

Determinoivuuden aksiooma

Vadim Kulikov

Esitelmä 12 Maaliskuuta 2008

TIIVISTELMÄ. Valinta-aksioomasta seuraa, että $\text{Leb}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, eli on olemassa epämitallisia joukkoja. Tässä esitelmässä nähdään, että ylinumeroituva valinta-aksiooma on tähän välttämätön: korvaamalla valinta-aksiooma determinoituvuuden aksioomalla voidaan todistaa

- numeroituva valinta-aksiooma
- $\text{Leb}(\mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

1. Peleistä

Tässä esitelmässä *pelejä* $G(A, W)$ on pari (A, W) , missä A on mikä tahansa joukko ja $W \subset A^{\mathbb{N}} = \{f \mid f: \mathbb{N} \rightarrow A\}$ on voittojoukko. Pelin siirrolla n pelaaja I valitsee ensin jonkun alkion $a_n \in A$ ja sitten pelaaja II valitsee alkion $b_n \in A$. Pelaaja II voittaa pelin $G(A, W)$ jos jono $(a_0, b_0, a_1, b_1, \dots)$ on voittojoukossa W . Muuten pelaaja I voittaa.

Pelaajan II *strategia* on funktio σ , joka saa arvokseen joukon A alkioita ja jonka argumentteja ovat äärelliset joukon A jonot (pelaajaan I tekemät siirtosarjat):

$$\sigma: \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n \rightarrow A.$$

Vastaavasti pelaajan I strategia on funktio

$$\tau: \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n \rightarrow A.$$

Strategia on *voittostrategia* mikäli pelaaja voittaa pelin aina noudattamalla tätä strategiaa.

Peli on *determinoitu* jos jommalla kummalla pelaajalla on voittostrategia.

1.1. ESIMERKKI. Olkoon $W' \subset [0, 1] \subset \mathbb{R}$, $A = \{0, 1, \dots, 9\}$ ja

$$W = \{(a_n)_{n=0}^{\infty} \mid 0, a_0 a_1 a_2 \dots \in W'\}.$$

Pelaajat siis valitsevat vuorotellen reaalin luvun desimaaleja. Pelaaja II pyrkii osuun joukkoon W' ja pelaaja I puolestaan joukkoon $[0, 1] \setminus W'$.

Nyt

- Jos $[0, 1] \setminus W'$ sisältää avoimen välin $(1/10, 2/10)$, niin pelaajalla I on helppo voittostrategia: jokaisella siirrolla hän pelaa luvun 1. Lopullinen luku on tällöin väistämättä välin $(1/10, 2/10)$ sisällä. Eli $\tau(x) = 1$ kaikilla $x \in \cup_n A^n$ on pelaajan I voittostrategia.
- Jos $[0, 1] \setminus W'$ on numeroituva, niin pelaajalla II on voittostrategia: Hän numeroi tämän joukon $[0, 1] \setminus W' = \{q_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ja diagonalisoi: siirrolla n valitsee luvun q_n n :n desimaalin. Tällä tavalla valittu luku ei voi olla mikään näistä q_n . Huom: tässä ei käytetty valinta-aksioomaa joukon numeroimiseksi, sillä oletuksena oli, että joukko on numeroituva, eli on olemassa bijektio $f: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1] \setminus W'$. Samoin jos W' on numeroituva, niin I :llä on voittostrategia.
- Kehittämällä näitä argumentteja nähdään esimerkiksi, että jos W' on avoin ja $\overline{W'} = [0, 1]$, niin pelaajalla II on voittostrategia (esim. Cantorin joukon komplementti).
- Oletetaan, että on joku joukko $W' \subset [0, 1]$ siten, että tämä peli ei ole determinoitu. Yllä olevasta seuraa mm. että tällöin kumpikaan joukoista W' ja $[0, 1] \setminus W'$ ei voi olla numeroituva eikä edes laiha (tiheän avoimen komplementti). Itse asiassa sellainen joukko ei voi olla edes Lebesgue-mitallinen.
- Voiko tämä peli olla ei determinoitu? Vastaus alla.

Seuraavassa merkitään $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

Yleistetään hieman esimerkin 1.1 peliä: Olkoon $A = \mathbb{N}$ ja $W \subset \mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Jos varustetaan \mathcal{N} tulotopologialla, niin siitä on helppo konstruoida jatkuva bijektio reaalilukuihin $b: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$, mikä käytännössä tarkoittaa reaalilukujen esttämistä päättymättömänä desimaalilukuna, jonka desimaalit saavat olla mitä tahansa luonnollisia lukuja (vrt. ketjumurtoluku). Topologista avaruutta $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ kutsutaan Bairen avaruudeksi (*the Baire space* - eri asia kuin *a Baire space*, joka on mikä tahansa avaruus, jossa pätee Bairen lause).

DETERMINOITUVUUDEN AKSIOOMA (AD). *Peli $G(\mathbb{N}, W)$ on determinoitu kaikilla $W \subset \mathcal{N}$.*

2. ZF, ZFC ja ZF+AD

Ei ole tarkoitus perehtyä ZF:n aksiomiin kunnolla, tässä ne kuitenkin ovat kokonaisuuden vuoksi:

Aksioomajoukko ZF:

- (i) $\forall x \forall y (\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y)$
- (ii) $\forall x [\exists y (y \in x) \Rightarrow \exists y (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in y \wedge z \in x))]$

(iii) Olkoon φ kaava, jossa vapaina esiintyvät vain x, z, w_1, \dots, w_n . Tällöin seuraava on aksiooma:

$$\forall z \forall w_1 \dots w_n \exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow (x \in z \wedge \varphi))$$

(iv) $\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z)$

(v) $\forall \mathcal{F} \exists A \forall Y \forall x (x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F} \Rightarrow x \in A)$

(vi) Olkoon φ kaava, jossa vapaina esiintyvät vain x, z, w_1, \dots, w_n . Tällöin seuraava on aksiooma:

$$\forall A \forall w_1, \dots, w_n [(\forall x \in A \exists! y \varphi) \Rightarrow \exists Y \forall x \in A \exists y \in Y \varphi].$$

(vii) $\exists X (\emptyset \in X \text{ and } \forall y (y \in X \Rightarrow S(y) \in X))$

(viii) $\forall x \exists y \forall z (z \subseteq x \Rightarrow z \in y)$

Näistä aksioomista voi johtaa jo hyvin paljon matematiikkaa. Muun muassa on helppo konstruoida täydellinen järjestetty kunta. Yleensä kuitenkin käytössä on hieman laajempi aksioomajoukko, nimittäin $ZFC = ZF + \text{Valinta-aksiooma}$.

VALINTA-AKSIOMA (AC). *Jokainen joukko voidaan hyvinjärjestää, t.s. jokaista joukkoa A kohti on olemassa $R \subset A \times A$, joka määrittelee joukkoon A lineaarijärjestyksen s.e. jokaisella A :n osajoukolla on R -pienin alkio (hyvin järjestys).*

Tämä on ekvivalenttia sen kanssa, että mielivaltaisella joukkoperheellä $(X_i)_{i \in I}$ on valintafunktio $f: I \rightarrow \cup_{i \in I} X_i$ $f(i) \in X_i$ ja sen kanssa, että mielivaltaisella joukkoperheellä kuten yllä, tuloujoukko $\prod_{i \in I} X_i$ on epätyhjä. Myös tunnetusti ekvivalenttia Zornin lemmän ja Tychonovin lauseen kanssa.

Seuraavassa on joitain faktoja. Jos T on aksioomajoukko, niin merkitään $\text{Con}(T)$ lausetta, joka sanoo, että T on ristiriidaton.

- Gödel: mistään ristiriidattomasta aksioomajoukosta ei voi todistaa, että se aksioomajoukko itse on ristiriidaton, eli

$$T \rightarrow \text{Con}(T) \iff T \text{ on ristiriitainen}$$

- Tästä huolimatta voidaan todistaa: $\text{Con}(ZF) \rightarrow \text{Con}(ZFC)$ ja $\text{Con}(ZF) \rightarrow \text{Con}(ZF + \neg AC)$
- $AD \rightarrow \neg AC$, mutta AD implikoi AC :n numeroituville joukoille.
- $\text{Con}(ZF + AD) \rightarrow \text{Con}(ZFC)$

Viimeinen implikoi, että AD :tä ei voi todistaa ZFC :stä eikä ZF :stä (miäkäli nämä ovat ristiriidattomia). Toiseksi viimeinen on helppo todistaa diagonalisoimalla:

2.1. LAUSE. *Valinta-aksioomasta seuraa, että $G(\mathbb{N}, W)$ voi olla epädeterminoitu.*

Seuraavassa lukijalta oletetaan hieman tiätämystä ordinaaleista.

TODISTUS. Kaikkia pelaajan I strategioita on yhtä paljon kuin funktioita

$$\tau: \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{N})^n \rightarrow \mathbb{N},$$

eli kontinuumin verran: 2^ω . Valinta-aksiooman nojalla kaikki pelaajan I strategiat voidaan laittaa hyvinjärjestykseen: $\{\tau_\alpha \mid \alpha < 2^\omega\}$ ja myös pelaajan II strategiat: $\{\tau_\alpha \mid \alpha < 2^\omega\}$. Nyt joukkoa A voi rakentaa diagonalisoimalla induktiolla. Oletetaan, että vaiheessa α on valittu joukot $\{x_\gamma \in \mathcal{N} \mid \gamma < \alpha\}$ ja $\{y_\gamma \in \mathcal{N} \mid \gamma < \alpha\}$. Seuraavaksi otetaan strategia σ_α ja valitaan joku y_α siten että y_α on siirtosarja, jossa pelaaja I on pelannut siirtoja (b_0, b_1, \dots) ja II on käyttänyt strategiaa σ . (Tarvittava y_α aina löytyy, sillä siirtosarjoja on 2^{\aleph_0} kappaletta.) Seuraavaksi taas valitaan x_α sillä tavalla, että se on siirtosarja, joka tulee pelatuksi jos II pelaa (a_0, a_1, a_2, \dots) ja I on käyttänyt strategiaa τ_α .

Selvästi joukot $Y = \{y_\alpha \mid \alpha < 2^\omega\}$ ja $X = \{x_\alpha \mid \alpha < 2^\omega\}$ ovat erilliset ja jokaista I :n strategiaa τ kohti löytyy $b = \{b_0, b_1, \dots\}$ siten että pelissä, jossa II pelaa (b_0, b_1, \dots) strategiaa τ vastaan, niin lopullinen jono on joukossa Y ja päin vastoin. Siis $G(\mathbb{N}, X)$ ei voi olla determinoitu. \square

2.2. LAUSE. *Determinoituvuuden aksioomasta seuraa numeroituva valinta-aksiooma, eli että jokaisella numeroituvalla perheellä reaalilukujoukkoja on valintafunktio.*

TODISTUS. Olkoon $P = \{X_0, X_1, X_2, \dots\}$ numeroituva kokoelma reaalilukujen osajoukkoja. Voidaan olettaa, että ne on välin $(0, 1)$ osajoukkoja. Osoitamme, että löytyy valintafunktio $f: \mathbb{N} \rightarrow P$, $f(i) \in X_i$ kaikilla i . Pelataan seuraavaa peliä $G(\mathbb{N}, W)$: pelaaja I valitsee jonon (a_0, a_1, a_2, \dots) lukuja $a_i \in \{0, 1\}$ ja pelaaja II valitsee (b_0, b_1, b_2, \dots) myös s.e. $b_i \in \{0, 1\}$ ja II voittaa jos ja vain jos reaaliluku $0, b_0b_1b_2 \dots$ (binääriluku) on joukossa X_{a_0} . Selvästikään pelaajalla I ei ole voittostrategiaa: kun hän on pelannut a_0 , II voi valita reaaliluvun $b \in X_{a_0}$ ja pelata sen desimaaleja. Koska peli on determinoitu AD:n nojalla, niin pelaajalla II on voittostrategia. Jos tämä voittostrategia on σ , voidaan valintafunktio määritellä

$$f(n) = \text{reaaliluku, jonka } m\text{:s desimaali on } \sigma(n, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-1\text{kpl}}).$$

\square

3. ZF + AD \Rightarrow Leb(\mathbb{R}) = $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

Jos $x \in \mathcal{N}$, merkitään $x \upharpoonright n = x \upharpoonright \{0, \dots, n-1\}$ ja $O_{x \upharpoonright n} = \{y \in \mathcal{N} \mid y \upharpoonright n = x \upharpoonright n\}$. Joukot $O_{x \upharpoonright n}$ ovat avoimia ja muodostavat avaruuden \mathcal{N} topologialle numeroituvan kannan ja samalla jokaiselle $x \in \mathcal{N}$ numeroituvan ympäristökannan.

3.1. LEMMA. *Jokaiselle $A \subset \mathbb{R}$ löytyy sellainen mitallinen $B \subset \mathbb{R}$, että $B \supset A$ ja jos $Z \subset B \setminus A$ on mitallinen, niin $m(Z) = 0$.*

TODISTUS. Jos A on rajoitettu, niin tämä on selvää, valitaan vain Borel joukko B s.e. $m(B) = m(A)$. Jos A on rajoittamaton, niin A on numeroituva yhdiste rajoitettuja $A = \cup_n C_n$, jolloin jokaiselle C_n voidaan valita tällainen joukko B_n . Jos nyt $Z \subset \cup_n B_n \setminus A$ on mitallinen, niin se on numeroituva yhdiste mitallisista $B_n \setminus C_n$ ja jokaisen näistä mitta on nolla. \square

3.2. LEMMA. *Olkoon $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva. Tällöin $\text{Rng } f = f[\mathcal{N}]$ on Lebesgue-mitallinen.*

TODISTUS. Tähän todistukseen ei tarvita valinta- eikä determinoituvuuden aksioomaa. Olkoon $A = f[\mathcal{N}]$ Jatkuvuuden nojalla kaikilla $a \in \mathcal{N}$ pätee

$$\{f(a)\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f[O_{a \upharpoonright n}] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{f[O_{a \upharpoonright n}]}$$

(Kaikilla ε löytyy n s.e. $f[O_{a \upharpoonright n}] \subset B(f(a), \varepsilon)$ jne..) Tästä seuraa

$$A = \bigcup_{a \in \mathcal{N}} \bigcap_{n=0}^{\infty} f[O_{a \upharpoonright n}] = \bigcup_{a \in \mathcal{N}} \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{f[O_{a \upharpoonright n}]}$$

Merkitään $A_s = f[O_s]$, missä $s = x \upharpoonright n$ joillain x ja n (eli s on äärellinen jono). Yllä olevan lemmän nojalla jokaista A_s kohti löytyy mitallinen $B_s \supset A_s$ siten että jos $Z \subset B_s \setminus A_s$ on mitallinen, niin sen mitta on nolla. A :n mitallisuuden toteamiseksi riittää osoittaa, että $m^*(B \setminus A) = 0$, missä $B = B_{\emptyset}$, eli $B \supset A$ ja B kuten yllä olevassa lemmassa. Koska $\overline{A_s}$ on mitallinen, voidaan valita niin, että $A_s \subset B_s \subset \overline{A_s}$. Tällöin saadaan

$$A = \bigcup_{a \in \mathcal{N}} \bigcap_{n=0}^{\infty} B_s$$

ja

$$B \setminus A = B \setminus \bigcup_{a \in \mathcal{N}} \bigcap_{n=0}^{\infty} B_{a \upharpoonright n} \subset \bigcup_{s \in \text{Seq}} \left(B_s \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{s \frown k} \right). \quad \star$$

Tarkistetaan vielä viimeinen kuuluvuus: jos $x \in B$, mutta $x \notin \bigcup_{s \in \text{Seq}} (B_s \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{s \frown k})$, niin kaikilla äärellisillä jonoilla $x \notin (B_s \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{s \frown k})$, eli mm. $x \notin B \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{\langle k \rangle}$ eli löytyy k_0 s.e. $x \in B_{\langle k_0 \rangle}$ jatkamalla induktiivisesti huomataan, että kaikilla n löytyy k_n s.e. $x \in B_{\langle k_0, k_1, \dots, k_n \rangle}$, eli $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} B_{\langle k_0, k_1, \dots, k_n \rangle}$, mikä on ristiriita sen kanssa, että $x \notin B \setminus \bigcup_{a \in \mathcal{N}} \bigcap_{n=0}^{\infty} B_{a \upharpoonright n}$.

Toisaalta kaikilla s

$$Z_s = B_s \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{s \frown k} \subset B_s \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} A_{s \frown k},$$

jolloin B_s :n määritelmän nojalla $m(Z_s) = 0$ (Z_s on selvästi mitallinen Borel-joukko). Mutta \star :n nojalla $B \setminus A \subset \bigcup_{s \in \text{Seq}} Z_s$, joka on numeroituva yhdiste! Siis $m^*(B \setminus A) = 0$. \square

3.3. LAUSE. *Determinoituvuuden aksioomasta seuraa, että kaikki reaalityyppisten osajoukot ovat Lebesgue mitallisia.*

TODISTUS. Lemman 3.1 nojalla riittää osoittaa, että jos $S \subset \mathbb{R}$ on sellainen, että kaikilla mitallisilla $Z \subset S$ $m(Z) = 0$, niin $m^*(S) = 0$. Olkoon siis S sellainen, että kaikilla mitallisilla $Z \subset S$ mitta on nolla. Kiinnitetään ε ja osoitetaan, että $m^*(S) < \varepsilon$. Koska ε on m.v., tästä lopulta seuraa, että $m^*(S) = 0$.

Jokaista $n \in \mathbb{N}$ kohti määritellään kokoelma avoimia joukkoja K_n seuraavasti: Jos $G \in K_n$, niin

- G on äärellinen yhdiste avoimia välejä, joiden päätepisteet ovat rationaalilukuja.
- $m(G) \leq \varepsilon/2^{2n+1}$.

Jokainen K_n on numeroituva, joten voidaan kirjoittaa $K_n = \{G_0^n, G_1^n, G_2^n, G_3^n, \dots\}$. (Tässä on käytetty numeroituvaa valintaa). Määritellään peli $G(\mathbb{N}, W)$ seuraavasti. Pelaaja I valitsee lukuja 0 ja 1 ja yrittää muodostaa binääriluvun $a \in S$ ja II puolestaan valitsee joukkoja $H_n \in K_n$ siten että $a \in \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n$. Tarkemmin pelaaja I voittaa siirtosarjalla $(a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, \dots)$ jos ja vain jos

- $a_n \in \{0, 1\}$
- $a \in S$ (missä a on binääriluku $a = 0, a_0a_1a_2\dots$)
- $a \notin G_{b_n}^n$.

Pelaajan II voittojoukko W siis muodostuu niistä jonoista jotka eivät toteuta jotain ehdoista (i) – (iii).

Osoitamme ensin, että pelaajalla I ei ole voittostrategiaa. Vastaoletus: τ on pelaajan I voittostrategia. Määritellään kuvaus $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ seuraavasti. Jos $b = (b_0, b_1, \dots)$, niin olkoon $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ jono niitä luonnollisia lukuja, joilla strategia τ vastaa kun pelaaja II pelaa lukuja b_0, b_1, \dots . Asetetaan $f(b) = a$, missä a on reaalityyppinen $a = 0, a_0a_1a_2\dots$. Väite on että f on jatkuva. Olkoon $b \in \mathcal{N}$ ja $\varepsilon > 0$. Olkoon k s.e. $2^{-k} < \varepsilon$. Silloin jos $a = 0, a_0a_1a_2\dots \in (f(b) - \varepsilon, f(b) + \varepsilon)$, niin jonon a ja $f(b)$ binääridesimaalit eroavat aikaisintaan desimaalissa k , eli jos otetaan kaikki sellaiset jonot b' , jotka eroavat jonosta (b_0, b_1, \dots) aikaisintaan desimaalissa k , saadaan avoin joukko avaruudessa \mathcal{N} , jonka kuva sisältyy $f(b)$:n ε -ympäristöön. Toisaalta, koska τ oli voittostrategia, niin $f(b) \in S$, eli $f[\mathcal{N}] = Z \subset S$. Lemman 3.2 nojalla Z on mitallinen ja S :n määritelmän nojalla $m(Z) = 0$. Mutta jos se on nollamittainen, niin taatusti löytyy jokin jono joukkoja $H_n \in K_n$ s.e. $S \subset \bigcup_n H_n$. Siis II pystyisi

nyt voittamaan pelin pelaamalla jokaisella siirolla tällä tavalla valitun H_n :n, mikä on ristiriita sen kanssa, että τ olisi voittostrategia pelaajalle I .

Determinoituvuuden aksioman nojalla tästä seuraa, että pelaajalla II on voittostrategia. Olkoon tämä strategia σ . Jokaista äärellistä jonoa $s = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ kohti valitaan G_s^n , joka on strategian σ antama siirto sen jälkeen kun I on pelannut jonon s . Koska σ on voittostrategia, niin kaikilla jonoilla (a_0, a_1, \dots) , joilla $a = 0, a_0 a_1, \dots \in S$ pätee $a \in \bigcup_{n=0}^{\infty} G_{a_n}^n = \bigcup \{G_s \mid s = (a_0, \dots, a_n), n \in \mathbb{N}\}$, joten

$$S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s \in \{0,1\}^n} G_s.$$

Jos $s \in \{0,1\}^n$, niin $G_s \in K_n$ määritelmän mukaan, eli $m(G_s) \leq \varepsilon/2^{2(n+1)}$, joten ottamalla huomioon, että jonoja $s \in \{0,1\}^n$ on 2^n kappaletta saadaan

$$\begin{aligned} m(S) &\leq m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s \in \{0,1\}^n} G_s\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} m\left(\bigcup_{s \in \{0,1\}^n} G_s\right) \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s \in \{0,1\}^n} m(G_s) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s \in \{0,1\}^n} \frac{\varepsilon}{2^{2n+1}} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{\varepsilon}{2^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Siis $m(S) < \varepsilon$ mielivaltaisella ε , mikä riittää todistukseksi. \square

Kirjallisuutta

[Jech] Jech, T., Set Theory. ISBN-10 3-540-44085-7 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.