Helsingfors universitet
Kandidatprogrammet i matematiska vetenskaper / Kandidatprogrammet i ekonomi
Urvalsprovet 29.5.2023 – Lösningar och poängsättning

1. En kurva i planet går genom punkten $(3, 4)$. Bestäm kurvans ekvation när det är fråga om
   (a) en linje som går genom origo, (3 poäng)
   (b) en origocentered cirkel, (3 poäng)
   (c) en parabel som öppnas uppåt och vars topp är i origo. (4 poäng)

Lösning.

(a) Vinkelkoefficienten för linjen är

$$k = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}, \quad (1 \text{ p.})$$

så dess ekvation är $y = \frac{4}{3}x$ (eller $4x - 3y = 0$). (2 p.)

(b) Radien r till cirkeln är avståndet från punkten $(3, 4)$ till origo, alltså

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5. \quad (1 \text{ p.})$$

Ekvationen är $x^2 + y^2 = r^2$ eller $x^2 + y^2 = 25$. (2 p.)

(c) Ekvationen för en parabel som öppnar sig uppåt med toppen i origo har formen $y = ax^2$ (1 p.). Eftersom punkten $(3, 4)$ ligger på kurvan, så gäller att $4 = a \cdot 3^2$ (1 p.). Alltså $a = \frac{4}{9}$ (1 p.), så att ekvationen för parabeln är $y = \frac{4}{9}x^2$ (1 p.).

2. Beräkna integralerna
   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{3+x}\,dx$, (5 poäng)
   (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{2|x|}\,dx$. (5 poäng)

Lösning.

(a)

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{3+x}\,dx &= \Big/_{-1}^{1} \ln(3+x) \quad (2 \text{ p.}) \\
&= \ln(3+1) - \ln(3-1) \quad (1 \text{ p.}) \\
&= \ln\frac{4}{2} \quad (1 \text{ p.}) \\
&= \ln 2. \quad (1 \text{ p.})
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} e^{2|x|}\,dx &= \int_{-1}^{0} e^{-2x}\,dx + \int_{0}^{1} e^{2x}\,dx \quad (2 \text{ p.}) \\
&= -\frac{1}{2}\Big/_{-1}^{0} e^{-2x} + \frac{1}{2}\Big/_{0}^{1} e^{2x} \quad (1 \text{ p.}) \\
&= -\frac{1}{2}(e^0 - e^2) + \frac{1}{2}(e^2 - e^0) \quad (1 \text{ p.}) \\
&= e^2 - 1. \quad (1 \text{ p.})
\end{aligned}$$

3. Anta att $A = (1, 2)$. Vektorn $\overrightarrow{AB}$ har längden 3 och den står vinkelrätt mot vektorn $3\bar{i} + 4\bar{j}$. Bestäm koordinaterna för punkten B.

Lösning. Vektorer som är vinkelräta mot $3\bar{i}+4\bar{j}$ är exempelvis vektorerna $\bar{n} = \pm(4\bar{i}-3\bar{j})$ (1 p.), vars längd är $\sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$ (1 p.). De vektorer som har samma riktning och längden 3, har formen $\frac{3}{5}\bar{n}$ (1 p.). Alltså

$$\overrightarrow{AB} = \pm\frac{3}{5}(4\bar{i} - 3\bar{j}) = \pm\left(\frac{12}{5}\bar{i} - \frac{9}{5}\bar{j}\right). \quad (2\text{ p.})$$

Vektorn $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ (1 p.). Man får att

$$\overrightarrow{OB} = i + 2\bar{j} + \frac{12}{5}\bar{i} - \frac{9}{5}\bar{j} = \frac{17}{5}\bar{i} + \frac{1}{5}\bar{j} \quad (1\text{ p.})$$

eller

$$\overrightarrow{OB} = i + 2\bar{j} - \frac{12}{5}\bar{i} + \frac{9}{5}\bar{j} = -\frac{7}{5}\bar{i} + \frac{19}{5}\bar{j} \quad (1\text{ p.})$$

Koordinaterna för punkten B är alltså $(\frac{17}{5}, \frac{1}{5})$ (1 p.) eller $(-\frac{7}{5}, \frac{19}{5})$ (1 p.).

4. Genom att kasta en tärning som har formen av en regelbunden tetraeder kan man få ögontalen 1, 2, 3 eller 4. Alla dessa ögontal är lika sannolika. En spelare kastar samtidigt en tetraederformad och en vanlig tärning och beräknar summan av ögontalen.
   (a) Bestäm sannolikheterna för alla möjliga summor av ögontalen. (5 poäng)
   (b) Bestäm väntevärdet för ögontalens summa. (5 poäng)

Lösning. Vi ställer upp alla möjliga summor av ögontalen i tabellform:

4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

(3 p.)

Det finns sammanlagt $6 \cdot 4 = 24$ stycken elementära fall. (1 p.)

(a) På basen av tabellen erhåller vi sannolikheterna

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = n)$	1/24	2/24	3/24	4/24	4/24	4/24	3/24	2/24	1/24

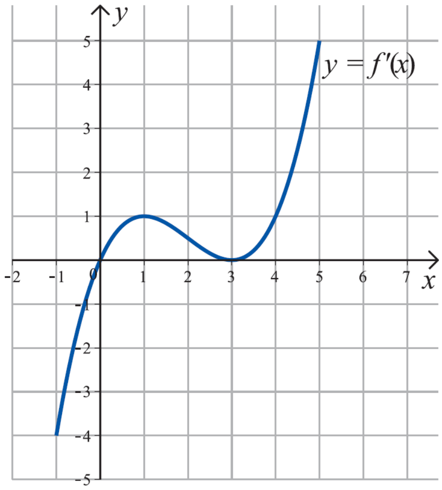
En korrekt (1 p.), 5 korrekta (1 p.), alla korrekta (1 p.).

(b) Väntevärdet av summan är

$$\frac{1}{24}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 9 + 1 \cdot 10) \quad (2\text{ p.})$$

$$= \frac{144}{24} = 6. \quad (1\text{ p.})$$

5. I figuren nedan visas grafen av derivatafunktionen $f'(x)$ till en viss funktion $f(x)$ i intervallet $-1 < x < 5$.
   (a) Bestäm utgående från grafen nollställena till derivatafunktionen $f'(x)$. (3 poäng)
   (b) Bestäm utgående från grafen de intervall där funktionen $f(x)$ är växande. (3 poäng)
   (c) Bestäm utgående från grafen de lokala extremställena till funktionen $f(x)$ och vilka typer av extremställen den är frågan om. (4 poäng)



Lösning.

(a) $x = 0$ och $x = 3$. Ett nollställe korrekt (2 p.), andra korrekt (1 p.).
(b) Funktionen är växande då $0 \leqslant x < 5$. (3 p.)
(c) Rita ett teckenschema: (1 p.)

$f'(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

$-1 \quad 0 \quad 3 \quad 5$

Alltså den enda extremvärdespunkten är $x = 0$ (2 p.), som är en minimipunkt (1 p.).