täsmällisesti.

Yhden tähden saa, kun on selostanut ajatteluaan ja/tai ratkaisuaan. Kahteen tähteen vaaditaan, että selostus liittyy selkeällä tavalla ongelmaan ja sen ratkaisuun. Kolme tähteä saa, kun osaa selittää ratkaisun ja sen, miten on siihen päätyntä käyttämällä matematiikan kieltä.

7. Muut tavoitteet

MITÄ TARKKAILLAAN?			
MUUT ASETETUT TAVOITTEET			

Tähän tyhjään tähtitaulukkoon voi halutessaan lisätä omia arviointikohteita.

7. Yhteenveto

Ongelmanratkaisu on tärkeää kaikille oppilaille, koska ongelmanratkaisutaitoja tarvitsemme päivittäin sekä koulussa, työelämässä että arkielämässä. Siksi on tärkeää tarjota kaikille oppilaille mahdollisuus kehittää ongelmanratkaisutaitoja.

Ongelmanratkaisun opettaminen ja oppiminen voi olla monipuolista ja innostavaa. Varsinkin avoimet ongelmatehtävät tarjoavat luonnollisen mahdollisuuden eriyttämiseen, sillä niissä voidaan tuoda yksi tai useampia ratkaisuja ja ratkaisutapoja esille.

Seuraava tehtävä on esimerkki ongelmanratkaisutehtävästä, jonka voi ratkaista monella eri tavalla ja joka soveltuu siksi erinomaisesti monen tasoiselle oppilaalle:

Kaksikymmentäkaksi kansanedustajaa viedään presidentin linnaan takseilla. Yhteen taksiin mahtuu neljä matkustajaa. Kuinka monta taksia tarvitaan kansanedustajien kuljettamiseen? (Pongsakdi ym., 2020)

Mutta mitä tämä tehtävä vaatii oppilaalta? Ja miten opettaja voi tukea oppilasta? Ongelmanratkaisuprosessin ensimmäisessä vaiheessa oppilaan on ymmärrettävä tehtävä. Tämä sisältää sekä tehtävänannon sekä tehtävässä esiintyvät käsitteet. Opettaja voi tukea oppilasta varmistamalla, että esimerkiksi "kansanedustaja" on oppilaalle tuttu käsite sekä, että oppilas on lukenut kansanedustajien lukumäärän (22) oikein. Tämä vaatii oppilaalta sekä luetun ymmärtämistä sekä tarkkaavaisuutta. Seuraavissa vaiheissa on myös olennaista, että oppilas osaa huomioida ongelmatehtävän realistisuuden, että taksia ei voi jakaa osiin, joten taksien määrä täytyy olla kokonaisluku. Opettaja voi ohjata oppilasta kokeilemaan eri ratkaisutapoja: piirtämällä, välineillä tai suullisesti. Pari- ja ryhmätyöskentely onkin oiva tapa saada oppilaat keskustelemaan eri ratkaisuihin. Opettajalla on tärkeä rooli kannustavan ilmapiirin luomisessa, jossa jokaisen oppilaan "äänellä" on merkitys, ja jossa erilaiset ratkaisutavat ovat rikkaus. Ongelmanratkaisutunnin tai -tuokion loppuvaiheessa opettajalla onkin hyvä mahdollisuus tuoda näitä eri ratkaisutapoja esiin.

Tämän oppaan tarkoituksena on ollut tarjota tietoa, käytännön vinkkejä, tehtäviä ja ohjeita, joiden avulla opettajat voivat auttaa oppilaita kehittämään ongelmanratkaisutaitojaan. Oppaassa on käsitelty muun muassa ongelmanratkaisun eri vaiheet, kuten tehtävän

ymmärtäminen, suunnitelman laatiminen ja ratkaisun tarkastelu. Oppaassa korostetaan myös prosessin jatkuvaa arviointia. Tavoitteena on, että ongelmanratkaisu olisi oppilaille motivoivaa ja monipuolista, ja että kaikki oppilaat saisivat mahdollisuuden kehittää tärkeitä ongelmanratkaisutaitoja.

Lähteet

- Barnes, M.A. and Raghubar, K.P. (2014), Mathematics development and difficulties: The role of visual-spatial perception and other cognitive skills. *Pediatr Blood Cancer*, 61: 1729–1733. <https://doi.org/10.1002/pbc.24909>
- Bicknell, B. (1999). The writing of explanations and justifications in mathematics: Differences and dilemmas. Teoksessa J.M. Turan & K.M. Turan (toim.). *Making the difference: Proceedings of the 22nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia Incorporated*. Adelaide: MERGA.
- Boonen, A.J.H., Reed, H.C., Schoonenboom, J. & Jolles, J. (2016). It's not a math lesson - we're learning to draw! Teachers' use of visual representations in instructing word problem solving in sixth grade of elementary school. *Frontline Learning Research*, 4(5), 55–82. <http://dx.doi.org/10.14786/flr.v4i5.245>
- Bull, R. & Lee, K. (2014). Executive Functioning and Mathematics Achievement. *Child Development Perspectives*, 8, 36-41. <https://doi.org/10.1111/cdep.12059>
- Coolen, I. E. J. I., & Castronovo, J. (2023). How Memory Counts in Mathematical Development. *Journal of Cognition*, 6(1): 1, 1–12. <https://doi.org/10.5334/joc.248>
- Eccles, J. S., & Wigfield, A. (2023). Expectancy-value theory to situated expectancy-value theory: Reflections on the legacy of 40+ years of working together. *Motivation Science*, 9(1), 1–12. <https://doi.org/10.1037/mot0000275>
- Fennema, E., Franke, M. L., Carpenter, T. P., & Carey, D. A. (1993). Using Children's Mathematical Knowledge in Instruction. *American Educational Research Journal*, 30(3), 555-583. <https://doi.org/10.3102/00028312030003555>
- Gravemeijer, K., Stephan, M., Julie, C., Lin, F.-L., & Ohtani, M. (2017). What mathematics education may prepare students for the society of the future? *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(S1), 105-123. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9814-6>
- Hegarty, M., Mayer, R. E., & Monk, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology*, 87(1), 18–32. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.87.1.18>
- Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 91(4), 684–689. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.91.4.684>

- Kojo, A. (2015). "Mikä se sun systeemis on?" Luokanopettaja ongelmanratkaisun ohjaajana. [Pro gradu -tutkielma, Helsingin yliopisto]. Helsingin yliopiston avoin julkaisuarkisto Helda.
- Krawec, J. L. (2014). Problem Representation and Mathematical Problem Solving of Students of Varying Math Ability. *Journal of Learning Disabilities*, 47(2), 103-115. <https://doi.org/10.1177/0022219412436976>
- Laine, A., Näveri, L., Ahtee, M., & Pehkonen, E. (2016). Opettajan toiminnan yhteys kolmasluokkalaisten onnistumiseen ongelmatehtävän ratkaisemisessa. *NMI-bulletin*, 26(2), 43-55.
- Laine, A., Näveri, L., Pehkonen, E., Ahtee, M., & Hannula, M. S. (2018). Connections of primary teachers' actions and pupils' solutions to an open problem. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(5), 967-986. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9847-x>
- Laine, A., Ahtee, M., & Näveri, L. (2019). Impact of teacher's actions on emotional atmosphere in mathematics lessons in primary school. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(1), 163-181. <https://doi.org/10.1007/s10763-018-09948-x>
- Laine, A., Ahtee, M., & Näveri, L. (2020). Impact of Teacher's Actions on Emotional Atmosphere in Mathematics Lessons in Primary School. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(1), 163-181. <https://doi.org/10.1007/s10763-018-09948-x>
- Laine, A. & Wass, S. (2016). Ymmärrystä ongelmanratkaisuun [\[Webinaari\]](#). Vimeo.
- Leppäaho, P. (2018). Ongelmanratkaisun opettamisesta. Teoksessa Joutsenlahti, J. Silfverberg, H. & Räsänen, P. (toim.) *Matematiikan opetus ja oppiminen*. Niilo Mäki Instituutti.
- Lin, X. (2021). Investigating the Unique Predictors of Word-Problem Solving Using Meta-Analytic Structural Equation Modeling. *Educational Psychology Review*, 33(3), 1097–1124. <https://doi.org/10.1007/s10648-020-09554-w>
- Opetushallitus (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. Määräykset ja ohjeet 2014: 96. <https://eperusteet.opintopolku.fi/#/fi/perusopetus/419550/tiedot>
- Pongsakdi, N., Kajamies, A., Veermans, K., Lertola, K., Vauras, M., & Lehtinen, E. (2020). What makes mathematical word problem solving challenging? Exploring the roles of word problem characteristics, text comprehension, and arithmetic skills. *ZDM*, 52(1), 33–44. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01118-9>

- Powell, S. R. & Nelson, G. (2017). An Investigation of the Mathematics-Vocabulary Knowledge of First-Grade Students. *The Elementary School Journal*, 117(4), 664-686. <https://doi.org/10.1086/691604>
- Pólya, G. (2014). How to solve it? A new aspect of mathematical method. Princeton NJ: Princeton University Press.
- Riccomini, P. J., Smith, G. W., Hughes, E. M., & Fries, K. M. (2015). The Language of Mathematics: The Importance of Teaching and Learning Mathematical Vocabulary. *Reading and Writing Quarterly*, 31(3), 235-252. <https://doi.org/10.1080/10573569.2015.1030995>
- Salminen-Saari, J. F. A., Garcia Moreno-Esteva, E., Haataja, E., Toivanen, M., Hannula, M. S., & Laine, A. (2021). Phases of collaborative mathematical problem solving and joint attention: A case study utilizing mobile gaze tracking. *ZDM – Mathematics Education*, 53(4), 771–784. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01280-z>
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. Teoksessa D. Grouws (toim.). (1992). *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan.
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313–340. <https://doi.org/10.1080/10986060802229675>
- Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2000). Making sense of word problems. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 211-213. <https://doi.org/10.1023/A:1004190927303>
- Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J. & Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: a survey. *ZDM Mathematics Education* 52, 1–16. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4>
- Vessonen, T., Hellstrand, H., Aunio, P. & Laine, A. (2023). Individual Differences in Mathematical Problem-Solving Skills Among 3- to 5-Year-Old Preschoolers. *International Journal of Early Childhood*. <https://doi.org/10.1007/s13158-023-00361-2>
- Zhang, J., Zhao, N., & Kong, Q. P. (2019). The Relationship Between Math Anxiety and Math Performance: A Meta-Analytic Investigation. *Frontiers in Psychology*, 10, 1613. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2019.01613>

Lisämateriaalia

A. Ongelmatehtäviä sisältäviä kirjoja:

Ahtee, M., Hannula, M., Laine, A., Näveri, L., Pehkonen, e. & Portaankorva-Koivisto, P.

(2016). *Iloa ongelmanratkaisuun*. Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Björklund, J., Lehto, S., Pasanen, S. & Viljanen, M. (2023). *Sukia ja muuta*

matematiikkaa. Monipuolisuutta matematiikkaan. Helsinki: MFKA-Kustannus Oy.

Gardner, M. (2003). *Ongelmatarinoita*. Helsinki: Terra Gognita.

Laajarinne, J. (2003). *Madonluvut. Matemaattisia seikkailuja sekoiluja*. Helsinki: WSOY.

Leppäaho, H. (2004). *Matematiikan ongelmanratkaisukurssi 6. luokalle*. Helsinki: WSOY.

Lind, T. (2021). *Vesimelonin kuivatus ja muita matemaattisia pähkinöitä*. Jyväskylä:

Docendo Oy.

MensaKids (2018). *Aivotreeni lasten kirja. Pähkinöitä purtavaksi*. Helsinki: readme.fi

Oster, G. (2000). *Mieletön matikka*. Porvoo: WSOY.

Pietiläinen, K. (1994). *200 ongelmaa*. Helsinki: Art House.

Pietiläinen, K. (1996). *Toiset 200 ongelmaa*. Helsinki: Art House.

Rooney, A. & Febriana, P. (2017). *Matikka 30 sekunnissa. 30 kiehtovaa kysymystä neropateille*. Helsinki: Into kustannus.

Sakki, J. (2012). *Kuka hoksaa? 60 pähkinää purtavaksi*. Hämeenlinna: Karisto.

Tuohilampi, L. (2017). *Matikkanälkä*. Jyväskylä: PS-Kustannus.

B. Ongelmatehtäviä sisältäviä sivustoja:

Kengurukilpailun vanhoja tehtäviä <https://kengurukilpailu.fi/home/archive>

Matemaattisia arvoituksia ja ongelmia <https://www.arvoituksia.fi/matematiikka/>

Matikkadiplomit <https://matematiikkalehtisolmu.fi/diplomi.html>

Mikan matikkaa: ongelma- ja päättelytehtäviä

<https://blog.edu.turku.fi/mikanmatikkaa/ongelmanratkaisu/>

Ongelmanratkaisua <https://blogs.helsinki.fi/matematiikandidaktiikka/ongelmanratkaisua/>

Päättelypähkinöitä <https://ryhmarenki.fi/paattelypahkinat/>

Summamutikan materiaalipankki

<https://blogs.helsinki.fi/summamutikka/category/pulmatehtava/>