Päähaku, matemaattisten tieteiden kandiohjelma
Päähaku, matematiikan, fysiikan ja kemian opettajan kandiohjelma

Valintakoe 19.5.2017

Kirjoita henkilö- ja yhteystietosi tekstaamalla.

Kirjoita nimesi latinalaisilla kirjaimilla (abcd...), älä esimerkiksi kyrillisillä kirjaimilla (абгд...).

Jos sinulla ei ole suomalaista henkilötunnusta, kirjoita sen asemesta syntymäaikasi.

Sukunimi	
Kaikki etunimet	
Henkilötunnus	
Sähköpostiosoite	
Puhelinnumero	

Tarkista sivunumeroiden avulla, että olet saanut kaikki sivut.

Kirjoita nimesi ja henkilötunnuksesi jokaiselle sivulle, vaikka et ko. sivun tehtävään vastaisikaan.

Kirjoita alla olevaan laatikkoon nimikirjoituksesi merkkinä siitä, että olet tarkistanut edellä mainitut asiat.

Nimikirjoitus	

Jos haluat, että tehtäviin kirjoittamasi vastaukset arvostellaan, jätä alla oleva laatikko tyhjäksi.

Jos haluat, että tehtäviin kirjoittamiasi vastauksia ei arvostella, kirjoita alla olevaan laatikkoon teksti "*Haluan, että vastauksiani ei arvostella*". Tässä tapauksessa saat vastauksistasi nolla pistettä.

Arvostelusta luopuminen	

Nimi: ________________

Henkilötunnus: ________________

Tämä sivu on yliopiston merkintöjä varten. Älä tee tälle sivulle omia merkintöjäsi.

MATEM 1234

Tehtävä 1

Ratkaise seuraavat yhtälöt ja epäyhtälöt.

(a) $(4x+1)(2-3x) > 0$, (2 p.)
(b) $\ln e^{x^2} = -x$, (2 p.)
(c) $-\sqrt{x} \geq \sqrt[3]{-x}$, (2 p.)
(d) $\cos(5x + 45°) = \cos 4x$, (2 p.)
(e) $|x-2| < |x+3|$. (2 p.)

Nimi: ________________

Henkilötunnus: ________________

Tehtävä 2

Mansikkamehun sokeripitoisuus on 20 % ja mustikkamehun sokeripitoisuus on 12 %.

(a) Mehuista valmistetaan sekamehua, jonka sokeripitoisuus on 15 %. Laske mehujen sekoitussuhde. (5 p.)

(b) Valmistettua sokeripitoisuudeltaan 15 % sekamehua laimennetaan vedellä. Kuinka monta senttilitraa 2,4 dl lasillisessa laimennettua mehua on mansikkamehua, mustikkamehua ja lisättyä vettä, kun laimennetun mehun sokeripitoisuus on 10 %? (5 p.)

Nimi: ______________________

Henkilötunnus: ______________________

Tehtävä 3

(a) Kuinka monta erilaista kirjainjonoa voidaan muodostaa sanasta PAPAIJA, kun sanan kaikki kirjaimet käytetään täsmälleen kerran? (4 p.)

(b) Valitaan satunnaisesti yksi kirjain sanasta PAPAIJA ja yksi kirjain sanasta PELAILIJA.

(i) Mikä on todennäköisyys, että valitut kirjaimet ovat samat? (3 p.)

(ii) Mikä on todennäköisyys, että toinen valituista kirjaimista on A, E tai I (on siis vokaali) ja toinen ei ole (on siis konsonantti)? (3 p.)

Tehtävä 4

Tasasivuisen kolmion sivun pituus on 4 cm. Kolmion sisään piirretään suorakulmio, jonka yksi sivu on kolmion sivulla. Mikä on pinta-alaltaan suurimman tällaisen suorakulmion pinta-ala? (10 p.)

Tehtävä 5

Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x) + x$.

(a) Määritä funktion f integraalifunktio $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle $F(\pi) = 1 + \pi^2$. (5 p.)

(b) Laske funktion f kuvaajan, x-akselin ja suoran $x = \pi$ väliin jäävän rajoitetun alueen pinta-ala. (5 p.)

Helsingin yliopisto
Päähaku, matemaattisten tieteiden kandiohjelma
Päähaku, matematiikan, fysiikan ja kemian opettajan kandiohjelma
Valintakoe 19.5.2017 – Ratkaisut ja pisteytys

1. Ratkaise seuraavat yhtälöt ja epäyhtälöt.
   (a) $(4x + 1)(2 - 3x) > 0$, (2 p.)
   (b) $\ln e^{x^2} = -x$, (2 p.)
   (c) $-\sqrt{x} \geqslant \sqrt[3]{-x}$, (2 p.)
   (d) $\cos(5x + 45°) = \cos 4x$, (2 p.)
   (e) $|x - 2| < |x + 3|$. (2 p.)

Ratkaisu.

(a) Yhtälön $(4x + 1)(2 - 3x) = 0$ ratkaisut ovat $x = -\frac{1}{4}$ ja $x = \frac{2}{3}$ (+1 p.). Koska $(4x+1)(2-3x) = -12x^2+5x+2$ on alaspäin aukeava paraabeli, niin epäyhtälön $(4x + 1)(2 - 3x) > 0$ ratkaisu on $-\frac{1}{4} < x < \frac{2}{3}$ (+1 p.).

(b) $\ln e^{x^2} = -x \iff x^2 \ln e = -x \iff x^2 = -x$ (+1 p.) $\iff x^2 + x = 0 \iff x(x + 1) = 0 \iff x = -1$ tai $x = 0$ (+1 p.).

(c) On oltava $x \geqslant 0$, jotta epäyhtälö on määritelty. Nyt $-\sqrt{x} \geqslant \sqrt[3]{-x} \iff \sqrt{x} \leqslant -\sqrt[3]{-x} \iff \sqrt{x} \leqslant \sqrt[3]{x}$ (+1 p.) $\overset{x\geqslant 0}{\iff} x^3 \leqslant x^2 \iff x^2(x-1) \leqslant 0 \overset{x^2\geqslant 0}{\iff} x - 1 \leqslant 0 \iff x \leqslant 1$. Näin ollen on oltava $0 \leqslant x \leqslant 1$ (+1 p.).

(d) $\cos(5x + 45°) = \cos 4x \iff 5x + 45° = 4x + n \cdot 360°$ tai $5x + 45° = -4x + n \cdot 360°$ $(n \in \mathbb{Z})$ (+1 p.) $\iff x = -45° + n \cdot 360°$ tai $9x = -45° + n \cdot 360°$ $(n \in \mathbb{Z}) \iff x = -45° + n \cdot 360°$ tai $x = -5° + n \cdot 40°$ $(n \in \mathbb{Z})$ (+1 p.).

(e) $|x-2| < |x+3| \iff (x-2)^2 < (x+3)^2 \iff x^2-4x+4 < x^2+6x+9$ (+1 p.) $\iff 10x > -5 \iff x > -\frac{1}{2}$ (+1 p.).

2. Mansikkamehun sokeripitoisuus on 20 % ja mustikkamehun sokeripitoisuus on 12 %.
   (a) Mehuista valmistetaan sekamehua, jonka sokeripitoisuus on 15 %. Laske mehujen sekoitussuhde. (5 p.)
   (b) Valmistettua sokeripitoisuudeltaan 15 % sekamehua laimennetaan vedellä. Kuinka monta senttilitraa 2,4 dl lasillisessa laimennettua mehua on mansikkamehua, mustikkamehua ja lisättyä vettä, kun laimennetun mehun sokeripitoisuus on 10 %? (5 p.)

Ratkaisu.

(a) Tehdään taulukko:

Neste	Määrä	Sokeria
Mansikkamehu	x	$0{,}2x$
Mustikkamehu	y	$0{,}12y$
Sekamehu	$x + y$	$0{,}15(x + y)$

(+2 p)

Saadaan yhtälö $0{,}2x + 0{,}12y = 0{,}15(x + y)$ (+1 p.) $\iff 0{,}05x = 0{,}03y \iff \dfrac{x}{y} = \dfrac{0{,}03}{0{,}05} = \dfrac{3}{5}$ (+1 p.). Siis kysytty mehujen sekoitussuhde on 3 : 5 (mansikkamehu : mustikkamehu) (+1 p).

(b) Tehdään uusi taulukko:

Neste	Määrä	Sokeria
Sekamehu	v	$0{,}15v$
Lisätty vesi	w	0
Laimennettu mehu	$v+w$	$0{,}1(v+w)$

(+1 p)

Saadaan yhtälö $0{,}15v = 0{,}1(v+w) \iff 0{,}05v = 0{,}1w \iff \dfrac{v}{w} = \dfrac{0{,}1}{0{,}05} = \dfrac{2}{1}$ (+1 p.). Näin ollen lasillisessa laimennettua mehua on $\dfrac{24}{3}$ cl $= 8$ cl vettä (+1 p.) ja sekamehua on $\dfrac{2\cdot 24}{3}$ cl $= 16$ cl. Koska kohdan (a) mukaan sekamehussa mansikkamehun ja mustikkamehun sekoitussuhde on $3:5$, niin laimennetussa mehussa on mansikkamehua $\dfrac{3\cdot 16}{8}$ cl $= 6$ cl (+1 p.) ja mustikkamehua $\dfrac{5\cdot 16}{8}$ cl $= 10$ cl (+1 p.).

3. (a) Kuinka monta erilaista kirjainjonoa voidaan muodostaa sanasta PAPAIJA, kun sanan kaikki kirjaimet käytetään täsmälleen kerran? (4 p.)
   (b) Valitaan satunnaisesti yksi kirjain sanasta PAPAIJA ja yksi kirjain sanasta PELAILIJA.
      (i) Mikä on todennäköisyys, että valitut kirjaimet ovat samat? (3 p.)
      (ii) Mikä on todennäköisyys, että toinen valituista kirjaimista on A, E tai I (on siis vokaali) ja toinen ei ole (on siis konsonantti)? (3 p.)

Ratkaisu.

(a) Koska sanassa PAPAIJA on yhteensä 7 kirjainta (+1 p.), joista A-kirjaimia on 3, P-kirjaimia on 2 sekä I- ja J-kirjaimia on kumpiakin 1 (+1 p.), niin erilaisia muodostettavia kirjainjonoja on

$$\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1} = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 2 = 420 \quad (+2\text{ p.}).$$

(bi)

$$\begin{aligned}
P(\text{"valitut kirjaimet ovat samat"}) &= P(\text{"valitut kirjaimet ovat P"}) \\
&\quad + P(\text{"valitut kirjaimet ovat A"}) \\
&\quad + P(\text{"valitut kirjaimet ovat I"}) \\
&\quad + P(\text{"valitut kirjaimet ovat J"}) \quad (+1\text{ p.}) \\
&= \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{9} + \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{9} + \frac{1}{7}\cdot\frac{2}{9} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{9} \quad (+1\text{ p.}) \\
&= \frac{2}{63} + \frac{6}{63} + \frac{2}{63} + \frac{1}{63} = \frac{11}{63}. \quad (+1\text{ p.})
\end{aligned}$$

(bii)

$$\begin{aligned}
&P(\text{"valituista kirjaimista toinen on vokaali ja toinen on konsonantti"})\\
&= P(\text{"1. kirjain on vokaali ja 2. kirjain on konsonantti"})\\
&\quad + P(\text{"1. kirjain on konsonantti ja 2. kirjain on vokaali"}) \quad (+1\text{ p.})\\
&= \frac{4}{7}\cdot\frac{4}{9}+\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{9} \quad (+1\text{ p.})\\
&= \frac{16}{63}+\frac{15}{63}=\frac{31}{63}. \quad (+1\text{ p.})
\end{aligned}$$

4. Tasasivuisen kolmion sivun pituus on 4 cm. Kolmion sisään piirretään suorakulmio, jonka yksi sivu on kolmion sivulla. Mikä on pinta-alaltaan suurimman tällaisen suorakulmion pinta-ala? (10 p.)

Ratkaisu. Suoritetaan laskut ilman yksikköjä cm ja cm^2, lisätään vasta vastaukseen yksikkö cm^2. Merkitään kolmion korkeutta h:lla sekä kolmion sissän piirretyn suorakulmion kantaa a:lla ja korkeutta b:llä (+1 p.). Pythagoraan lauseen mukaan $h^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$, joten $h = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. (+1 p.). Yhdenmuotoisuuden perusteella

$$\frac{h}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{\frac{4-a}{2}} = \frac{2b}{4-a}, \quad (+1\text{ p.})$$

joten $4b = 2\sqrt{3}(4-a)$ ja näin ollen

$$b = \frac{2\sqrt{3}(4-a)}{4} = \frac{\sqrt{3}(4-a)}{2}. \quad (+1\text{ p.})$$

Suorakulmion pinta-ala on

$$A(a) = a\cdot b = a\cdot\frac{\sqrt{3}(4-a)}{2} = 2\sqrt{3}a - \frac{\sqrt{3}}{2}a^2, \quad (+1\text{ p.})$$

missä $0 \leqslant a \leqslant 4$, ja sen derivaatta on

$$A'(a) = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}a, \quad (+1\text{ p.})$$

joten $A'(a) = 0 \iff a = 2$ (+1 p.). Koska suorakulmion pinta-alaa kuvaavan funktion A kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli (+1 p.), niin sen suurin arvo saavutetaan derivaatan nollakohdassa $a = 2 \in (0,4)$ (+1 p.). Kysytty suurin suorakulmion pinta-ala on näin ollen

$$A(2) = 2\sqrt{3}\cdot 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2^2 = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\text{ cm}^2. \quad (+1\text{ p.})$$

5. Olkoon $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x) + x$.
   (a) Määritä funktion f integraalifunktio $F\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, jolle $F(\pi) = 1 + \pi^2$. (5 p.)
   (b) Laske funktion f kuvaajan, x-akselin ja suoran $x = \pi$ väliin jäävän rajoitetun alueen pinta-ala. (5 p.)

Ratkaisu.

(a) Saadaan

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (\sin(x) + x)\,dx = -\cos x + \frac{x^2}{2} + C, \quad (+2\text{ p.})$$

joten

$$F(\pi) = -\cos\pi + \frac{\pi^2}{2} + C = 1 + \frac{\pi^2}{2} + C = 1 + \pi^2. \quad (+1 \text{ p.})$$

Näin ollen $C = \dfrac{\pi^2}{2}$ (+1 p.), joten kysytty funktio on $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = -\cos x + \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2}. \quad (+1 \text{ p.})$$

(b) Havaitaan, että $f(0) = \sin 0 + 0 = 0$, $f(\pi) = \sin\pi + \pi = \pi$ ja funktiolla f ei ole 0-kohtia avoimella välillä $(0, \pi)$ (+1 p.). Tämän voi todeta esimerkiksi sen perusteella, että f on aidosti kasvava välillä $[0, \pi]$, sillä $f'(x) = \cos x + 1 > 0$ kaikilla $x \in (0, \pi)$ ja f on jatkuva (+1 p.). Näin ollen kysytty pinta-ala saadaan määrättynä integraalina

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\,dx &= \Big/_{\!0}^{\pi} -\cos x + \frac{x^2}{2} \quad (+1 \text{ p.})\\ &= -\cos\pi + \frac{\pi^2}{2} - \left(-\cos 0 + \frac{0^2}{2}\right) \quad (+1 \text{ p.})\\ &= 1 + \frac{\pi^2}{2} + 1 = 2 + \frac{\pi^2}{2}. \quad (+1 \text{ p.})\end{aligned}$$