

Helsingin yliopisto

Matemaattisten tieteiden kandiohjelma ja taloustieteen kandiohjelma

Valintakoe 27.5.2024 – mallivastaukset

Lue huolellisesti kaikki ohjeet läpi

- Tarkista, että saamassasi koenipussa on kansilehden ja ohjesivujen (sivut 1–2) lisäksi:
 - kysymys- ja vastausosio (sivut 3–12)
 - yksi ruutupaperiarkki omia muistiinpanoja varten
 - laskin.
- Tarkista, että olet kirjoittanut nimesi ja henkilötunnuksesi kaikkiin vastauslomakkeisiin.
- Kirjoita vastauksesi
 - suomeksi. Muilla kielillä kirjoitettuja vastauksia ei huomioida arvostelussa.
 - Kirjoita / merkitse kukin vastaus sille varattuun tilaan. Merkintöjä, jotka ovat vastaukselle varatun tilan ulkopuolella, ei huomioida.
 - lyijykynällä ja selvällä käsialalla. Arvostelija tulkitsee tulkinnanvaraiset merkinnät vähiten pisteitä tuottavan vaihtoehdon mukaisesti.
- Älä kirjoita vaihtoehtoisia vastauksia. Jos kirjoitat vaihtoehtoisia vastauksia, arvostelussa huomioidaan vain vastaus, josta saat vähiten pisteitä.
- Voit luonnostella vastauksiasi ruutupaperille. Ruutupaperille tekemiäsi merkintöjä ei huomioida arvostelussa. Olet saanut yhden arkin ruutupaperia. Voit tarvittaessa pyytää lisää ruutupaperia valvojalta.
- Pidä koemateriaalisi niin, että lähelläsi istuvat hakijat eivät pysty katsomaan vastauksiasi ja merkintöjasi. Säilytä valmiit vastaukset konseptiarkin sisällä.

Pisteyttäminen

Valintakoe pisteytetään asteikolla 0–50. Tehtäväkohtaiset pisteet on ilmoitettu kunkin tehtävän kohdalla. Sinut voidaan valita vain, jos saat yhteensä vähintään 25 pistettä.

Valintakoe kirjallisuus

Valintakokeen tehtävät perustuvat lukion opetussuunnitelman mukaisiin matematiikan pitkän oppimäärän pakollisiin kursseihin (moduulit MAY1, MAA2-MAA9).

Kun aiot palauttaa koepaperit

Muista kirjoittaa nimesi ja henkilötunnuksesi koepaperinipun kansilehdelle ja kaikkiin vastauspapereihin. Ota mukaan kaikki tavarat istumapaikaltasi, kun lähdet palauttamaan koepapereita. Todista henkilöllisyytesi, kun palautat paperit. Tarvittaessa saat kokeen valvojalta erillisen todistuksen valintakokeeseen osallistumisesta.

Tehtävä 1 (10 pistettä)

1a) Ratkaise epäyhtälö $x^2 - 9 \leq 0$.

1b) Mitkä luvut $x \in \mathbb{R}$ toteuttavat molemmat epäyhtälöt $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ ja $x^2 - 9 \leq 0$?

1a) Ratkaise epäyhtälö $x^2 - 9 \geq 0$.

Tämä epäyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa $(x-3)(x+3) \leq 0$. Tämä tarkoittaa, että tulon merkki on negatiivinen tai nolla, kun x on välillä $[-3,3]$.

1b) Mitkä luvut $x \in \mathbb{R}$ toteuttavat molemmat epäyhtälöt $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ ja $x^2 - 9 \leq 0$?

Ratkaisemme ensin epäyhtälöt erikseen.

i) $x^2 - 5x + 6 \leq 0$

Ratkaisemme epäyhtälön $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ löytämällä ensin sen juuret toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla. Tästä saamme kaksi ratkaisua 2 ja 3. Seuraavaksi tutkitaan, missä väleissä epäyhtälö pätee. Epäyhtälö voi päteä välillä $x \in [2,3]$, koska toisen asteen polynomifunktio on ylöspäin aukeava ja nollakohtien välissä funktio saavuttaa miniminsä. Luvut $x \in [2,3]$ toteuttavat epäyhtälön $x^2 - 5x + 6 \leq 0$.

ii) $x^2 - 9 \geq 0$

Tämän olemme jo ratkaisseet osassa 1a) ja todenneet, että ratkaisu on $-3 \leq x \leq 3$.

Niiden leikkaus (eli arvot, jotka toteuttavat molemmat ehdot) on $x \in [2,3]$, koska tämä on ainoa alue, joka on yhteinen molemmille epäyhtälöille.

Tehtävä 2 (10 pistettä)

2a) Muodosta ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on $(-1,3)$ ja säde 3. Laske ympyrän niiden pisteiden y -koordinaatit, joiden x -koordinaatti on 2.

2b) Määritä a-kohdan ympyrän pienin etäisyys suorasta $y = 2x + 1$.

Ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on (h,k) ja säde r , on $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$. Sijoitetaan arvot: $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$. Kun $x=2$, yhtälö muuttuu: $(2+1)^2 + (y-3)^2 = 9$. Joten $y=3$.

Kyseinen suora kulkee kyseisen ympyrän läpi, joten pienin etäisyys on nolla. Oikeaksi vastaukseksi kelpasi myös laskutoimitus, jossa on laskettu ympyrän keskipisteen etäisyys suorasta. Suoran $y=2x+1$ normaalimuoto on $2x-y+1=0$. Ympyrän keskipisteen $(-1,3)$ etäisyys suorasta on:

$$d = \frac{|2(-1) - 3 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Tehtävä 3 (10 pistettä)

3. Lääketehtas tuottaa vitamiinipillereitä, joiden vaikuttavan aineen määrä on normaalijakautunut. Vaikuttavan aineen määrän keskihajonta on 5 mg. Odotusarvoa voidaan säätää. Mikä pitäisi säätää odotusarvoksi, kun tavoitteena on, että enintään 1 % pillereistä sisältää alle 150 mg vaikuttavaa ainetta? Anna vastaus milligramman tarkkuudella.

$$\text{Lääkkeen määrä } X \sim N(\mu, 5) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{5} \sim N(0,1)$$

$$\begin{aligned} \text{Lääkepaketti on alipainonen todennäköisyydellä } P(X < 150) &= P\left(Z < \frac{150 - \mu}{5}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\mu - 150}{5}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Tämän on oltava } \leq 0,01, \text{ joten } \Phi\left(\frac{\mu - 150}{5}\right) \geq 0,99$$

$$\text{Kertymäfunktio-aulukon mukaan } \left(\frac{\mu - 150}{5}\right) \geq 2,33$$

Tästä saadaan $\mu \geq 150 + 11,65 = 161,65$, eli lääkkeen odotusarvoksi on säädettävä 162 grammaa

Tehtävä 4 (10 pistettä)

4. Tehtävä (10 pistettä)

Suunnittele materiaalikustannuksiltaan mahdollisimman halpa peltitölkki, jonka tilavuus on 500 cm³. Tölkin pohja- ja kansilevyjen materiaalin hinta on 1,50 e/m² ja vaipan materiaalin hinta on 0,75 e/m². Anna tölkin korkeuden ja pohjan halkaisijan suhde.

Yhtälöiden muodostaminen:

- Tilavuus V: $V = \pi r^2 h = 500 \text{ cm}^3$
- Pinta-ala A: $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$
- Kustannus C: $C = 2\pi r^2 \cdot 1,5 + 2\pi r h \cdot 0,75 = 3\pi r^2 + 1,5\pi r h$

Korkeuden h ilmaiseminen säteen r avulla:

- $h = 500 / \pi r^2$

Kustannusfunktion C muokkaaminen vain r muuttujan avulla ja sen minimointi:

- $C = 3\pi r^2 + 1,5\pi r (500 / \pi r^2) = 3\pi r^2 + 750 / r$
- Derivoimalla C r:n suhteen ja asettamalla derivaatta nolaksi, löydämme r:n arvon, joka minimoi kustannukset: $dC/dr = 6\pi r - 750/r^2 = 0$. Ratkaiseminen r:n suhteen $6\pi r^3 = 750$ on $r = (750/6\pi)^{1/3}$

Korkeuden h laskeminen:

- Kun r on tiedossa, h voidaan laskea kaavasta $h=500/\pi r^2$

Korkeuden ja halkaisijan h/d -suhteen laskeminen:

- $d=2r$
- $h/d=\pi r^2/2r = 500/2\pi r^3$
- Korvataan r ja laske suhde h/d : $h/d = 500/(2\pi(750/6\pi))^{(1/3)^3} = 2$

Tämä tulos tarkoittaa, että optimaalisessa tölissä korkeus on kaksi kertaa pohjan halkaisijan mittainen.

Tehtävä 5 (10 pistettä)

5. a) Määritä käyrien $y = x^3 - 4x$ ja $y = x^2 - 4$ leikkauspisteet.

5b) Näiden käyrien väliin jää yksi rajoitettu alue. Laske tämän alueen pinta-ala.

Leikkauspisteet löytyvät asettamalla käyrien yhtälöt yhtä suuriksi ja ratkaisemalla x :

$x^3 - 4x = x^2 - 4$. Järjestellään termit $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$. Se voidaan kirjoittaa yhtälö:

$x^2(x-1) - 4(x-1) = 0$, $(x^2 - 4)(x-1) = 0$, $(x-2)(x+2)(x-1) = 0$, eli saamme leikkauspisteet: $x=2$, $x=-2$ ja $x=1$.

Pinta-alan laskeminen: Käyrien $y=x^3-4x$ ja $y=x^2-4$ jää yksi rajoitettu alue, joka on välillä $[-2,1]$. Lasketaan tämän alueen pinta-ala integraalilla:

$$\int_{-2}^1 (x^3 + x^2 - 4x + 4) dx = 11,25$$

Rajoitetun alueen pinta-ala välillä $[-2,1]$ on 11.25 yksikköä