

SOLMUTEORIAA TOPOLOGISESTI.  
KEVÄT 2009.

Vadim Kulikov

15. huhtikuuta 2009

# I Johdanto

## I.1. Solmut.



Jokapäiväisessä elämässä törmäämme solmuihin kengännauhoissa, korvalappustereoiden piuhoissa tai ollaan kieli solmussa. On lukuisia kirjoja siitä miten kannattaa sitoa toimivia solmuja erilaisiin tarkoituksiin. Esimerkiksi solmuja, jotka pitäisivät veneen paikalla mutta jotka olisi kuitenkin helppo saada auki, toisaalta solmuja joita ei ole tarkoitukseen saada koskaan auki (ilman puukkoa) tai solmuja joita käytetään vuorikiipeilyssä. Myös solmujen kauneus ovat kiinnostaneet ihmisiä. Esimerkiksi keltit ovat piirtäneet solmuja niiden esteettisyy-

den takia (katso kuva vasemmalla).

Matemaattinen teoria solmuista keskittyy toisenlaiseen kysymykseen: mistä voimme päätellä ovatko kaksi annettua solmua sama vai eri solmu? Standardi solmuteorian kysymys on: jos vedän narun päistä eri suuntiin, niin jääkö se solmuun vai avautuuko se? (Narun kitka oletetaan olemattomaksi). Esimerkiksi jos vedetään narua



molemmista päistä niin se taatusti suoristuu. Tähän on jo hieman vaikeampaa vastata tilanteessa



joskin lukija pienen miettimisen jälkeen näkee miten tämäkin solmu aukeaa.

**I.1. TEHTÄVÄ.** Tee yllä oleva solmu narusta ja osoita sen avulla, että solmu todella aukeaa. Kokeile myös muita solmuja!

Siispä voimme todistaa jokin solmu avautuvaksi *näyttämällä miten se aukeaa*. Entä jos solmu ei millään aukea? Voimmeko varmuudella sanoa, että se ei todella aukea millään

vai onko edessämme kenties taas avautuva solmu, mutta emme ole vain keksineet, miten se oikein aukeaa. Esimerkiksi kuvassa 1 olevassa solmukaavioiden parista luultiin monta kymmentä vuotta, että ne esittävät eri solmuja. Kun halutaan todistaa, että kaksi solmua



KUVA 1. Perkon pari, tunnistettu samaksi solmuksi 1970.

ovat todella eri, tarvitaan invariantteja.

## I.2. Historiaa.

Matemaattinen solmujen tutkimus sai ilmeisesti alkunsa 1800-luvulla kun Karl Friedrich Gauss kiinnostui punoksista (link) ja määritteli tavan laskea kietoutumisluvun (katso kappaletta ??) integraalin avulla. Gaussin oppilas J.B. Listing jatkoi solmujen tutkimista. Vähän myöhemmin kiinnostus solmuteoriaa kohtaan kasvoi, kun Lord Kelvin esitti teoriasaansa, että atomien ovat oikeastaan solmuja. Silloin vallitsi eetteriteoria; sen mukaan maailmankaikkeus on täynnä eetteriä, joka toimii valoaaltojen kantajana. Kelvinin uuden teorian mukaan materia oli vain solmussa olevia eetteripyörteitä. Solmujen erilaisuus selittäisi atomien erilaisuuden. Tämä sai huomiota ja nosti solmuteorian luonnollisesti mielenkiinnon kohteeksi. Aika nopeasti kuitenkin osoittautui, että eetteriä ei olekaan<sup>1</sup> ja fyysikoiden kiinnostus solmuteoriaan laantui. Mutta matemaatikoiden pysyi. Algebrallisen topologian isät Henri Poincaré, Max Dehn, J. W. Alexander ja Kurt Reidemeister tutkivat solmuja ja pitkään heidän teoriasensa olivat ainoat työkalut solmuteoriassa.

1980-luvulla solmuteoriassa tapahtui muutoksia, kun määriteltiin muun muassa Jonesin ja HOMFLY-polynomit. Louis Kauffman on edistänyt erityisesti kombinatorista lähestymistapaa solmuteoriaan.

<sup>1</sup>Michelsonin ja Morleyn koe osoitti valon nopeuden riippumattomuuden koordinaatistosta, mikä on ristiriidassa eetterihypoteesin kanssa.

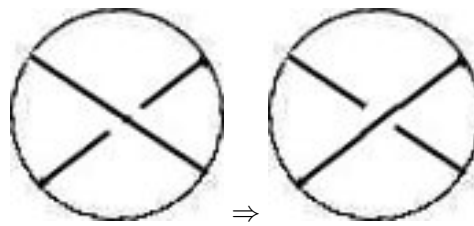
### I.3. Solmuteorialla on suoria sovelluksia.

Kurssin aihepiiriin eivät kuulu solmuteorian sovellukset, mutta mainitaan ne kuitenkin.

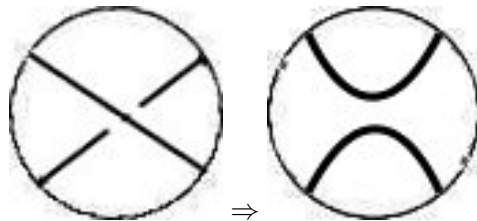
Kun solussa luetaan DNA:ta tai valmistetaan sitä kopioitavaksi, siitä täytyy tuoda esille tiettyjä osia. Koska DNA on tehokkaasti pakattu tumaan, tämä on epätriviaali tehtävä, jonka suorittamisessa auttavat topoisemraasientsyymit. Näitä entsyymejä on lukuisia ja ne tekevät DNA-molekyylille erilaisia muodonmuutoksia. Biologeja usein kiinnostaa, minkälaisia nämä muodonmuutokset ovat mitä tietyt topoismeraasit tekevät.

Sen selvittämiseksi otetaan syklinen DNA-molekyyli (sellaisia on bakteereissa ja nykyään niitä osataan myös syntetisoida) ja sekoitetaan sen joukkoon tutkittava entsyymi. Entsyymi suorittaa muodonmuutoksen molekyyliin ja samalla muuttaa sen solmutyyppiä. Siitä, miten solmutyyppi muuttui, voi päätellä minkälaisen lokaalin muutoksen tämä topoismeraasi teki.

Valaistaan tätä yksinkertaistetulla esimerkillä. Oletetaan, että topoismeraasi A tekee aina lokaalin muutoksen muotoa



ja topoismeraasi B tekee lokaalin muutoksen muotoa

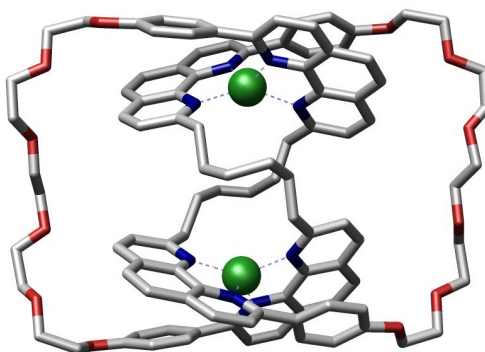


Jos nyt A suorittaa toiminnonsa DNA:han, jonka solmutyyppi on  $\mathcal{K}$ , niin lopputuloksena on  $\mathcal{K}$ , mutta jos B suorittaa omansa, niin tuloksena on  $\mathcal{K}$ . Huomaa, että tulokset eivät riipu siitä, mihin kolmesta risteyksestä entsyymi tekee muodonmuutoksen. Oleellista tässä on se, että entsyymi A ei muuta komponenttien (syklisten molekyylien) lukumäärää, mutta B kasvattaa sitä.

Tämä on tietenkin vain kuvaileva esimerkki, todellisuudessa asiat ovat monimutkaisempia.

Proteiinitkin voivat olla syklisiä ja niiden aktiivisuus voi riippua niiden solmuttumisesta.

Myös pienemmät molekyylit voivat asettua solmuihin.



KUVA 2. Molekulaarisen apilasolmun kristallirakenne. Tämä molekyyli ei ole ekvivalentti peilikuvansa kanssa. Kuvan lähde: wikipedia, GNU-lisenssi. Ensimmäinen dokumentti onnistuneesta molekyyლისynteesistä ilmestyi 1989 artikkelissa [16].

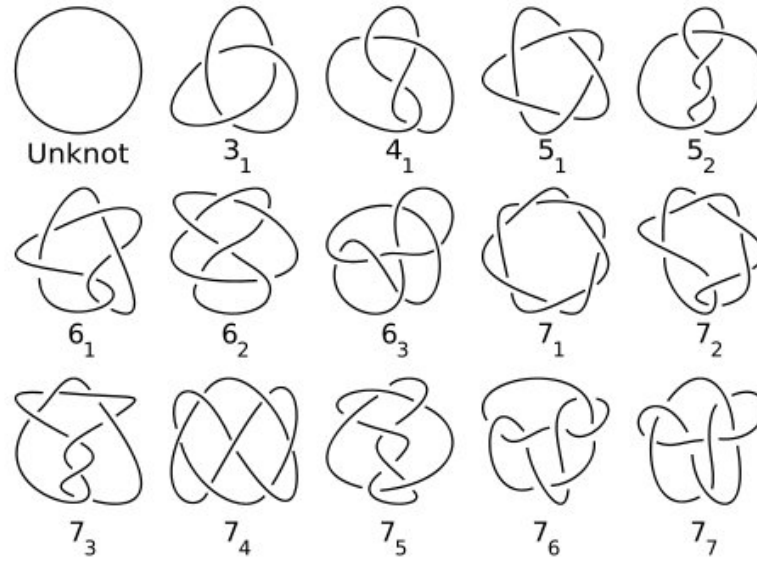
Lisää solmuteoriasta ja DNA:sta kirjassa [5] ja artikkeleissa [19], [20] ja [4].

Vaikka atomit eivät olekaan solmuja, niin kuin Lord Kelvin ehdotti, vuonna 1985 löydetty Jonesin polynomi toi solmut uudelleen fysiikan yhteyteen, kun löydettiin selkeitä yhtäläisyyksiä kvanttiteoriaan, statistisen fysiikan perusyhtälöihin, kvanttikenttäteoriaan ja kvanttigravitaatioon. Lisää tästä aiheesta ja muista solmuteorian sovelluksista kirjoissa [9] ja [10].

## I.4. Epäformaali tutustuminen.

### I.4.1. Kaaviot.

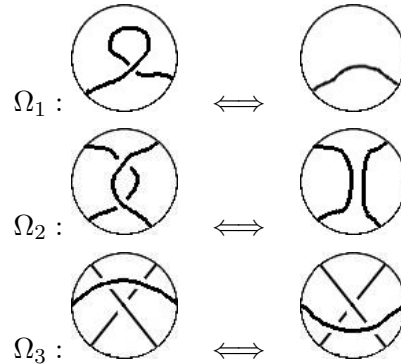
Kuten yllä olevista kuvista voi nähdä, solmut ovat matemaattisesti suljettuja käyriä avaruudessa. Täsmällisesti solmut määritellään upotuksina  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Selvästi, jos piirrämme solmun kuvan paperille samaan tapaan kuin yllä, voimme helposti konstruoida upotuksen, jonka projektio tasolle on tämä piirustus (tarkkaan ottaen ylimenokohtien lisäinformaatiota vaille). Myöhemmin todistamme myös, että jokainen *tarpeeksi siisti* upotus voidaan aina



KUVA 3. Joitakin solmuja.

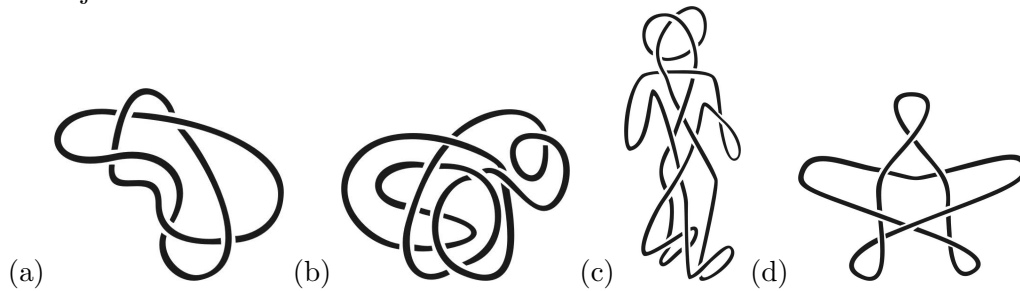
projisoida jollekin tasolle sillä tavalla, että ylimenokohtia on äärellisesti eikä muita singulariteettejä ole. Tämä antaa mahdollisuuden tutkia upotuksia niiden kaavioiden (kaksiulotteisten kuvien) avulla. Tällainen lähestymistapa on ollut suuri menestys solmuteorias- sa, mutta monia asioita on melkein mahdotonta ymmärtää vetoamatta kolmiulotteiseen – ja joskus neliulotteiseenkin – topologiaan. Tämä on ymmärrettävää, sillä todellisuudessa solmut ovat kolmiulotteisia objekteja. Kuvassa 3 on joitakin (suhteellisen) yksinkertaisia solmuja. Jokaisen solmun kohdalla on luku ja sen alaindeksi, esimerkiksi  $5_2$ . Tässä luku 5 tarkoittaa sitä, että kyseistä solmua ei voi esittää kaaviona, jossa on vähemmän kuin 5 risteystä. Alaindeksi vain tarkoittaa, että kyseinen solmu on toinen tällaisista solmuista – järjestys on vain sopimuskysymys. Solmuja siis luokitellaan niiden ristiinmenoluvun (kaavion minimaalinen ristiinmenoluku) mukaan.

Kurt Reidemeister todisti [15], että solmukaavio saadaan toisesta kaaviosta lokaaleilla muutoksilla muotoa



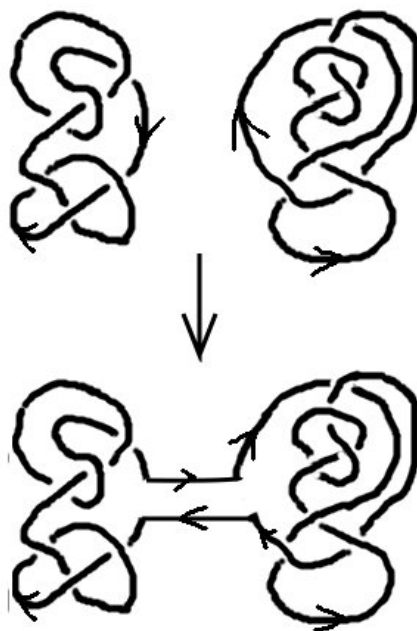
jos ja vain jos vastaavat solmut ovat topologisesti ekvivalentteja. Tämä lause antaa tehokkaan tavan määrittellä solmuinvariantteja suoraan kaavioista: pitää tarkistaa, että invariantti säilyy näitä kolmea liikettä tehtäessä.

**I.2. TEHTÄVÄ.** Tämä tehtävä on otettu psykologian valintakokeesta 2007. Etsi alla olevia solmuja a–d vastaavat solmut kuvan 3 taulukosta .



#### I.4.2. Topologista solmuteoriaa.

Solmuteoria on luonteeltaan ennen kaikkea topologista: tutkimuskohteena ovat suljetut käyrät avaruudessa tietyn tyyppistä jatkuvaa ekvivalenssia vaille. Joidenkin asioiden todistamiseksi solmuteoriassa jopa välttämätöntä (nykyhetken tietämyksen puitteissa) käyttää topologisia keinoja. Tästä on esimerkkinä solmujen yksikäsitteinen esittäminen alkusolmujen tulona ja toisaalta sen todistaminen, että solmuilla ei ole käännteissolmuja, eli kahden epätriviaalin solmun kompositio ei voi olla triviaalisolmu . Solmujen tulolla tarkoitetaan seuraavaa. Olkoon annettu kaksi solmua  $k_1: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ja  $k_2: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , ja oletetaan, että ne sijaitsevat erillisissä palloissa: on olemassa  $x \in \mathbb{R}^3$  ja  $r \in \mathbb{R}_+$  siten että  $k_1 S^1 \subset B(x, r)$  ja  $k_2 S^1 \subset \mathbb{R}^3 \setminus B(x, r)$ . Valitaan nyt molempien solmujen kuvajoukosta pisteet  $x_1 \in k_1 S^1$



KUVA 4. Solmujen kompositio

ja  $x_2 \in k_2 S^1$ , jotka voi yhdistää janalla solmujen komplementissa. Sen jälkeen katkaistaan molemmat solmut näistä pisteistä ja yhdistetään vapaat päät yhteen kahdella janalla. Kuvassa 4 on esitetty mitä tällä pyritään tarkoittamaan.

Alkusolmu on puolestaan solmu, jota *ei voi* esittää kahden epätriviaalin solmun tulona, toisin sanoin pallon pintaa on mahdoton upottaa  $\mathbb{R}^3$ :n alkusolmun perään niin, että se leikkaisi solmua täsmälleen kahdessa pisteessä niin, ettei solmu olisi suoristuva pinnan sisä- eikä ulkopuolella.

Toinen havainto, joka tulee solmujen ekvivalenssin määritelmästä on se, että ekvivalenttien solmujen komplementit ovat keskenään homeomorfiset. Solmun komplementti on siis topologisena avaruutena solmuinvariantti. Huomattavaa on, että vaikka solmut ovat keskenään kaikki homeomorfiset (ne ovat kaikki  $S^1$ :n homeomorfiset kuvat), niin niiden komplementit ovat kuitenkin aika harvoin homeomorfiset. Tästä seuraa, että on hyödyllistä tarkastella esimerkiksi solmun komplementin perusryhmää (ensimmäinen homologiaryhmä sen sijaan on hyödytön: se on aina  $\mathbb{Z}$ ). Seuraavaksi vähän lämmittelytehtäviä.

**I.3. TEHTÄVÄ.** Laske triviaalisolmun komplementin  $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$  perusryhmä. *Vihje: Vastaus on  $\mathbb{Z}$ . Lisää vihjettä alaviitteessä.*<sup>2</sup>

**I.4. TEHTÄVÄ.** Olkoon  $G$  ryhmä. Sen vaihdannaistaja-aliryhmä on

$$G' = [G, G] = \langle \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G\} \rangle,$$

eli alkioiden muotoa  $xyx^{-1}y^{-1}$  virittämä aliryhmä. Osoita, että  $G'$  on  $G$ :n normaali aliryhmä ja että jos  $H \subset G$  on normaali, niin  $G/H$  on abelin ryhmä jos ja vain jos  $G' \subset H$ .

**I.1. MÄÄRITELMÄ.** Ryhmän  $G$  abelianisaatio on  $G/G'$ .

**I.5. TEHTÄVÄ.** Olkoon  $X = S^1 \vee S^1$  kaksi yksikköympytää, jotka ovat liimattu yhdestä pisteestä. Mikä on  $\pi_1(X)$ ? Entä sen abelianisaatio?

---

<sup>2</sup>Kokeile käyttää tietoa, että  $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$  on homotopiaekvivalentti toruksen kanssa, jonka yksi reikä on liimattu kiinni. Seifert-van Kampen lauseesta voi olla hyötyä.

## II Solmut ja niiden ekvivalenssi.

Yleinen ongelma: kun on annettu topologiset avaruudet  $X$  ja  $Y$  siten että  $X$  voidaan upottaa avaruuteen  $Y$ , luokittele kaikki tavat miten  $X$  voidaan upottaa avaruuteen  $Y$ . Tapaus  $X = S^1$  ja  $Y = S^3$  on klassista solmuteoriaa. Myös yleisempiä tapauksia on tutkittu. Esimerkiksi  $X$  on  $(n - 2)$ -monisto ja  $Y = S^n$  [14]. Huomattavaa on se, että jos  $k < n - 2$ , niin  $S^k$  ei voi olla solmussa avaruudessa  $S^n$ , eli upotuksia on oleellisesti vain yksi mahdollinen. Myös tapauksessa  $X = S^1$  ja  $Y = S^2$  on vain oleellisesti yksi tapa upottaa  $X$  avaruuteen  $Y$  (seuraus Jordanin käyrälauseesta). Sama pätee tapauksessa  $X = S^2$  ja  $Y = S^3$  jos oletetaan, että upotus on sileä tai paloittain lineaarinen (Alexander-Schönflies lause). Mitä tarkoittaa *oleellisesti sama upotus* selviää myöhemmin.

**II.1. MÄÄRITELMÄ.** *Solmu* on upotus  $k: S^1 \rightarrow S^3$  (eli  $k: S^1 \rightarrow kS^1$  on homeomorfismi). *Punos* on upotus  $l: \bigcup_{i=0}^n S^1 \times \{i\} \rightarrow S^3$ .

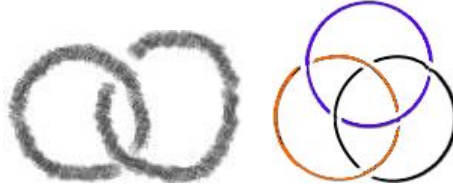
**II.2. HUOMAUTUS.** Yllä olevassa määritelmässä  $S^3$  voidaan korvata avaruudella  $\mathbb{R}^3$ . Sillä ei ymmärrettävästi ole suurta vaikutusta yleiseen teoriaan. Oletetaan nimittäin, että  $k: S^1 \rightarrow S^3$  on upotus, se ei voi olla surjektio, koska maali- ja lähtöavaruus olisivat silloin homeomorfiset, joten löytyy  $p \in S^3$  joka ei ole kuvajoukossa. Otetaan homeomorfismi  $h: S^3 \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , jonka jälkeen  $h \circ k: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  on alkuperäistä vastaava solmu  $\mathbb{R}^3$ :ssa. Vastaavasti voidaan menetellä toiseen suuntaan ottamalla  $\mathbb{R}^3$ :n yhden pisteen kompaktifikaatio.

Huomataan myös, että solmu on punoksen erikoistapaus. Punoksen kuvajoukon yhtenäisiä komponentteja ja niitä vastaavia upotuksen rajoittumia kutsutaan punoksen komponenteiksi. Usein solmun kuvajoukkoa kutsutaan solmuksi ja punoksen kuvajoukkoa punokseksi. Yritetään välttää väärinkäsityksiä.

**II.3. ESIMERKKI.** Triviaalisolmu  $t: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  on inklusio: jos  $(x, y) \in S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ , niin  $t(x, y) = (x, y, 0)$ .

**II.4. ESIMERKKI.** Hopfin punos ja Borromeon renkaat ovat esimerkkejä kahden ja kolmen komponentin punoksista, katso kuva 5. Hopfin punos voidaan esittää kuvauksena  $h: S^1 \times \{0\} \cup S^1 \times \{1\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  esimerkiksi seuraavalla tavalla:

$$(x, y, 0) \mapsto (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$$



KUVA 5. Hopfin punos ja Borromeon renkaat.

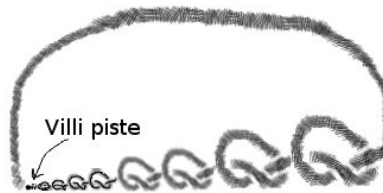
ja

$$(x, y, 1) \mapsto (0, y + 1, x) \in \mathbb{R}^3.$$

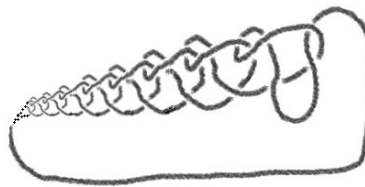
Määritelmä II.1 sallii myös niin kutsutut *villit* solmut – sellaiset, joilla on piste, jonka kaikissa ympäristöissä solmu on ”solmussa”. Kuva 6 valaisee asiaa.

Tällaisilla solmuilla voi olla omituisia ominaisuuksia. Esimerkiksi kuvassa 7 oleva solmu näyttää aukeavalta: ainakin äärellisen monta lenkkiä voi helposti avata. Kuitenkin artikkelissa [2] on osoitettu, että tämän solmun komplementti ei ole homeomorfinen triviaalin solmun komplementin kanssa.

Millon kaksi solmua ovat samat? Mikä olisi hyvä määritelmä kahden upotuksen ekvivalenssille? On selvää, että mitkä tahansa kaksi kuvausta  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ovat homotooppisia, sillä  $\mathbb{R}^3$  on yhdesti yhtenäinen. Myös solmujen kuvajoukot ovat keskenään homeomorfiset. Pitää siis vaatia jotain vahvempaa. Ensimmäiseksi tulee mieleen isotopia, eli homotopia,

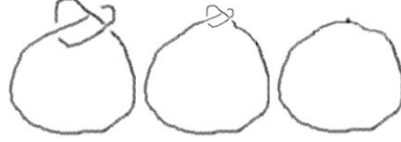


KUVA 6. Villi solmu.



KUVA 7. Epätriviaali villi solmu, jota voi avata äärellisen monta askelta.

joka on joka askeleella upotus. Mutta sekään ei kelpaa, koska silläkin voidaan mikä tahansa solmu muuttaa triviaaliksi solmuksi:



Määritellään kuitenkin isotopia, sillä määrittelemme solmujen ekvivalenssi juuri sen avulla.

**II.5. MÄÄRITELMÄ.** Upotukset  $f, g: X \rightarrow Y$  ovat *isotooppiset* jos on olemassa upotus

$$H: X \times I \rightarrow Y \times I$$

siten että  $H(x, t) = (h_t(x), t)$ ,  $h_0 = f$  ja  $h_1 = g$ . Upotusta  $H$  kutsutaan *isotopiaksi*.

**II.6. MÄÄRITELMÄ.** (Solmujen ekvivalenssi.) Kaksi solmua  $k, k': S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ovat *ekvivalentit* tai *ympäristöisotooppiset* (ambient isotopic) jos on olemassa homeomorfismi  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , joka on isotooppinen identtisen kuvauksen  $\text{id}_{\mathbb{R}^3}$  kanssa ja jolle pätee  $k' = h \circ k$ .

Toisin sanoin on olemassa sellainen isotopia

$$H: \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times I,$$

että  $H \upharpoonright \mathbb{R}^3 \times \{0\} = \text{id}_{\mathbb{R}^3} \times \{0\}$  ja  $k' = (H \upharpoonright \mathbb{R}^3 \times \{1\}) \circ k$ . Koska tässä isotopia on kahden saman avaruuden välillä (sekä lähtö, että maali ovat  $\mathbb{R}^3 \times I$ ) ja lisäksi  $H \upharpoonright \mathbb{R}^3 \times \{0\}$  ja  $H \upharpoonright \{1\}$ , niin on ekvivalenttia olettaa, että  $H$  on homeomorfismi (eikä upotus).

Ekvivalenssi määritellään täsmälleen samalla tavalla jos avaruuden  $\mathbb{R}^3$  tilalla on  $S^3$ . Tästä eteenpäin oletetaan, että lukija itse osaa tarpeen tullessa siirtää määritelmiä ja lauseita näiden tapauksien välillä.

**II.1. TEHTÄVÄ.** Osoita, että solmujen ekvivalenssi on ekvivalenssirelaatio.

Tällä kurssilla käsittelemme vain kesyjä solmuja, eli ei niitä, jotka ovat villedjä. Kesy solmu on sellainen, jonka jokaisella pisteellä on ympäristö, jossa solmu on suoristuva.

**II.7. MÄÄRITELMÄ.** Olkoon  $k$  solmu ja  $B \subset \mathbb{R}^3$  suljettu kuula, jonka reuna leikkaa solmun kuvaa täsmälleen kahdessa pisteessä,  $k[S^1] \cap \partial B = \{x_0, y_0\}$ . Sanotaan, että solmu  $k$  on *suoristuva* ympäristössä  $B$ , jos on olemassa sellainen isotopia

$$H: \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times I,$$

että  $H \upharpoonright \overline{\mathbb{R}^3 \setminus B} \times I = \text{id}_{\overline{\mathbb{R}^3 \setminus B} \times I}$  ja  $H \upharpoonright \mathbb{R}^3 \times \{1\} = k'$ , missä  $k(x) = k'(x)$  kaikilla

$$x \in S^1 \setminus k^{-1}B$$

ja  $k[S^1] \cap B = [x_0, y_0]$  on jana.

Kesy solmu voidaan määritellä usealla eri tavalla. Luonnollinen määritelmä on seuraava.

**II.8. MÄÄRITELMÄ.** Punos  $k$  on *lokaalisti suoristuva*, jos kaikilla  $x \in S^1$  pisteellä  $k(x)$  on ympäristö, jossa solmu on suoristuva.

Voidaan myös määritellä käyttämällä sileysominaisuuksia:

**II.9. MÄÄRITELMÄ.** Olkoon  $e: [0, 1] \rightarrow S^1$  kuvaus  $e: t \mapsto e^{2\pi it}$ . Kuvaus  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  on  $n$  kertaa jatkuvasti derivoituva jos yhdistetty kuvaus  $f \circ e$  on sitä tavallisessa mielessä.

Solmu  $k$  on *sileä immersio*, jos se on  $n$  kertaa jatkuvasti derivoituva kaikilla  $n$ . ja  $(k \circ e)'(t) > 0$  kaikilla  $t \in [0, 1]$ . Samoin määritellään punoksille.

Ja lopulta se voidaan määritellä murtoviivana:

**II.10. MÄÄRITELMÄ.** Kuvaus  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  on *paloittain lineaarinen* jos sen kuvajoukko koostuu äärellisen monesta janasta

$$fS^1 = \bigcup_{k=0}^n P_k$$

ja jokaisella  $k$  rajoittuma  $f \upharpoonright (f^{-1}P_k)$  on affiini, eli muotoa

$$e^{2\pi it} \mapsto ta_k + b_k,$$

missä  $a_k, b_k \in \mathbb{R}^3$ .

Kappaleessa III tutustutaan paremmin paloittain lineaarisiin kuvauksiin.

**II.11. LAUSE.** *Olkoon  $k: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  solmu. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät.*

- (i)  $k$  on ekvivalentti lokaalisti suoristuvan solmun kanssa (määritelmät II.6 ja II.8).
- (ii)  $k$  on ekvivalentti paloittain lineaarisen solmun kanssa.
- (iii)  $k$  on ekvivalentti sileän solmun kanssa

Tämän todistamiseksi todistetaan ensin Alexander-Tietzen lause.

**II.12. LAUSE (Alexander-Tietze).** *Olkoon  $B = B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| \leq r\}$  kuula ja  $h: B \rightarrow B$  homeomorfismi, joka on identtinen kuvaus pallon reunalla. Tällöin  $h$  on iso-tooppinen identtisen kuvauksen kanssa  $\text{id}_B$  isotopiolla, joka pitää pallon reunan paikallaan:  $H \upharpoonright (\partial B \times I) = \text{id}_{\partial B \times I}$*

TODISTUS. Täytyy rakentaa isotopia  $H: B \times I \rightarrow B \times I$ . Määrillään se ensin reunalla

$$H(x, t) = \begin{cases} \text{id}_{\partial(B \times I)}, & \text{kun } x \in \partial B \text{ tai } t = 0. \\ (h(x), 1), & \text{kun } t = 1. \end{cases}$$

Tämä on jatkuva, koska oletettiin, että  $h$  pitää reunan paikallaan. Kiinnitetään piste  $P \in B \times \{0\}$  ja jatketaan  $H$  lineaarisesti jokaisella janalla  $[P, (x, t)]$ , missä  $(x, t) \in \partial(B \times I)$  ja  $t > 0$ . Toisin sanoen jos  $(x, t) \in B \times I$  ei ole reunalla, mutta sijaitsee janalla  $[P, (x_0, t_0)]$  ja  $(x_0, t_0)$  on avaruuden  $B \times I$  reunalla, niin määritellään

$$H(x, t) = P + \frac{|(x, t) - (P)|}{|(x_0, t_0) - (P)|} \cdot (H(x_0, t_0) - P),$$

Huomaa, että kaavasta tulee yksinkertaisempi jos  $B = B(0, 1)$  ja  $P = 0$ .  $\square$

Todistetaan vielä yksi lemma ennen lauseen II.11 todistamista.

**II.13. LEMMA.** *Olkoon  $B = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$  yksikkökiekko ja  $p \in \overset{\circ}{B}$ . Tällöin on olemassa homeomorfismi  $h: B \rightarrow B$  joka pitää reunan paikallaan  $h \upharpoonright \partial B = \text{id}_{\partial B}$  ja  $h(p) = 0$ .*

TODISTUS. Tässä käytetään samantyyppistä lineaarista jatkamista kuin edellisessä tehtävässä. Määritellään ensin  $h(p) = 0$  ja  $h(x) = x$ , kun  $x \in \partial B$ . Sitten jos  $x$  on mikä tahansa muu piste, niin on olemassa yksikäsitteinen piste  $y \in \partial B$  siten että  $x$  sijaitsee janalla  $[y, p]$ . Määritellään

$$h(x) = \frac{|x - p|}{|y - p|} y.$$

$\square$

**II.2. TEHTÄVÄ.** Osoita, että lemmän II.13 todistuksessa määritelty  $h$  todella on homeomorfismi.

**II.3. TEHTÄVÄ.** Olkoon  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x) = (y(x), z(x))$ , jatkuva funktio siten että kaikilla  $x \in (-1, 1)$ ,  $|(x, y(x), z(x))| < r$  ja  $f(-1) = f(1) = (0, 0)$ . Osoita, että on olemassa kuulan  $\bar{B}(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq r\}$  homeomorfismi  $h$  itselleen, joka pitää reunan paikallaan, eli  $h \upharpoonright \partial B = \text{id}_{\partial B}$ , ja jolle pätee  $h(x, y(x), z(x)) = (x, 0, 0)$ . *Vihje alaviitteessä.*<sup>1</sup>

Nyt voidaan todistaa lause II.11.

LAUSEEN II.11 TODISTUS. (i)  $\Rightarrow$  (ii) : Oletetaan, että  $k$  on lokaalisti suoristuva. Valitaan jokaiselle pisteelle  $x$  ympäristö  $B_x$ , jossa solmu on suoristuva. Nyt  $\{B_x \mid x \in kS^1\}$  on solmun peite ja sillä on kompaktisuuden nojalla äärellinen osapeite  $\{B_x \mid x \in \{x_0, \dots, x_n\}\}$ . Fakta: jos solmu on suoristuva ympäristössä  $B(x, a)$  ja  $B(y, b) \subset B(x, a)$ , niin solmu on suoristuva

<sup>1</sup>Sovella lemmaa II.13 kiekkoon  $B(0, 1) \cap \{(x, y, z) \mid x = c\}$  jokaisella  $c \in [-1, 1]$ .

ympäristössä  $B(y, b)$ . Suoristetaan solmu ympäristössä  $B_{x_0}$ , sen jälkeen ympäristössä  $B_{x_1} \setminus \overline{B_{x_0}}$ , sitten ympäristössä  $B_{x_2} \setminus \overline{B_{x_1} \cup B_{x_0}}$  ja niin edelleen. Lopulta saadaan p.l.-solmu

(ii)  $\rightarrow$  (iii). Oletetaan, että solmu on p.l. Käyttämällä affineja siirtoja kuten yllä, on riittävä osoittaa, että funktio  $f: t \mapsto (t, |t|, 0)$  voidaan korvata kuulassa  $B(0, 1)$  jatkuvasti derivoituvalla funktiolla, jonka derivaatta ei ole koskaan nollavektori. Tällainen funktio on esimerkiksi  $g: t \mapsto (t, \frac{1}{2}\sqrt{2}t^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}, 0)$ . Funktio  $f$  leikkaa kuulan  $B(0, 1)$  pisteissä  $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ . On helppo tarkistaa, että funktioiden  $f$  ja  $g$  arvot ja derivaattojen arvot yhtyvät näissä pisteissä. Lisäksi  $g$  on jatkuvasti derivoituva, eikä sen derivaatta  $(1, \sqrt{2}t, 0)$  ole koskaan nollavektori.

Samaan tapaan kuin tehtävässä II.3 voidaan näyttää, että tämä voidaan tehdä isotiopialla. Sivuumme kuitenkin taskan todistuksen.

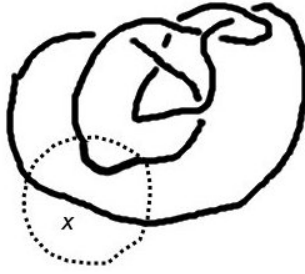
(iii)  $\Rightarrow$  (i) : Oletetaan, että solmu  $k: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  on jatkuvasti derivoituva ja että sen derivaattavektorin itseisarvo on aina positiivinen. Määritelmän mukaan tämä tarkoittaa sitä, että  $k \circ e$  on derivoituva (katso määritelmää II.8). Koska derivaatta on jatkuva kompaktissa joukossa ja sen itseisarvo on aina positiivinen, se saavuttaa miniminsä, joka on positiivinen. Merkitään sitä  $m = \min\{|(k \circ e)'(t)| \mid t \in I\} > 0$ . Määritellään funktio  $h: I \rightarrow \mathbb{R}$  siten että  $h(t)$  on vektoreiden  $(k \circ e)'(t)$  ja  $(1, 0, 0)$  välinen kulma.

Väite:  $h$  on jatkuva. Perustelu. Olkoon  $\varepsilon > 0$ . Koska funktio  $(e \circ k)'$  on tasaisesti jatkuva (kompakti lähtöjoukko), löytyy sellainen  $\delta$ , että  $|(e \circ k)'(t_0) - (e \circ k)'(t_1)| < m \sin(\varepsilon/2)$ , kun  $|t_0 - t_1| < \delta$ . Tällöin (katso kuva 9) vektoreiden  $(e \circ k)'(t_0)$  ja  $(e \circ k)'(t_1)$  väliseksi kulmaksi tulee pienempi kuin  $\varepsilon$ , kun  $|t_0 - t_1| < \delta$ .

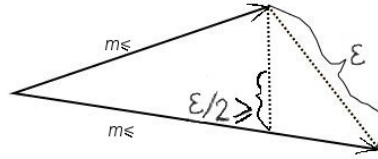
Lähtöjoukko on jälleen kompakti, joten  $h$  on tasaisesti jatkuva. Valitaan  $x_0$  ja  $t_0$  siten että  $(k \circ e)(t_0) = x_0$ . Nyt löytyy sellainen  $\delta_0 > 0$  että jos  $|t - t_0| < \delta_0$ , niin  $|h(t) - h(t_0)| < \pi/4$ . Nyt kuitenkin pisteen  $x_0$   $\delta_0$ -ympäristö  $B(x_0, \delta_0)$  saattaa leikata muitakin solmun kohtia kuin missä  $x_0$  on, kuten on esitelty kuvassa 8. Me haluamme kuitenkin sellainen pisteen  $x_0$  ympäristön, jonka leikkaus solmun kanssa on yhtenäinen. Olkoon  $V$  sellainen pisteen  $t_0$  avoin ympäristö että  $(k \circ e)[V] \cap B(x_0, \delta_0)$  on yhtenäinen (Tämä löytyy, koska  $k^{-1}B(x_0, \delta_0)$  on avoin  $S^1$ :n osajoukko. Valitaan siitä joku polkukomponentti. Se on avoin ja sen kuva on yhtenäinen kuulassa  $B(x_0, \delta_0)$ ).

Määritellään uusi funktio  $u: I \rightarrow \mathbb{R}$  siten että  $u(t) = |(k \circ e)(t) - x_0|$ . Nyt joukossa  $I \setminus V$  tällä funktiolla on minimi. Asetetaan  $\delta_1 = \min\{u(t) \mid t \in I \setminus V\}$  ja  $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$ . Nyt  $B(x_0, \delta)$  on sellainen  $x_0$ :n ympäristö, jossa

- solmu on yhtenäinen ja jossa solmun tangentin vaihekulma muuttuu korkeintaan  $\pi/4$  astetta.



KUVA 8. Esimerkkikuva.



KUVA 9. Esimerkkikuva.

Nyt riittää osoittaa, että tässä ympäristössä  $B(x_0, \delta)$  solmu voidaan suoristaa. Oletetaan, että kuula sattuu olemaan  $x_0 = 0$  ja  $\delta = 1$  (tilannetta voidaan affiinilla siirrolla muokata tällaiseksi). Oletetaan myös, että kaksi pistettä joissa solmu leikkaa tämän kuulan reunan ovat  $(-1, 0, 0)$  ja  $(1, 0, 0)$ .

Se, että käyrän vaihekulma muuttuu korkeintaan  $\pi/4$  verran johtaa siihen, että jokaisella  $x \in [-1, 1]$  on olemassa yksikäsitteiset  $y(x)$  ja  $z(x)$  siten että tämä käyrä kulkee pisteen  $(x, y(x), z(x))$  kautta. Nyt tehtävän II.3 nojalla on olemassa kuulan  $B(0, 1)$  homeomorfismi joka vie käyrän  $(x, y(x), z(x))$  janalle  $(x, 0, 0)$ ,  $-1 < x < 1$ . Alexander-Tietze lause (lause III.1) antaa meille isotopian tämän homeomorfismin ja identtisen kuvauksen välille.  $\square$

Lause II.11 antaa meille mahdollisuuden tarkastella pelkästään paloittain lineaarisia kuvauksia ja olettaa oikeastaan kaikista objekteista, että ne ovat paloittain lineaarisia.

Kuitenkin vielä ennen kuin siirrytään seuraavaan aiheeseen tutkitaan hieman kaavioita.

**II.14. MÄÄRITELMÄ.** Olkoon  $k: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  (p.l.) solmu. Olkoon  $P \subset \mathbb{R}^3$  taso ja  $\text{pr}: \mathbb{R}^3 \rightarrow P$  ortogonaalinen projektio tälle tasolle. Sanotaan, että solmun projektio  $\text{pr} \circ k$  on *säännöllinen* jos seuraavat ehdot toteutuvat

- Kuvauksella  $\text{pr} \circ k$  äärellisen monta singulariteettia (eli sellaista pistettä maalijoukossa, joiden alkukuva ei ole yksikäsitteinen).

- Jokainen singulariteetti on tuplapiste (siinä täsmälleen kaksi pistettä kuvautuu yhdeksi).
- Singlariteettejä ei ole solmun kulmapisteissä.

Säännöllistä solmun (tai punoksen) projektiota kutsutaan solmun *varjoksi*.

*Solmukaavio* on solmun varjo sellaiselle tasolle  $P$ , joka ei leikkaa solmua ja jonka singulariteetteihin on lisätty informaatio siitä, kumpi kahdesta pisteestä on kauempana  $P$ :stä.

**II.15. LAUSE.** *Jokainen kesy solmu voidaan esittää solmukaaviona ja jokainen punos punoskaaviona.*

TODISTUS. Olkoon  $k: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  p.l.-solmu. Jokaista pistettä  $s \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$  vastaa sen normaalitaso  $P_s = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \cdot s = 0\}$ . Osoitetaan että

$$A = \{s \in S^2 \mid \text{solmun projektio tasolle } P_s \text{ ei ole säännöllinen}\}$$

on äärellinen yhdiste suljetuista kaarista, eli nollamittainen.

Jos projektio ei ole säännöllinen, täytyy jonkun kolmesta säännöllisyys ehdosta rikkoutua. Oletetaan, että projektiossa on äärettömästi singulariteettejä. Koska janapareja on solmussa äärellisesti, tarkoittaa tämä sitä, että voidaan valita kaksi janaa, jotka kuvautuvat päälekkäin pidemmän matkaa, eli ne projisoituvat samalle suoralle ja niiden projektiot leikkaavat. Nyt väistämättä toisen janan kulmapiste kuvautuu toisen janan projektiolle.

Riittää siis tarkastella tapausta, jossa kulma kuvautuu toiselle janalle ja tapausta, jossa kolme tai useampi pistettä kuvautuvat samalle.

Osoitetaan, että joukko

$$S_0 = \{s \in S^2 \mid \text{kulmapiste kuvautuu janalle, projektiotason ollessa } P_s\}.$$

on yhdiste janojen projektiosta pallon pinnalle. Oletetaan ensin, että  $x \neq a$  ja  $x \neq b$ . Määritellään funktiot  $\alpha_0^\pm: [a, b] \rightarrow S^2$  näin: jos  $y \in [a, b]$ , niin

$$\alpha_0^+(y) = \frac{x-y}{|x-y|} \text{ ja } \alpha_0^- = -\alpha_0^+.$$

Koska  $\alpha_0^\pm(y)$  on riippumatta pisteestä  $y$  pisteiden  $y, a, b$  virittämän tason suuntainen, sisältyvät funktioiden  $\alpha_0^\pm$  kuvat yhteen isoympyrään. Koska nämä kuvaukset ovat lisäksi jatkuvia, nämä kuvat ovat yhtenäisiä, eli muodostuvat janojen projektiosta pallon pinnalle  $S^2$ . Selvästi myös jos  $s$  ei ole funktioiden  $\alpha_0^\pm$  jommassa kummassa kuvajoukossa, niin  $x$  ei projisoidu janan  $[a, b]$  projektiolle projisoidessa tasolle  $P_s$ .

Oletetaan, että  $[x, y]$  ja  $[a, b]$  ovat janoja ja  $x = a$ . Mutta nyt jos  $x$  projisoituu janalle  $[a, b]$ , tarkoittaa se sitä, että  $b$  projisoituu janalle  $[x, y]$  ja  $y \neq b \neq x$ , eli tämä tapaus

palautuu edelliseen. Koska pareja (kärkipiste, jana) on p.l.-solmussa äärellisen monta, on  $S_0$  äärellinen yhdiste suljetuista isoympyröiden osajoukoista (kaarista).

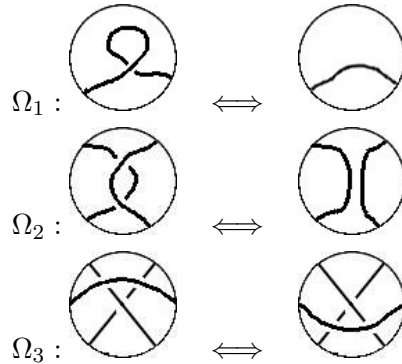
Tarkastellaan seuraavaksi joukkoa

$$\{s \in S^2 \mid \text{kolmen janan projektiot tasolle } P_s \text{ leikkaavat yhdessä pisteessä}\}.$$

Jos joidenkin kahden näistä janoista (olkoon ne  $[a, b]$ ,  $[c, d]$  ja  $[e, f]$ ) projektiot ovat samansuuntaiset, niin ongelma palautuu aikaisempaan. Oletetaan, että janojen projektiot ovat erisuuntaiset (silloin myös itse janat ovat keskenään erisuuntaiset). Koska janojen projektiot kuitenkin leikkaavat, eivät mitkään kaksi niistä voi olla keskenään samassa tasossa eivätkä peräkkäisiä janoja solmussa, sillä muuten niiden projektiot leikkaisivat kulmapisteessä ja tämä jälleen palautuu edelliseen tapaukseen.

Jos  $x, y, z \in \mathbb{R}^3$  ovat s.e.  $x - y, x - z$  ovat lineaarisesti riippumattomia, niin merkitään pisteiden  $x, y$  kautta kulkevaa suoraa  $L_{xy}$  ja pisteiden  $x, y, z$  kautta kulkevaa tasoa  $T_{xyz}$ . Määritellään kuvaus  $\alpha_1: [a, b] \rightarrow S^2$  seuraavasti. Olkoon  $x \in [a, b]$ . Vektorit  $c - x, d - x$  ovat lineaarisesti riippumattomia. Koska  $[e, f]$  ei ole tasossa  $T_{xcd}$  (muuten se olisi samassa tasossa  $[c, d]$ :n kanssa), suora  $S_{ef}$  leikkaa tason  $T_{xcd}$  täsmälleen yhdessä pisteessä; olkoon tämä piste  $y$ . Piste  $x$  määrää siis yksikäsitteisen suoran  $S_{xy}$ , joka kulkee sekä suoran  $S_{ef}$  että suoran  $S_{cd}$  kautta. Olkoon  $\alpha(x)$  tämän suoran suuntavektori  $\frac{x-y}{|x-y|}$ . Näin saadaan kaari  $S^2$ :n pinnalle, nimittäin kuvaus  $\alpha$  on jatkuva injektio ja sen lähtöjoukko on homeomorfinen yksikkövälillä kanssa. Injektiivisyys seuraa siitä, että kahta eri pistettä  $x, x' \in [a, b]$  vastaavat tasot  $T_{xcd}$  ja  $T_{x'cd}$  ovat eri, sillä muuten  $[a, b]$  ja  $[c, d]$  olisivat samassa tasossa.  $\square$

**II.16. MÄÄRITELMÄ** (Reidemeister [15]). Olkoon  $D$  solmu- tai punoskaavio. Sanomme, että kaavio  $D'$  on saatu kaaviosta  $D$  *Reidemeisterin siirroilla*, jos kaaviot yhtyvät muuten (ovat täsmälleen samat) paitsi yhden kiekon sisällä ja tämän kiekon sisällä on tapahtunut yksi seuraavista muutoksista:



Sanomme, että solmukaaviot  $D$  ja  $D'$  ovat *Reidemeister-ekvivalentteja*, jos toinen on saatu toisesta soveltamalla äärellisen monta kertaa siirtoja  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  ja  $\Omega_3$ .

**II.4. TEHTÄVÄ.** Osoita, että relaatio  $D$  on *Reidemeister-ekvivalentti*  $D'$ :n kanssa on ekvivalenssirelaatio kaavioiden luokassa.

## III Paloittain lineaarinen kategoria.

### III.1. Simplisiaaliset kompleksit.

**III.1. MÄÄRITELMÄ.** Joukko  $\mathcal{K}$  on *abstrakti simplisiaalinen kompleksi* jos  $\mathcal{K}$  on kokoelma äärellisiä joukkoja siten että jos  $S \in \mathcal{K}$  ja  $A \subset S$ , niin  $A \in \mathcal{K}$ . Yhtä tällaista joukkoa  $S$  kutsutaan kompleksin  $\mathcal{K}$  *simpleksiksi*. Jos  $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$  on myös simplisiaalinen kompleksi, niin sanotaan sitä *alikompleksiksi*.

Simplisiaalisen kompleksin  $\mathcal{K}$  *dimensio* on suurimman joukon  $A \in \mathcal{K}$  koko. Jos suurinta ei ole, dimensio on  $\infty$ . Jos simplisiaalisen kompleksin dimensio on  $n$ , kutsutaan sitä lyhyesti *n-kompleksiksi*.

**III.2. MÄÄRITELMÄ.** *Geometrinen n-simpleksi* on joukon

$$\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1} \mid x_1 + \dots + x_{n+1} = 1\}$$

affiini kuva. Simpleksin

$$\Delta: \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1} \mid x_1 + \dots + x_{n+1} = 1\} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

*sivu* on  $n - k$ -simpleksi ( $k \leq n$ )

$$\Delta^i = \Delta \upharpoonright \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1} \mid x_1 + \dots + x_{n+1} = 1 \ \& \ x_{n_1} = \dots = x_{n_k} = 0\},$$

missä  $\{n_i \mid 1 \leq i \leq k\}$  on  $k$  kokoinen osajoukko joukosta  $\{1, 2, \dots, n\}$ , eli  $k$  kappaletta koordinaatteja laitetaan nolaksi. Helposti nähdään, että sivu on myös simpleksi.

*Geometrinen simplisiaalinen kompleksi*  $\mathcal{G}$  on joukko simpleksejä avaruudessa  $\mathbb{R}^n$

$$\{\Delta_i \mid i \in A\},$$

missä  $A$  on numeroituva (mahdollisesti äärellinen) ja

- (1) jos  $\Delta_i, \Delta_j \in \mathcal{G}$ , niin  $\Delta_i \cap \Delta_j$  on joko tyhjä tai simpleksien  $\Delta_i$  ja  $\Delta_j$  yhteinen sivu,
- (2) jos  $\Delta_i \in \mathcal{G}$  ja  $\Delta$  on simpleksin  $\Delta_i$  sivu, niin  $\Delta \in \mathcal{G}$ .
- (3) jokainen kuula  $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$  leikkaa vain äärellisen monta simpleksiä.

Dimensio määritellään vastaavasti kuin abstratkilla simplisiaalisella kompleksilla: geometrisen simplisiaalisen kompleksin  $\mathcal{G}$  dimensio on suurin  $n$ , jolla  $n$ -simpleksi esiintyy  $\mathcal{G}$ :ssä

Geometrisestä simplisiaalisesta kompleksista  $\mathcal{G}$  saadaan abstrakti simplisiaalinen kompleksi seuraavasti:

$$\mathcal{K} = \{S \mid S \text{ on simpleksin } \Delta \text{ 0-sivujen joukko jollakin } \Delta \in \mathcal{G}\}.$$

Tällöin sanotaan, että  $\mathcal{G}$  on  $\mathcal{K}$ :n *reaalisatio* ja  $\mathcal{G}$  on topologisen avaruuden  $\bigcup \mathcal{G}$  *triangulaatio*. Sanotaan, että  $X$  on *trianguloitava*, jos se on homeomorfinen jonkun avaruuden kanssa, joka on muotoa  $\bigcup \mathcal{G}$ . Tietysti samalla avaruudella voi olla monta erilaista triangulaatiota.

**III.3. MÄÄRITELMÄ.** Geometrinen simplisiaalinen kompleksi  $\mathcal{G}$  on geometrisen simplisiaalisen kompleksin  $\mathcal{G}'$  *hienonnus*, jos jokainen  $n$ -simpleksi  $s \in \mathcal{G}'$  on yhdiste  $n$ -simplekseistä  $s_0, \dots, s_n \in \mathcal{G}'$ ,  $s = s_0 \cup \dots \cup s_n$ , ja  $\bigcup \mathcal{G} = \bigcup \mathcal{G}'$ .

**III.4. MÄÄRITELMÄ.** Olkoot  $\mathcal{G}$  ja  $\mathcal{G}'$  geometrisiä simplisiaalisia komplekseja. *Simplisiaalinen kuvaus* on sellainen kuvaus  $f: \bigcup \mathcal{G} \rightarrow \bigcup \mathcal{G}'$  geometrysten simplisiaalisten kompleksien  $\mathcal{G}$  ja  $\mathcal{G}'$  välillä, että jos  $\Delta \in \mathcal{G}$  on  $n$ -simpleksi, niin  $f \upharpoonright \Delta$  on affiini ja  $f\Delta$  on  $n$ -simpleksi  $\in \mathcal{G}'$ . Kuvaus  $f: \bigcup \mathcal{G} \rightarrow \bigcup \mathcal{G}'$  on paloittain lineaarinen (p.l.), jos se on simplisiaalinen kuvaus jostain  $\mathcal{G}$ :n hienonnuksesta johonkin  $\mathcal{G}'$ :n hienonnukseen.

**III.5. LAUSE.** *Olkoon  $\mathcal{G}$  geometrinen simplisiaalinen kompleksi siten että  $\bigcup \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ . Tällöin on olemassa avaruuden  $\mathbb{R}^n$  triangulaatio, jonka alikompleksina on  $\mathcal{G}$ :n hienonnus.*

**TODISTUS.** Induktiolla luvun  $n$  suhteen. Oletetaan, että  $n = 1$ . Kompleksin määritelmästä seuraa, että kompleksin  $\mathcal{G}$  0-simpleksit muodostavat diskreetin joukon. Jos tämä joukko on äärellinen tai alhaalta/ylhäältä rajoitettu, niin voidaan laajentaa sitä siten, että ne voidaan indeksöidä kokonaisluvuilla seuraavasti:

$$\dots \leq a_{-3} \leq a_{-2} \leq a_{-1} \leq a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots,$$

missä  $\{a_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  on 0-simpleksien joukko. Tällöin

$$\{[a_n, a_{n+1}] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

on avaruuden  $\mathbb{R}$  triangulaatio jossa on 1- ja 0-simpleksejä ja jokainen 1-simpleksi joko on myös  $\mathcal{G}$ :ssä tai leikkaa sitä vain päätepisteissään.

Olkoon väite todistettu, kun  $n = k$  ja todistetaan se tapauksessa  $n = k + 1$ . Jokaisesta  $\mathcal{G}$ :n  $m$ -simpleksiä ( $m < k + 1$ ) kohti lisätään  $\mathbb{R}^{k+1}$ :n hypertaso ( $\approx \mathbb{R}^k$ ), joka sisältää tämän simpleksin. Jokainen tällainen taso jakaa avaruuden  $\mathbb{R}^{k+1}$  kahteen konvekseen joukkoon – tason ”yläpuoli” ja ”alapuoli”. Konveksien joukkojen leikkaus on konvekksi, joten kun avaruudesta  $\mathbb{R}^{k+1}$  poistetaan nämä kaikki tasot, niin jäljelle jäävät yhtenäiset komponentit ovat konvekseja avoimia joukkoja. Trianguloidaan induktio-oletuksen avulla jokainen näistä tasoista siten että tasojen äärelliset leikkaukset tulevat myös trianguloiduiksi

ja muodostavat alikomplekseja. Tällöin mainittujen avoimien konveksien joukkojen reunat ovat  $k$ -komplekseja. Olkoon  $X \subset \mathbb{R}^{k+1}$  yksi tällainen konvekksi joukko, jonka reuna on  $k$ -kompleksi  $\mathcal{G}'$ . Tällöin  $X$ :n voi trianguloida valitsemalla  $P \in \overset{\circ}{X}$  ja asettamalla

$$\mathcal{G}'' = \mathcal{G}' \cup \{(P, a_1, \dots, a_{n-1}) \mid (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathcal{G}'\}.$$

Lopputuloksena on koko  $\mathbb{R}^{k+1}$ :n triangulaatio, joka sisältää alkuperäisen kompleksin hienonnuksen.  $\square$

**III.1. TEHTÄVÄ.** Etsi avaruuden  $S^3$  äärellinen triangulaatio.

**III.2. TEHTÄVÄ.** Etsi avaruuden  $\mathbb{R}^2$  triangulaatio, joka sisältää koordinaattisuorat alikomplekseina.

**III.3. TEHTÄVÄ.** Osoita, että jos avaruus on trianguloituva äärellisellä kompleksilla, niin se on kompakti.

**III.6. SEURAUUS.** *Olkoon  $\varepsilon > 0$ . Avaruudet  $S^3$ ,  $\mathbb{R}^3$  ja  $S^1$  ovat homeomorfisia sellaisten simpliittisten kompleksien kanssa, joiden simpleksien halkaisijat ovat pienempiä kuin  $\varepsilon$ .*  $\square$

**III.7. SEURAUUS.** *Jokainen kesy solmu voidaan esittää simplisiaalisena kuvauksena  $S^1 \rightarrow S^3$ , missä  $S^1$  ja  $S^3$  ovat esitetty sopivina simplisiaalisina komplekseina.*  $\square$

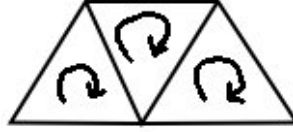
**III.8. MÄÄRITELMÄ.** Olkoon  $s$  2-simpleksi ja  $v_0, v_1, v_2$  sen kärjet. Simpleksin  $s$  suunnistus on bijektio  $o: \{v_0, v_1, v_2\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ . Kaksi suunnistusta  $o_1$  ja  $o_2$  ovat ekvivalentit, jos on olemassa sellainen syklinen permutaatio  $p: \{0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ , että  $o_1 = p \circ o_2$ . (Syklisiä permutaatioita on kolme: identtinen,  $(0, 1, 2) \mapsto (1, 2, 0)$  ja  $(0, 1, 2) \mapsto (2, 0, 1)$ ). Ei-ekvivalentteja suunnistuksia on siis kaksi kappaletta.

**III.9. MÄÄRITELMÄ.** Simplisiaalinen kompleksi on *kompakti  $n$ -monisto*, jos se on äärellinen ja sen jokainen  $(n - 1)$ -simpleksi on täsmälleen kahden  $n$ -simpleksin reuna. Se on *reunallinen (kompakti)  $n$ -monisto*, jos jokainen  $(n - 1)$ -simpleksi on täsmälleen yhden tai kahden  $n$ -simpleksin reuna. Kompakti 2-monisto on *suunnistuva*, jos sen 2-simplekseille voidaan valita sellaiset suunnistukset, että seuraava pätee: Jos  $s_1 = (v_0, v_1, v_2)$  ja  $s_2 = (v_1, v_2, v_3)$  ovat 2-simpleksejä, joilla on yhteinen reuna  $(v_1, v_2)$  ja  $o_1$  on simpleksin  $s_1$  suunnistus ja  $o_2$  simpleksin  $s_2$  suunnistus, niin täytyy päteä

$$o_1(v_2) - o_1(v_1) \equiv o_2(v_1) - o_2(v_2) \pmod{3}.$$

Toisin sanoen suunnistusten pitää täsmätä kuten kuvassa 10 on esitetty.

**III.10. ESIMERKKI.** Möbius-nauha ei ole suunnistuva, mutta  $S^2$  ja  $S^1 \times S^1$  ovat.



KUVA 10. Simpleksien koherentti suunnistus.

**III.11. MÄÄRITELMÄ.** Olkoon  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  simplisiaalinen homeomorfismi, missä  $\mathbb{R}^3$  on sekä lähtö- ja maalipuolella esitetty sopivina simplisiaalisina komplekseina. Olkoon  $s \subset \mathbb{R}^3$  lähtöpuolen triangulaation 3-simpleksi. Tiedämme, että  $h \upharpoonright s$  on affiini. Olkoon se muotoa  $Ax + b$ , missä  $A$  on  $3 \times 3$ -matriisi ja  $b \in \mathbb{R}^3$ . Sanomme, että  $h$  on *suunnansäilyttävä*, jos tämän matriisin determinantti on (kaikilla simplekseillä  $s$ ) positiivinen.

**III.12. LEMMA.** *Olkoon  $H: \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times I$  sellainen isotopia, että  $H \upharpoonright \mathbb{R}^3 \times \{0\}$  on suunnansäilyttävä homeomorfismi. Silloin myös  $H \upharpoonright \{1\}$  on.*

**TODISTUS.** Tarkastellaan mielivaltaista 3-simpleksiä  $s \subset \mathbb{R}^3$  ja olkoon  $A_t$  matriisi, joka vastaa affiinikuvausta  $H \upharpoonright s \times \{t\}$ . Tiedämme, että  $\det: \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva ja  $H$  on jatkuva, mistä seuraa, että  $t \mapsto A_t$  on jatkuva. Siispä  $t \mapsto \det A_t$  on jatkuva ja lisäksi tiedämme, että  $\det A_0 > 0$ . Jos nyt olisi  $\det A_1 < 0$ , niin Bolzanon lauseen nojalla pitäisi jollakin  $t$  olla  $\det A_t = 0$ . Tämä on kuitenkin ristiriita sen kanssa, että  $H \upharpoonright \mathbb{R}^3 \times \{t\}$  on homeomorfismi kaikilla  $t$ , sillä affiinikuvaus muotoa  $Ax + b$ , missä  $A$  on singulaarinen matriisi, ei ole injektio.  $\square$

Tässä vaiheessa voisimme muotoilla Alexanderin ja Tietzen lauseen uudestaan p.l.-kategoriassa. Nimittäin jos lauseessa  $B$  korvataan simplisiaalisena kompleksina, joka on homeomorfinen  $B$ :n kanssa, niin lauseen todistuksesta saadaan p.l.-isotopia.

**III.13. LEMMA.** *Olkoon  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  suunnansäilyttävä p.l.-homeomorfismi. Tällöin on olemassa identtisen kuvauksen kanssa p.l.-isotooppinen p.l.-homeomorfismi  $h': \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  siten että  $h' \circ h$  pitää yhden 3-simpleksin paikallaan. Toisin sanoen on olemassa sellainen 3-simpleksi  $s \subset \mathbb{R}^3$ , että  $(h' \circ h) \upharpoonright s = \text{id}_s$ .*

**TODISTUS.** Rakennamme ensin homeomorfismin  $h_0$ , sitten  $h_1$ ,  $h_2$  ja  $h_3$  niin että  $h' = h_3 \circ h_2 \circ h_1 \circ h_0$  on vaadittu homeomorfismi. Olkoon  $P_0 \in s \subset \mathbb{R}^3$  piste 3-simpleksin  $s$  sisuksessa. Tällöin on olemassa (polkuyhtenäisyyden takia) sellainen jono 3-simpleksejä  $s_0, \dots, s_n$ , että  $s = s_0$ ,  $h(P_0)$  on simpleksin  $s_n$  sisuksessa ja simplekseillä  $s_k$  ja  $s_{k+1}$  on yhteinen 2-sivu kaikilla  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ . Jos sattuu olemaan  $s_n = s$ , niin käyttämällä Alexander-Tietzen lausetta, äskeistä huomautusta ja lausetta seuraavaa lemmaa, löydämme isotopian, joka

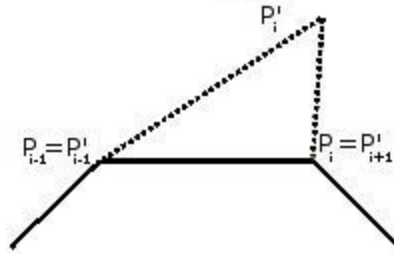
pitää simpleksin  $s$  ulkopuolen paikallaan ja siirtää pisteen  $h(P_0)$  pisteeseen  $P_0$ . Jos taas  $n = 1$ , niin  $s_0 \cup s_1$  muodostavat joukon, joka on homeomorfinen suljetun kuulan kanssa ja voimme siirtää pisteen sen sisällä näillä samoilla tiedoilla. Jos  $n = 2$ , niin siirretään ensin  $h(P_0)$  simpleksistä  $s_2$  simpleksiin  $s_1$  ja sitten sieltä simpleksiin  $s_0$ . Näin jatkamalla induktiolla saadaan väite kaikille  $n$ . Olkoon nyt  $h_0$  siis homeomorfismi, joka siirtää pisteen  $h(P_0)$  pisteeseen  $P_0$  ja joka on isotooppinen identtisen kuvauksen kanssa. Nyt  $h_0 \circ h$  on homeomorfismi, joka pitää pisteen  $P_0$  paikallaan.

Samantyyppistä argumenttia käyttäen löydetään identtisen kuvauksen kanssa isotooppinen homeomorfismi  $h_1$  niin, että kuvauksessa  $h_1 \circ h_0 \circ h$  pysyy 1-simpleksi  $(P_0, P_1)$  paikallaan ja lopulta  $h_2$  niin, että  $h_2 \circ h_1 \circ h_0 \circ h$  pitää 2-simpleksin paikallaan. Seuraavaksi pitää tehdä viimeinen ilmeinen askel, eli löytää sellainen  $h_3$ , että  $h_3 \circ h_2 \circ h_1 \circ h_0 \circ h$  pitää 2-simpleksin paikallaan; tässä tarvitaankin sitä oletusta, että alkuperäinen homeomorfismi oli suunnan säilyttävä. Edellisen lemmän nojalla myös  $h_0, h_1$  ja  $h_2$  ovat, eli kuvaus  $h_2 \circ h_1 \circ h_0 \circ h$  on suunnan säilyttävä myös. Olkoon  $s^2$  se 2-simpleksi, jonka  $h_2 \circ h_1 \circ h_0 \circ h$  pitää paikallaan ja  $s^3$  sellainen 3-simpleksi, jonka sivuna on  $s^2$ . Tällöin  $s^3$ :n se kärkipiste, joka ei ole  $s^2$ :n kärkipiste kuvautuu  $s^2$ :n määräämän tason samalle puolelle. Muuten  $s^3$ :n sisällä olevalla lineaarikuvauksella olisi yksi negatiivinen ja kaksi positiivista ominaisarvoa. Lineaarialgebrasta tiedämme, että silloin determinantti on negatiivinen. (Perustelu: Matriisin  $A$  ominaisarvot ovat polynomin  $\det(A - Ix)$  nollakohdat ( $I$  on yksikkömatriisi). Kun kyseessä on  $3 \times 3$ -matriisi, tästä tulee kolmannen asteen polynomi, jonka johtavan termin kerroin on  $-1$ , eli polynomin kuvaaja kulkee näin:  $\searrow \nearrow \searrow$ . Jos tällä polynomilla on kaksi positiivista ja yksi negatiivinen nollakohta, niin selvästi  $\det(A) = \det(A - I \cdot 0) < 0$ .)  $\square$

**III.14. MÄÄRITELMÄ.** (Kombinatorinen ekvivalenssi.) P.l.-solmu  $k$  on saatu  $\Delta^+$ -muunnoksella p.l.solmusta  $k'$  jos  $k$ :n virittävät  $P_0, \dots, P_n$ ,  $k'$ :n virittävät  $P'_0, \dots, P'_{n+1}$  ja on olemassa  $i$ ,  $0 < i < n$  (jos  $i = 0$  tai  $i = n$  voi muuttaa numerointia sopivasti) siten että

- $P_0 = P'_0, \dots, P_{i-1} = P'_{i-1}, P_i = P'_{i+1}, \dots, P_n = P'_{n+1}$ .
- Kolmion  $P'_{i-1}, P'_i, P'_{i+1}$  läpi ei mene yksikään solmun janoista.

Solmuun on siis lisätty yksi piste kahden pisteen  $P_{i-1}$  ja  $P_i$  välille ja muutettu solmun kulkua menemään sen pisteen kautta, katso kuva 11. Jos solmu  $k$  on saatu solmusta  $k'$   $\Delta^+$ -muunnoksella, niin sanotaan, että solmu  $k'$  on saatu solmusta  $k$   $\Delta^-$ -muunnoksella. Jos solmu on saatu toisesta jommalla kummalla muunnoksella, niin sanotaan, että se on saatu yksinkertaisesti  $\Delta$ -muunnoksella. Sanotaan kombinatorisia solmuja toistensa kanssa *kombinatorisesti ekvivalenteiksi* jos toinen on saatu toisesta äärellisellä määrällä  $\Delta$ -muunnoksia, eli on olemassa solmut  $k_0, k_1, \dots, k_{n-1}, k_n$  siten että  $k_0 = k$ ,  $k_n = k'$  ja  $k_{i+1}$  on saatu  $k_i$ :stä  $\Delta$ -muunnoksella.

KUVA 11.  $\Delta$ -muunnos.

**III.15. LAUSE (Reidemeister).** *Kesyleille solmuille  $K$  ja  $K'$  seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:*

- (1) *On olemassa suunnistuksen säilyttävä homeomorfismi  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  siten että  $h \circ K' = K$ .*
- (2)  *$K$  ja  $K'$  ovat ympäristöisotooppisia*
- (3)  *$K$  ja  $K'$  ovat kombinatorisesti ekvivalentteja*
- (4)  *$K$  ja  $K'$  ovat Reidemeister-ekvivalentteja.*

**TODISTUS.** Oletamme, että solmut ovat paloittain lineaarisia.

(1)  $\Rightarrow$  (2) : Ollaan  $S^3$ :ssa. Osoitetaan ensin, että  $h$  voidaan valita niin, että se pitää 3-simpleksin paikallaan. Sitten sen komplementissa voidaan käyttää Alexander-Tietzen lausetta.

(1)  $\Rightarrow$  (3) : Kuten edellä, osoitetaan, että  $h$  voidaan valita niin, että se pitää 3-simpleksin paikallaan. Sitten osoitetaan, että solmua voi siirtää  $\Delta$ -siirroilla tämän simpleksin sisälle. Nämä  $\Delta$ -siirrot muodostavat simplisiaalisen kompleksin  $\mathcal{K}$ . Tällöin  $h\mathcal{K}$  on simplisiaalinen kompleksi, joka vie (ajatellaan  $\Delta$ -siirtoja simpleksejä pitkin) solmun tämän 3-simpleksin sisältä solmulle  $K'$ .

(3)  $\Rightarrow$  (4) : Ensin täytyy osoittaa, että jos sama solmu projisoidaan kahdelle eri tasolle, niin nämä kaaviot ovat keskenään Reidemeister-ekvivalentteja. Tasot vastaavat (normaali-)vektoreita pallon  $S^2$  pinnalla. Olkoon annettu kaksi tällaista normaalivektoria. Valitaan niiden välinen polku, joka on yleisessä asemassa niihin janoihin nähden, joissa projektio ei ole säännöllinen. Kuljettaessa tätä polkua pitkin välillä mennään tällaisen ”kielletyn” janan yli. Helposti nähdään, että ne vastaavat jotain kolmesta Reidemeister-siirrosta. Hienontamalla solmua (lisäämällä murtoviivaan kulmia) ja hienontamalla  $\Delta$ -siirtoja, voidaan redusoida tilanne sellaiseksi, että solmukaaviossa yhden  $\Delta$ -siirron määräämän kolmion sisällä on aina yksi tai nolla risteystä ja tämä kolmio leikkaa korkeintaan. Tällaiset vastaavat.....

(2)  $\Rightarrow$  (1) : Olkoon  $H$  ympäristöisotopia. Tällöin  $H \upharpoonright \mathbb{R}^3 \times \{1\}$  on vaadittu homeomorfismi. Pitää todistaa, että se säilyttää suunnan.

(4)  $\Rightarrow$  (3) : (Melkein) selviö.

(3)  $\Rightarrow$  (1) : Lemma II.3...

□

## IV Solmuinvariantteja.

Olemme määritelleet milloin kaksi solmua ovat samat. Siispä sen todentamiseksi, että kuvaukset  $k: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ja  $k': S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  esittävät samaa solmua meidän täytyy löytää ympäristöisotopia niiden välillä, keksiä  $\mathbb{R}^3$ :n suunnan säilyttävä homeomorfismi joka vie toisen toiselle *tai* keksiä niiden projektiolle Reidemeister-vastaavuus tai joku muu ekvivalenteista tavoista.

Mutta emme ole vielä kehittäneet yhtäkään menetelmää sen todistamiseksi, että tällaista ekvivalenssia ei ole olemassa, eli  $k$  ja  $k'$  ovat eri solmuja.

**IV.1. MÄÄRITELMÄ.** Olkoon  $\mathcal{K}$  kaikkien upotusten  $f: S^1 \rightarrow S^3$  joukko. Funktio  $F: \mathcal{K} \rightarrow A$  on *isotopiainvariantti* tai *solmuinvariantti* jos kaikille keskenään ekvivalenteille solmuille  $k_0, k_1$  pätee  $F(k_0) = F(k_1)$ .

Kurssilla *Solmoteoriaa kombinatorisesti* tutustuimme kaavioiden Reidemeister-invariantteihin. Lauseen III.15 nojalla nämä invariantit ovat myös isotopiainvariantteja. Tällä kurssilla tutustumme solmujen ja punoksien topologisesti määriteltäviin invariantteihin.

### IV.1. Alkusolmut.

Joudumme valitettavasti jättämään todistamatta joitakin kombinatorisen piendimensionaalisen topologian tunnettuja tuloksia. Yksi näistä on

**IV.2. LAUSE (Alexander-Schönflies).** *Olkoon  $F: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  p.l. upotus. Silloin  $\mathbb{R}^3 = B_1 \cup B_2$  siten että  $B_1 \cap B_2 = \partial B_1 = \partial B_2 = F[S^2]$  ja  $B_1 \approx \bar{B}(0, 1)$  ja  $B_2 \approx \mathbb{R}^3 \setminus \overset{\circ}{B}(0, 1)$ .*

Olkoon  $k: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  solmu ja  $F: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  upotus niin että  $k[S^1] \cap F[S^2] = \{x_0, y_0\}$ , eli pinta  $F[S^2]$  leikkaa solmua täsmälleen kahdessa pisteessä. Alexander-Schönflies lauseen nojalla on mielekästä puhua pinnan  $F[S^2]$  sisä- ja ulkopuolesta. Olkoon  $B_1$  sisäpuoli ja  $B_2$  ulkopuoli. Nyt pisteet  $x_0$  ja  $y_0$  voi yhtistää käyrällä  $\alpha$ , joka kulkee pinnalla  $F[S^2]$ . Silloin tuloksena on kaksi solmua:  $(\alpha \cup k[S^1]) \cap \bar{B}_1$  ja  $(\alpha \cup k[S^1]) \cap \bar{B}_2$ . Merkitään näitä solmuja vastaavasti  $k_1$  ja  $k_2$ . Tällaisessa tilanteessa merkitään:

$$k = k_0 \# k_1$$

ja kutsutaan solmua  $k$  solmujen  $k_0$  ja  $k_1$  kompositioksi.

**IV.3. HUOMAUTUS.** Solmut voi myös määritellä n.s. pitkinä, eli sellaisina upotuksina  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , että jollakin  $r > 0$  pätee  $\forall x(|x| > r \rightarrow p(x) = (x, 0, 0))$ . Nämä vastaavat intuitiivisesti narua, joka voi olla solmussa välillä  $-r < x < r$ . Näille solmuille voi määritellä ja todistaa kaikki jutut, mitkä tähän asti ollaan määritelty ja todistettu tavallisille solmuille. Pieniä eroavaisuuksia näiden teorioissa kuitenkin on. Miten määrittelisit komposition näille solmuille?

Solmut muodostavat laskutoimituksen  $\#$  kanssa additiivisen ja vaihdannaisen monoidin.

Voidaan pohtia seuraavaa kysymystä. Olkoon  $K$  epätriviaali solmu. Onko olemassa solmua  $K'$  jolle pätee  $K \# K' = \bigcirc$ ? Onko siis olemassa ”käänteissolmuja”? Vastaus tähän on kielteinen. Sen todistamiseksi riittää löytää solmuinvariantti  $I$ , joka saa arvoja luonnollisissa luvuissa, on additiivinen ja tunnistaa triviaalisolmun, eli jos  $K$  ja  $K'$  ovat solmuja niin pätee

- (1)  $I(K) \in \mathbb{N}$
- (2)  $I(K \# K') = I(K) + I(K')$
- (3)  $I(K) = 0 \iff K = \bigcirc$ .

Nimittäin jos nyt  $K$  ja  $K'$  ovat epätriviaaleja solmuja, niin kohdan (3) mukaan  $I(K) + I(K') > 0$ . Toisaalta kohdan (2) mukaan tästä seuraa, että  $I(K \# K') > 0$ , eli kohdan (3) mukaan kompositiosolmu ei voi olla triviaali.

Eräs tällainen invariantti on olemassa, solmun *genus*.

**IV.4. MÄÄRITELMÄ.** Solmu  $K$  on *alkusolmu* jos ei ole olemassa epätriviaaleja solmuja  $K_1$  ja  $K_2$  siten että  $K = K_1 \# K_2$ .

Genuksen avulla voidaan todistaa myös seuraava:

**IV.1. TEHTÄVÄ.** Todista käyttämällä invarianttia  $I$  joka toteuttaa ehdot (1) – (3), että

- (a) jos  $I(k) = 1$ , niin  $k$  on alkusolmu.
- (b) jokainen solmu  $K$  voidaan yksikäsitteisesti esittää alkusolmujen kompositiona  $K = K_0 \# \dots \# K_n$ .

Avautuvuusluku  $u$  ja ristiinmenoluku  $c$  voidaan määritellä seuraavasti:  $u(k)$  on pienin määrä singulariteettejä, mitä homotopialla  $u \sim O$  voi olla. Singulariteetti on piste, jonka

alkukuva on yksiötä suurempi.  $c(k)$  on pienin määrä singulariteettejä, mitä solmun projektiossa voi olla. Selvästi näille ehdot (1) ja (3) toteutuvat. Niiden additiivisuus on avoin ongelma.

AVOIN ONGELMA. Onko avautuvuusluku additiivinen  $u(K \# K') = u(K) + u(K')$ ?

AVOIN ONGELMA. Onko ristiinmenoluku additiivinen  $c(K \# K') = c(K) + c(K')$ ?

**IV.5. ESIMERKKI.** Esimerkkejä avautuvuus- ja ristiinmenoluvuista. Kombinatoriset vastineet.

Seuraavaksi määrittelemme invariantin, joka toteuttaa ehdot (1) – (3).

## IV.2. Seifertin pinnat.

**IV.6. MÄÄRITELMÄ.** Olkoon  $k$  solmu ja  $F \subset \mathbb{R}^3$  reunallinen yhtenäinen suunnistuva 2-monisto. Jos  $\partial F = k[S^1]$ , niin monistoa  $F$  kutsutaan solmun  $k$  *Seifertin pinnaksi* ja että pinta  $F$  *virittää* solmun  $k$ .

**IV.7. LAUSE.** *Jokaisella solmulla on Seifertin pinta.*

TODISTUS. Tämä todistus perustuu Herbert Seifertin antamaan algoritmiin [18], jonka avulla Seifertin pinnan voi rakentaa. Aiemman todistuksen asialle ovat antaneet Frankl ja Pontrjagin artikkelissa [7].  $\square$

**IV.8. MÄÄRITELMÄ.** Olkoon  $\mathcal{G}$  2-ulotteinen simplisiaalinen kompleksit. Olkoon  $F_{\mathcal{G}}$  2-simpleksien lukumäärä (face),  $E_{\mathcal{G}}$  1-simpleksien lukumäärä (edge) ja  $V_{\mathcal{G}}$  0-simpleksien lukumäärä (vertex). Kompleksin Eulerin karakteristika on vuorotteleva summa

$$\chi(\mathcal{G}) = F_{\mathcal{G}} - E_{\mathcal{G}} + V_{\mathcal{G}}.$$

(Yleisemmin kompleksille Eulerin simpleksille määritellään vuorottelevalla summalla  $\sum_n (-1)^n A_n$ , missä  $A_n$  on  $n$ -simpleksien lukumäärä.)

**IV.2. TEHTÄVÄ.** Eulerin karakteristika säilyy hienonnuksessa, eli jos  $\mathcal{G}$  on  $\mathcal{G}'$ :n hienonnuksena, niin  $\chi(\mathcal{G}) = \chi(\mathcal{G}')$ .

**IV.9. SEURAUUS.** *Jos kompleksit  $\mathcal{G}$  ja  $\mathcal{G}'$  ovat sellaisia, että  $\bigcup \mathcal{G} \approx \bigcup \mathcal{G}'$  (p.l. homeomorfismilla), niin  $\chi(\mathcal{G}) = \chi(\mathcal{G}')$ .*

TODISTUS. Selvästi jos on olemassa simplisiaalinen homeomorfismi  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ , niin se säilyttää Eulerin karakteristikan. Toisaalta Eulerin karakteristika säilyy hienonnuksessa ja p.l. homeomorfismi on määritelmän mukaan simplisiaalinen kuvaus hienonnusten välillä.  $\square$

Tämä antaa mahdollisuuden määritellä:

**IV.10. MÄÄRITELMÄ.** Trianguloituvan topologisen avaruuden Eulerin karakteristika on sen triangulaation Eulerin karakteristika.

**IV.11. MÄÄRITELMÄ** (Handle body, kahvakappale). Määritellään 3-ulotteinen yksikkökuula  $0$ -kahvaiseksi kappaleeksi. Oletetaan, että  $n$ -kahvainen kappale on määritelty. Olkoot  $s_0$  ja  $s_1$  simpleksejä  $n$ -kahvaisen kappaleen pinnalla ja  $s$  abstrakti 2-simpleksi. Liimataan lieriö  $s \times I$   $n$ -kahvaiseen kappaleeseen niin, että  $s \times \{0\}$  samaistetaan  $s_0$ :n kanssa ja  $s \times \{1\}$  samaistetaan  $s_1$ :n kanssa. Näin saadaan  $(n+1)$ -kahvainen kappale. Olkoon  $g \in \mathbb{N}$ . Kutsutaan  $g$ -pinnaksi  $g$ -kahvaisen kappaleen reunaa.

**IV.12. ESIMERKKI.** Torus  $S^1 \times S^1$  on homeomorfinen 1-pinnan kanssa. Jos otetaan kaksi torusta, poistetaan niistä molemmista yksi 2-simpleksi ja liimataan torukset poistettujen simpleksien reunaa pitkin, saadaan pinta, joka on homeomorfinen 2-pinnan kanssa. Lukua  $g$  kutsutaan  $g$ -pinnan *genukseksi* (eng. genus).

Seuraava lause joudutaan jättää todistamatta.

**IV.13. LAUSE.** *Olkoon  $M$  trianguloituva kompakti yhtenäinen orientoituva 2-monisto. Silloin se on homeomorfinen  $g$ -pinnan kanssa jollakin  $g \in \mathbb{N}$ .* □

Todistuksen voi löytää esimerkiksi kirjassa [13].

## Kirjallisuutta

- [1] Colin C. **Adams**: *The Knot Book – An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*. AMS 2004.
- [2] E. **Artin**, R. H. **Fox**: *Some wild cells and spheres in three dimensional space*. Ann. of Math., 49 (1948), 979–990
- [3] G. **Burde** and H. **Zieschang**: *Knots*, de Gruyter Studies in Mathematics 5, Berlin, New York 1985.
- [4] Nguyen Cam **Chi** et Hoang Ngoc **Minh**: *De l'ADN à la théorie des nœuds*. Ranskan matemaattinen yhdistys.
- [5] **Crowell**, R. H. **Fox**, *Introduction to knot theory* Springer; 1 edition (October 8, 1984).
- [6] R. H. **Fox**: *A remarkable simple closed curve*. Ann. of Math., 50 (1949), 264–265.
- [7] P. **Frankl** and L. **Pontrjagin**. *Ein Knotensatz mit Anwendung auf die Dimensionstheorie*. Math. Annalen, 102:785789, 1930.
- [8] Louis H. **Kauffman**: *On Knots*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1987.
- [9] Louis H. **Kauffman**: *Knots and Physics* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1993.
- [10] Louis H. **Kauffman**: *Knots and Applications* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1993.
- [11] V. O. **Manturov**: *Knot Theory*, CRC Press, 2004.
- [12] V. O. **Manturov**: *Teorija uzlov*, Moscow 2005 ISBN 5-93972-404-3
- [13] C. R. F. **Maunder**: *Algebraic Topology*, Dover Publications, Inc. Mineola, New York 1980. ISBN 0-486-69131-4 (pbk.)
- [14] Andrew **Ranicki**: *High-dimensional knot theory*, Springer-Verlag 1998.
- [15] Kurt **Reidemeister**: *Knotentheorie*, Chelsea Publishing Company 231 West 29th Street, New York 1, N.Y. 1948.
- [16] C. **Dietrich-Buchecker** and J.-P. **Sauvage**: *A synthetic molecular trefoil knot*. Angew. Chem. 28(2):189–192.
- [17] H. **Schubert**: *Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knoten in Primknoten*. Sitzungsber. Akad. Wiss. Heidelberg, math.-nat. Kl. 1949, 3 Abh., 57–104.
- [18] H. **Seifert**. *Über das Geschlecht von Knoten*. Math. Annalen, 110:571592, 1934.
- [19] De Witt **Summers**: *Lifting the Curtain: Using Topology to Probe the Hidden Action of Enzymes* <http://www.ams.org/notices/199505/summers.pdf>
- [20] De Witt **Summers**: *Untangling DNA*. Math. Intell. 12(3):71–80.
- [21] Olof-Petter **Östlund**: *Invariants of knot diagrams and relations among Reidemeister moves*. J. Knot Theory Ramifications, 10

## Hakemisto

Alexander-Tietze, 3

Isotopia, 2

Kesy solmu, 3

p.l., 3

paloittain lineaarinen, 3

Solmu, 1

Solmujen ekvivalenssi, 2

Ympäristöisotopia, 2