

**Satelliittipaikannus**  
Markku Poutanen



# Sisältö

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>5</b>
1.1	Mikä GNSS on . . . . .	5
1.1.1	GNSS:n käyttö ja käyttäjät . . . . .	7
1.2	Globaalit mittaukset ennen GPS-aikaa . . . . .	11
1.3	GPS . . . . .	16
1.4	GLONASS . . . . .	20
1.5	Galileo . . . . .	24
1.6	Muut avaruusgeodeettiset paikannusmenetelmät . . . . .	28
1.6.1	Satelliittilaser . . . . .	28
1.6.2	VLBI . . . . .	32
1.6.3	DORIS . . . . .	36
<b>2</b>	<b>Koordinaatistot</b>	<b>39</b>
2.1	Astronomiset koordinaattijärjestelmät . . . . .	42
2.1.1	Pallotähtitieteen peruskäsitteitä . . . . .	42
2.1.2	Horisonttijärjestelmä . . . . .	44
2.1.3	Ekvaattorijärjestelmä . . . . .	45
2.1.4	Tähtiaika . . . . .	46
2.1.5	Horisontti- ja ekvaattorikoordinaatistojen välinen muunnos	50
2.1.6	Koordinaatteja muuttavat tekijät . . . . .	53
2.1.7	Kansainvälinen tähtitieteellinen koordinaattijärjestelmä . .	60
2.2	Aika . . . . .	62
2.2.1	Maan pyörimisliike ja aika . . . . .	64
2.2.2	Inertiaalikoordinaatistoissa käytettävä aika . . . . .	67
2.2.3	GPS:n aikamääritelmät . . . . .	69
2.2.4	Galileon aikajärjestelmä . . . . .	71
2.2.5	GLONASS:n käyttämä aika . . . . .	72

2.3	Terrestriset koordinaattijärjestelmät . . . . .	72
2.3.1	Konventionaalinen terrestrinen järjestelmä, CTRS . . . . .	73
2.3.2	Kansainvälinen terrestrinen järjestelmä, ITRS . . . . .	79
2.3.3	Maailman geodeettinen järjestelmä 1984, WGS84 . . . . .	80
2.3.4	Galileon koordinaatisto, GTRF . . . . .	82
2.3.5	GLONASSin koordinaatisto, PZ-90 . . . . .	82
2.3.6	Eurooppalainen koordinaattijärjestelmä, ETRS89 . . . . .	83
2.3.7	Suomen kansallinen realisaatio, EUREF-FIN . . . . .	86
2.3.8	Vanhat koordinaattijärjestelmät ED50 ja KKJ . . . . .	88
2.4	Siirtyminen koordinaatistosta toiseen . . . . .	91
2.4.1	Suorakulmaiset ja maantieteelliset koordinaatit . . . . .	92
2.4.2	Terrestrisen ja inertiaalikoordinaatiston välinen yhteys . . . . .	96
2.4.3	Koordinaattimuunnokset . . . . .	98
2.4.4	ITRF-koordinaatistojen väliset muunnokset . . . . .	101
2.4.5	EUREF-FIN:n ja KKJ:n väliset muunnokset . . . . .	104
2.4.6	Koordinaatiston vaikutus GNSS-mittausten virheisiin . . . . .	106
2.5	GNSS ja korkeus . . . . .	109
2.5.1	Geoidi ja geoidimallit . . . . .	111
2.5.2	Suomen korkeusjärjestelmät . . . . .	117
2.5.3	Korkeuksien ajalliset muutokset . . . . .	119
<b>3</b>	<b>Satelliittien radat</b>	<b>129</b>
3.1	Kahden kappaleen rata . . . . .	130
3.1.1	Rataelementit . . . . .	133
3.1.2	Satelliitin paikka . . . . .	136
<b>A</b>	<b>Vektori- ja matriisilaskentaa</b>	<b>139</b>
A.1	Vektorit . . . . .	139
A.2	Matriisit . . . . .	141
A.3	Kiertomatriisit . . . . .	143
<b>B</b>	<b>Karttaprojektiot</b>	<b>145</b>
<b>C</b>	<b>Lähdekirjallisuutta</b>	<b>147</b>

# Luku 1

## Johdanto

*Ár var alda  
þar er Ymir byggði  
vara sandr né sær  
né svalar unnir  
iqrðfannz æva  
né upphiminn  
gap var ginnunga  
en gras hvergi.*

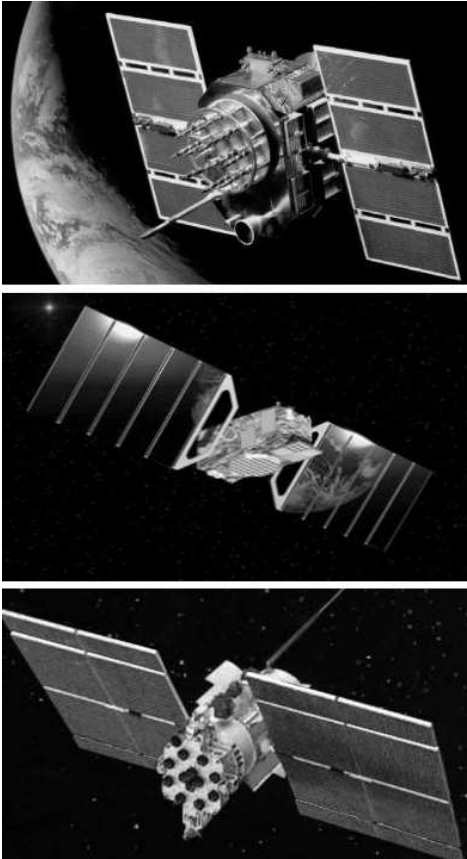
— *Edda. Völuspá. (Näkijättären ennustus.)*

### 1.1 Mikä GNSS on

NAVSTAR GPS (*NAVigation Satellite Time And Ranging Global Positioning System*) tai tuttavallisemmin vain GPS (*Global Positioning System*) on nykyisin eräs useimmin kuultuja sanoja kun puhutaan navigoinnista tai paikkannuksesta. GPS on kaikkialla maapallolla 24 h vuorokaudessa toimiva, satelliitteihin perustuva järjestelmä, jonka avulla käyttäjä voi määrittää oman paikkansa ja nopeutensa, sekä saada tarkan ajan.

GPS:n rinnalle on kuitenkin tulossa muita satelliittipaikannusmenetelmiä kuten eurooppalainen *Galileo* ja Venäjän *GLONASS*. Yhteisellä nimellä näitä kutsutaan lyhenteellä *GNSS*, *Global Navigation Satellite System*.

Jatkossa termillä *satelliittipaikannus* tai lyhenteellä *GNSS* tarkoitetaan jollain (tai useammalla) edellä mainittujen järjestelmien avulla tehtyjä havaintoja, joiden



**Kuva 1.1:** Kolme satelliittipakannusjärjestelmää, GPS (ylinnä), Galileo (keskellä) ja Glonass (alimpana). Kuvat: GPS: USAF; Galileo: ESA/J.Huart; GLO-NASS: [www.glonass-center.ru](http://www.glonass-center.ru)

tarkoituksena on määrittää vastaanottimen paikka. Toistaiseksi GPS:llä on lähes monopoliasema, mutta erityisesti Galileosta odotetaan merkittävää tekijää siviili-sovelluksissa, koska se sisältää ominaisuuksia, joita esimerkiksi ilmailu ja muut luotettavuutta ja saatavuutta vaativat sovellukset kaipaavat. Myös Venäjän GLO-NASSin odotetaan olevan täydessä laajuudessaan samaan aikaan Galileon rakentamisen kanssa.

Ellei erikseen mainita, jatkossa käsiteltävät asiat ovat yhteisiä kaikille kolmelle järjestelmälle. Niillä on toki joitakin eroja, mutta huomattavasti enemmän yhteistä. Mikä pätee GPS:ään, pätee pääsääntöisesti myös Galileoon ja GLONASSiin. Lyhennettä GNSS ei välttämättä ole käytetty kaikkialla, vaan joskus puhutaan selvyuden vuoksi GPS:stä. Tämänhetkisen aikataulun mukaan vasta vuoden 2010 paikkeilla kaikki järjestelmät alkavat olla laajuudeltaan tasaveroisia.

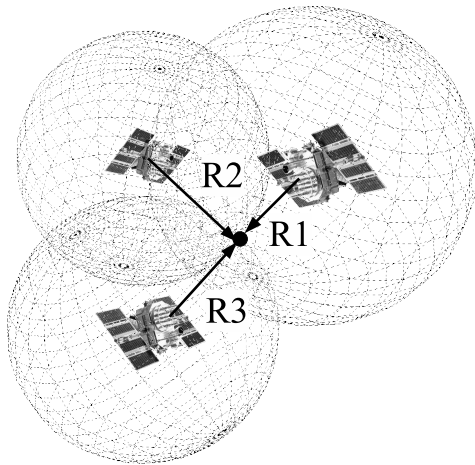
### 1.1.1 GNSS:n käyttö ja käyttäjät

Satelliittipaikannuksen käyttökohteita on lukuisia, ja sovellukset lisääntyvät räjähdysmäisesti. Metritarkkuinen paikannus- ja navigointi on GNSS:n suurin käyttökohde. Tällainen tarkkuus on täysin riittävä kun paikka pitää sijoittaa kartalle. Maanmittaussovellukset ja geodeettiset mittaukset ovat suhteellisen pieni (mutta ei suinkaan pienimerkityksinen) osa tarkkuussovelluksista, joissa mittaukset tehdään alle desimetrin tarkkuudella. Parhaimmillaan voidaan seurata millimetrin suuruisia liikkeitä, mutta nämä vaativat jopa vuosien mittaisia aikasarjoja.

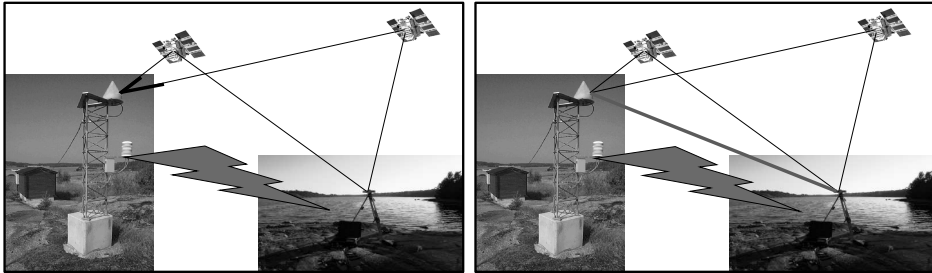
Käyttäjällä oleva *satelliittivastaanotin* havaitsee paikannussatelliitin lähettämän signaalin ja laskee sen avulla satelliitin ja vastaanottimen välisen etäisyyden. Kolmen paikkatuntemattoman (havaintsijan  $xyz$ -koordinaatit) ja vastaanottimen kellovirheen ratkaisemiseksi tarvitaan havainnot vähintään neljään satelliitiin (ks. kuva 1.2).

Useimmat nykyisistä GPS-vastaanottimista pystyvät seuraamaan kaikkia näkyvissä olevia GPS-satelliitteja, joita voi olla 12. Näkyminen riippuu kuitenkin ympäristöstä, sillä satelliittien lähettämä signaali ei läpäise esteitä, kuten puita tai rakennuksia. Siksi satelliittipaikannusta ei voi käyttää sisätiloissa ja tiheässä metsässäkin näkyvyys voi olla yllättävän huono. Tulevaisuudessa kun paikannussatelliitteja on huomattavasti enemmän, ei kaikkien havaitseminen ole ehkä mahdollista halvimmilla vastaanottimilla, sillä useamman järjestelmän rakentaminen samaan vastaanottimeen tulee kalliimmaksi.

Muutaman metrin tarkkuus riittää mainiosti useisiin navigointisovelluksiin,



**Kuva 1.2:** Havaintsijan paikan laskeminen: Satelliitista 1 mitattu pseudoetäisyys antaa havaintsijan paikan jonkin  $R_1$ -säteisen pallon pinnalle. Kun myös etäisyys satelliittiin 2 tunnetaan, tarkentuu paikka näiden kahden pallon leikkausviivalle. Kolmannen satelliitin avulla paikka määräytyy jo yksikäsitteisesti kolmen pallon leikkauspisteeseen. Pseudoetäisyydellä tarkoitetaan koodin kulkuajasta saatavaa etäisyyttä, joka sisältää myös lukuisia virhelähteitä. Vastaanottimen kellovirheen ratkaisemiseksi tarvitsemme vielä neljännekin satelliitin.



**Kuva 1.3:** Differentiaalinen ja suhteellinen paikanmääritys. Differentiaalisessa mittauksessa tukiasemalla lasketaan kuhunkin satelliittiin todellisen ja havaitun matkan välinen ero, joka välitetään korjauksena toiselle vastaanottimelle. Suhteellisessa mittauksessa lasketaan tukiaseman ja toisen vastaanottimen välinen vektori, ts. tuntemattoman aseman paikka tunnetun suhteen. Mittaus voidaan tehdä joko reaaliaikaisena tai jälkilaskentana. (Kuvat M. Poutanen ja H. Koivula.)

mutta saaristossa ja väylillä liikkumiseen tai ajoneuvonavigointiin tämä ei välttämättä riitä. Metritarkkuuteen päästään kahta satelliitivastaanotinta käytettäessä. Toinen vastaanotin on tunnetussa kiinteässä paikassa. Tämän *tukiasemalla* olevan vastaanottimen mittaamaa paikkaa ja tukiaseman todellista sijaintia verrataan joka hetki toisiinsa ja tieto mittauksen virheestä lähetetään radiolinkin välityksellä reaaliaikaisesti toiselle vastaanottimelle. Käytännössä välitetään tieto kunkin satelliitin etäisyyteen tehtävästä korjauksesta. Liikkuva vastaanotin tekee korjaukset satelliittien etäisyyksiin ennen oman paikkansa laskemista. Näin päästään jo metrin luokkaa olevaan tarkkuuteen. Esimerkiksi merenkulussa *differentiaalista paikannusta (DGPS)* on käytetty 1990-luvun alkupuolelta lähtien.

Jo ennen GPS-aikaa, 1970-luvulla, oli Massachusettsin Teknillisessä korkeakoulussa (MIT) kehitetty radioaaltojen interferometriaan perustuva menetelmä. *Pitkäkantainterferometrialla (VLBI)*, ks. luku 1.6.2) pystyttiin mittaamaan eri mantereilla sijaitsevien radioteleskooppien välimatkat muutamien senttimetrin tarkkuudella.

Menetelmää sovellettiin sittemmin myös *GPS-signaaliin*. Signaali koostuu kantoaallostaa ja siihen moduloidusta C/A- ja P-koodista. Nyt ei käytetäkään näitä koodeja, vaan itse kantoaaltoa. Tilanne olisi suunnilleen sama kuin jos suodattaisimme normaalista ULA-radiolähetyksestä kaiken puheen ja musiikin pois ja käyttäisimme vain tuota n. 100 MHz kantoaaltoa (joka siis on pelkkää siniaaltoa ilman mitään informaatiota).

Kantoaallon käyttö vapauttaa samalla GPS-koodien siviilikäyttöön luodusta rajoituksista. Kahden vastaanottimen välinen vektori pystytään tällaisessa *suh-*



**Taulukko 1.1:** GPS:n tarkkuus. Koodia käytettäessä päästään metriluokan tarkkuuteen. Kantoaallon vaiheen avulla saavutetaan alle desimetrin tarkkuus; tämä edellyttää suhteellista mittausta tunnetun tukiaseman suhteen. Pysyvien GPS-asemien avulla voidaan seurata jopa millimetrituokkaa olevia muutoksia.

Havaintosuure	Tarkkuus	Sovellukset
Koodi	10 m	Navigointi; yksi vastaanotin
	1 m	
	0.1 m	
Vaihe	0.01 m	RTK, tukiasema
	0.001 m	Staattinen mittaus; verkko
Muutokset	0.001 m	Pysyvät asemat

*teellisessä mittauksessa* laskemaan parhaimmillaan millimetritarkkuudella, joka on riittävä useimpiin käytännön töihin. Hintana on laskennan monimutkaistuminen, niin ettei laskentaa pystytty aiemmin tekemään reaaliajassa, vaan vasta jälkikäteen mittausten päätyttyä. Laskentatehojen kasvaessa ja algoritmien kehittyessä reaaliaikainen kinemaattinen mittaus, *RTK* yleistyi nopeasti 1990-luvun lopulla.

Suhteellisessa mittauksessa päästään maanmittaussovelluksissa vaadittavaan tarkkuuteen. Mikään koordinaattiautomaatti tämäkään ei ole; usein lupailtu suhteellinen tarkkuus 1 ppm ( $10^{-6}$ , 1 mm/km) voi joissakin tapauksissa olla lähes saavuttamattomissa. Toisaalta puheet  $10^{-9}$  suhteellisesta tarkkuudesta eivät nekään välttämättä ole tuulesta temmattuja; tämä vain vaatii pitkiä havaintojaksoja, pitkiä vektoreita ja kaikkien mahdollisten virhelähteiden huomioon ottamista, eikä se onnistu rutiinimittauksissa.

Joissakin geodeettisissa sovelluksissa seurataan jopa millimetrien suuruisia liikkeitä. Kaikkein tarkimmissa sovelluksissa ei yritetäkään mitata koordinaatteja, vaan seurataan mittauspisteiden välillä tapahtuvia *muutoksia*. Tällöin käytetään hyväksi järjestelmän *erotuskykyä*. Pysyvien, jatkuvasti havaitsevien seuranta-asemien avulla voidaan seurata vaikka Suomen maannousua tai mannerlaattojen liikkeitä.

Vastaanotintyyppistä riippuu, mitä sillä voidaan havaita ja millaisiin tarkkuuksiin on mahdollista päästä. Vastaanottimet voidaan jakaa yksi- ja kaksitaajuuslaitteisiin, tulevaisuudessa yksitaajuus- ja monitaajuuslaitteisiin, sekä yhden järjestelmän että useamman järjestelmän havaintoihin pystyviin vastaanottimiin.

**Taulukko 1.2:** GPS:n, Galileon ja GLONASSin ominaisuuksia.

	GPS	Galileo	GLONASS
Satelliitteja	24 + 3	27 + 3	24
Massa [kg]	1665 (2) 1816 (2A) 2030 (2R)	625	1400 700 (K*)
Ratatasoja	6	3	3
Radan säde [km]	26560	29994	25510
Kiertoaika [h]	11h 58m	14h 4m	11h 15.7m
Inkлинаatio [°]	55	56	64.8
Signaaleja	2 (3*)	5	2 (3*)
Taajuudet [MHz]	L1 = 1575.42 L2 = 60/77 L1 L2 = 1227.6 L5 = 1176.45*	E2–L1–E1 = 1575.42† E5a = 1176.45 E5b = 1207.14 E6 = 1278.75	L1 = 1602–1609.3 L1 = 1598–1605.3* L2 = 1246–1251.7 L2 = 1242.9–1248.6* L2 = 7/9 L1
	* tulevaisuudessa		
	† keskitaajuus		

Esimerkiksi GPS-signaalia havaitsevat yksitaajuuslaitteet havaitsevat vain L1-taajuutta ja siitäkin usein vain C/A-koodia. Tällaiset laitteet sopivat navigointiin tai differentiaalimittauksiin. Mikäli laite tallettaa myös kanta-aallon vaiheinformaation, se soveltuu myös yhdellä taajuudella tehtäviin suhteellisiin mittauksiin. Kaksitaajuusvastaanottimet havaitsevat yleensä sekä L1:n että L2:n kanta-aallon vaihetta, C/A-koodia ja mahdollisesti myös P-koodia ja signaalin Dopplersiirtymää. P-koodin ollessa salattu sitä ei saada suoraan, mutta laitevalmistajat ovat kehittäneet menetelmiä, joilla P-koodi voidaan jälkilaskentaa varten rekonstruoida riittävän tarkasti.

Mittaukset ovat nopeutuneet ja helpottuneet mutta samalla käyttäjäkunta on muuttunut heterogeeniseksi. Havaintojen näennäinen helppous ja kauppiamiehen katteettomat puheet ovat luoneet illuusion ihmelaitteistosta, jonka avulla ongelma kuin ongelma ratkeaa kivuttomasti ja millimetrin tarkasti. Kun satelliittimittauksen järjestelmästä on vielä päästävä kartalle, on väitteisiin senttimetriluokan koordinaattivirheistä syytä suhtautua terveellä epäluulolla. Systemaattiset virheet, lähtöpisteen koordinaattiepävarmuus ja mahdolliset muunnoksessa syntyvät virheet jäävät usein tuntemattomiksi, joten käyttäjälle ei jää juurikaan keinoja arvioida mittaustensa todellista tarkkuutta. Jopa monet laskentaohjelmistot tuntuvat olevan ylioptimistisia ilmoittamiensa tarkkuuslukemien suhteen. Tällä hetkellä reaaliai-

kaisissa mittauksissa ei yleensä ole kontrollia karkeiden virheiden varalta, joten niiden käyttö kaikkiin sovelluskohteisiin ei ole edes hyväksyttävää.

Tulevaisuudessa on mahdollista päästä jopa senttimetrien reaaliaikaiseen paikannustarkkuuteen yhtä vastaanotinta käytettäessä. Tälläkin hetkellä tämä onnistuu jälkilaskentana, jos käytössä on satelliittien tarkat ratatiedot ja vastaanotin on ollut samalla pisteellä usean tunnin ajan.

Jatkossa puhumme satelliittimittauksista pääasiassa maanmittauksen ja geodesian sovellusten kannalta. Tämä ei suinkaan rajoita skaalaamme, sillä GNSS:ää käytetään pienistä paikallisista mittauksista aina globaaliin mannerlaattojen liiketutkimukseen saakka. Oikeastaan ainoa rajoittava asia on tarkkuus: pyrimme tarkastelemaan kaikkia vaikuttavia syitä ja virhelähteitä, jotka monissa sovelluksissa olisivat merkityksettömiä.

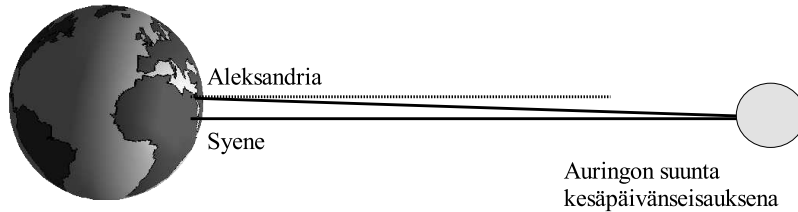
Laitetekniikkaan perehdytään mahdollisimman vähän, sillä valmistajat syyttävät markkinoille jatkuvasti uusia ja yhä kehittyneempiä malleja. Erityisesti Galileon osalta lähivuosina tapahtuu nopeita muutoksia. Mikä tänään pätee jonkun laitevalmistajan yhteen vastaanotinmalliin, ei ehkä enää olekaan totta tämän kirjan ilmestyessä tai vuoden kuluttua. Myös laskentaohjelmat ja niissä olevat virheet vaihtuvat ja laskenta-algoritmit kehittyvät jatkuvasti. Pyrimmekin seuraavassa antamaan yleisesityksen GNSS:n perusteista ja keskittymään asioihin, jotka vielä huomennakaan eivät ole vanhentuneita. Tekniikka vanhenee – vain luonto ja fyysikka ovat pysyviä.

## 1.2 Globaalit mittaukset ennen GPS-aikaa

Ajatus maailmanlaajuisesta yhtenäisestä geodeettisesta järjestelmästä ja aina marnertenvälisiin etäisyyksiin saakka ulottuvista mittausmenetelmistä ei suinkaan ole uusi. Ennen avaruusaikaa mahdollisuudet vain olivat varsin rajalliset. Aurinkoa, Kuuta, planeettoja ja tähtiä on toki käytetty kautta aikain. Varhaisin tunnettu mitaus lienee peräisin *Eratostheneeltä* n. 200 e.Kr., kun hän Auringon avulla määrittä maapallon koon (kuva 1.4).

*Leveysasteen mittaaminen* on suhteellisen helppoa tähtihavaintojen avulla. Tämä voidaan tehdä yksinkertaisesti havaitsemalla Auringon tai tähtien korkeuskulmia. *Pituusasteen määrittämisessä* tarvitaan paitsi sopimus siitä missä *nollameridiaani* sijaitsee, myös taito mitata aikaa riittävän tarkasti.

Kahden paikkakunnan välinen pituusaste-ero tarkoittaa itseasiassa paikkakuntien paikallisaikojen eron määrittämistä. Oma paikallisaika saadaan toki tähti- tai aurinkohavainnoin, mutta myös toisen paikkakunnan paikallisaika täytyisi tietää



**Kuva 1.4:** Eratostheneen menetelmä Maan koon määrittämiseksi. *Eratosthenes* oli kuulut kerrottavan, että kesäpäivänseisauksen aikaan Aurinko paistoi Syenessä kohtisuoraan syvän kaivon pohjalle. Samaan aikaan Aleksandriassa Auringon etäisyys zeniitistä oli  $1/50$  ympyrän kehän pituudesta. Kamelinajajien kertomusten perusteella hän arvioi paikkakuntien välimatkaksi 5000 stadiaa ja oletti, että Syene ja Aleksandria ovat samalla meridiaanilla. Koko maapallon ympärysmitta on siten 50 kertaa paikkakuntien välimatkaa suurempi, joka nykymitoissa vastaisi n. 40 000 km.

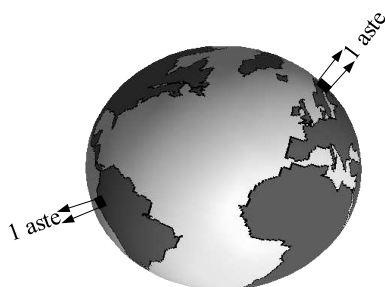
samalla hetkellä. Eräs mahdollisuus on käyttää jotain taivaalla sattuvaa tapahtumaa, joka näkyy yhtä aikaa molemmilta paikkakunnilta. Tällainen on esimerkiksi *kuunpimennys*.

Yllättävää kyllä, vaikka menetelmä tunnettiin jo antiikin aikana, sitä ei tiedetä käytetyn tuolloin kuin kerran. Aleksanteri Suuren ja Dareios III:n välisen Gaugamelan taistelun (331 eKr.) alla sattuneen kuunpimennyksen avulla määritettiin Karthagon ja taistelupaikan läheisen Arbelan kaupungin pituusaste-ero. Kaupunkien paikallisaikojen erotukseksi saatiin kolme tuntia eli  $45^\circ$ , kun todellisuudessa ero on  $2^h 15^m$  eli  $34^\circ$ . Tähän perustuen Välimeri kuviteltiin todellista pidemmäksi aina 1600-luvulle saakka (Markkanen, 2003).

Pituusasteen määrittämisen vaikeus heijastui myös karttoihin. Pohjois-eteläsuunnassa leveysasteet olivat kutakuinkin oikein, mutta itä-länsisuunnassa virheet saattoivat olla hyvinkin suuria. Eräs huomattavimmista historian kulkuun vaikuttaneista virhetulkintoista oli Kolumbuksen aikainen käsitys Maan koosta. Kolumbus uskoi, että purjehdittaessa Portugalista suoraan länteen, Kiinan etäisyys olisi vain  $80^\circ$ . Kun Maan kokokin oli arvioitu kolmanneksen liian pieneksi (eli Eratostheneen uskomattoman tarkka määrittäminen oli unohdettu), ei laivamatka Atlantin yli olisi ollut konsti eikä mikään. Kolumbuksen onneksi väliin osui Amerikka.

Kolumbuksen retkikunnat yrittivät määrittää löytämillään Länsi-Intian saarilla pituusastetta kuunpimennyskeinon avulla. Ensimmäinen yritys vuonna 1494 antoi  $20^\circ$  liian läntisen arvon ja toinen yritys vuonna 1503 oli väärin peräti  $40^\circ$ .

Alankomaalaiset *Gemma Frisius* ja *Willebrord Snellius*, sekä tanskalainen *Tycho Brahe* kehittivät kolmiomittausta 1500- ja 1600-luvuilla. Näin yhä laajempien



**Kuva 1.5:** Maupertuis’*n* ja de la Condaminen retkikuntien mittaukset osoittivat että yhtä astetta vastaava meridiaanikaari on pitempi lähellä napoja kuin päiväntasaajalla. (Kuvassa suhteita on liioiteltu.)

alueiden tarkka kartoittaminen tuli mahdolliseksi. Pituusasteen ongelma ei tosin kadonnut. Vielä 1600-luvun loppupuolella Ludvig XIV valitti menettäneensä maata enemmän tähtitieteilijöille kuin vihollisilleen, kun Ranskan länsirannikko oli tarkentuneiden pituusastemittausten myötä siirtynyt aimo matkan itään.

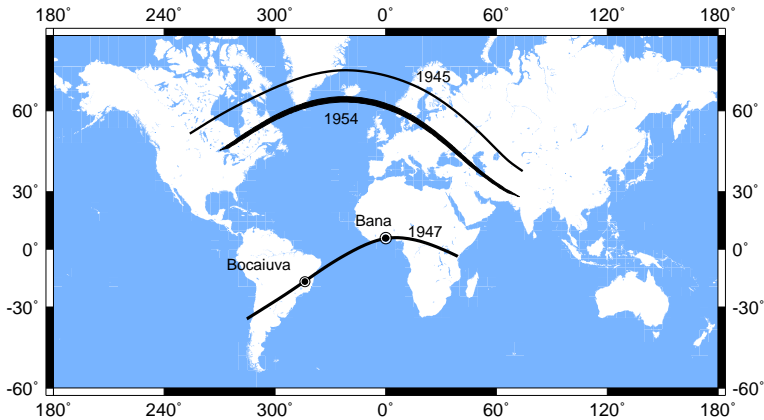
Vuonna 1737 *Pierre-Louis Moreau de Maupertuis’*n** johtaman retkikunnan mittaukset osoittivat, että napapiirin lähellä Tornionjokilaaksossa asteen pituinen meridiaanikaari oli pitempi kuin Ranskassa. Tämä todisti Maan litistyneisyyden. *Friedrich Georg Wilhelm Struven* suunnittelema ja toteuttama astemittaus Mustalta mereltä Jäämerelle 1800-luvun puolivälissä tarkensi edelleen Maan koon ja muodon tuntemusta.<sup>1</sup>

Monia muita, varsin laajojakin geodeettisia mittauksia tehtiin aikojen kuluessa, mutta vielä 1900-luvun puoltaväliä lähestyttäessä valtameri muodosti ylikäymättömän esteen. Ei ollut käytännön keinoja yhdistää tarkasti eri mantereilla olevia geodeettisia verkkoja. Kuuluisa matemaatikko ja taivaanmekaniikan tutkija *Leonhard Euler* oli 1700-luvulla esittänyt auringonpimennysten käyttämistä pitkien välimatkojen mittaamiseen. Koska varjon nopeus tunnetaan, riittää että havaitaan pimennysvyöhykkeellä olevalla kahdella paikkakunnalla täydellisen vaiheen alkamisajat. Tästä voidaan laskea paikkakuntien välimatka.

Eulerin aikana ei ollut keinoja toteuttaa tällaista mittauksia. Se pystyttiin tekemään vasta 1947, jolloin *Kukkamäen* ja *Hirvosen* johtamat retkikunnat mittasivat Etelä-Amerikan ja Afrikan välimatkan n. 140 m:n tarkkuudella. (Kukkamäki ja Hirvonen, 1954; Poutanen, 2003).

Akateemikko *Yrjö Väisälän* jo 1940-luvulla kehittämää *tähtikolmiomittauksia* käytettiin aina 1970-luvulle saakka. Tässä ilmapallolla lähetettiin 25–30 km:n korkeuteen valonlähde, jonka paikat valokuvattiin tähtitaustaa vasten samanaikaisesti kolmelta eri havaintoasemalta. Tarina kertoo, että jatkosodan aikana Yrjö Väisälä

<sup>1</sup>*Struven ketju* hyväksyttiin UNESCO:n maailmanperintölistalle vuonna 2005.



**Kuva 1.6:** Auringonpimennyksiä yritettiin käyttää mannertenvälisten etäisyyksien mittaamisessa 1940- ja 1950-luvuilla. Vain 1947 pimennyksen mittausta onnistui.

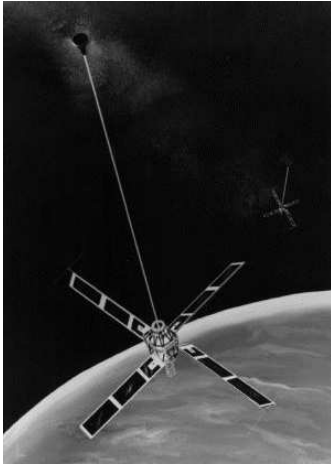
oli Turussa pikkuplaneettoja kuvatessaan nähnyt ilmatorjuntatykkien välähdyksiä Helsingin yläpuolella ja saanut tästä ajatuksen pitkien välimatkojen mittaamiseksi. Väisälä kuitenkin lienee keksinyt idean jo vuosia aikaisemmin. Hän esitti menetelmänsä periaatteet Suomalaisen tiedeakatemian kokouksessa vuonna 1946, jossa hän mainitsi sovelluskohteena myös mannertenväliset mittaukset.

Ensimmäiset kokeet säähavaintopalloilla ja salamalampuilla Väisälä teki jo 1940-luvun lopulla, mutta vasta 1960–1970 lukujen vaihteessa *Juhani Kakkurin* johdolla mitattiin Etelä-Suomeen viisi pistettä käsittävä verkko, jossa pisimmät sivut olivat yli 200 kilometriä. Esimerkiksi kolmiossa Naulakallio – Tuorla – Niinisalo sulkuvirhe (ts. mitattujen kolmion kulmien summan ero oikeaan nähden) on 0.68". Kolmion pisin sivu oli 229 km (Kakkuri, 1973).

Suurempiin kolmioihin päästiin satelliittien avulla. Mannertenväliset mittaukset tulivat mahdollisiksi vuoden 1957 jälkeen kun ensimmäinen *Sputnik* kiersi maapalloa. Erityisesti Yhdysvallat lähetti useita optisiin havaintoihin tarkoitettuja satelliitteja. Tällainen oli mm. 30-metrinen *Pageos* (Passive Geodetic Earth Orbiting Satellite), joka muistutti lähinnä jättiläismäistä kiiltävää ilmapalloa. Auringon valaisemaa kirkasta satelliittia oli helppo kuvata tähtitaustaa vasten. Mittaustarkkuus oli n. 0.5" (Kelsey ja Ashkenazi, 1979; Seeber, 2003).

Satelliittien avulla oli 1970-luvulle tultaessa mitattu jo 45 pistettä käsittävä globaali verkko noin 20 metrin absoluuttisella ja 5 metrin suhteellisella tarkkuudella. Asemien välimatkat olivat 3000–4000 km.

Näillä menetelmillä on nykyisin enää lähinnä historiallista mielenkiintoa, kos-



**Kuva 1.7:** Oscar-sarjan Transit Doppler -satelliitti. (US Naval Observatory)

ka muiden mittausten tarkkuus on parempi. Saavutettu suuntatarkkuus n.  $0.5''$  vastaa 15 metrin epävarmuutta nykyisin satelliittilaserhavainnoissa käytetyn *Lageos*-satelliitin etäisyydellä (n. 6000 km). Satelliittilaserin etäisyysvirhe on ainoastaan senttimetrin suuruusluokkaa. Optiset havainnot olivat myös äärimmäisen työläisiä ja pahasti säiden armoilla.

Radiotaajuuksilla toimivaa, säästä riippumatonta *Transit Doppler*-paikannusta kehitettiin jo 1960-luvun alussa. Aluksi se oli vain sotilaskäytössä, ja siviilikäyttöön se vapautettiin 1967. Ensimmäiset (helposti) siirrettävät Doppler-vastaanotimet tulivat 1960–1970-lukujen taitteessa samalla kun laukaistiin useita Doppler-satelliitteja (mm. Oscar-sarja). Järjestelmä käsitti kaikkiaan kuusi satelliittia, joista viimeinen laukaistiin 1988.

Useita laajoja kansainvälisiä Doppler-kampanjoita järjestettiin 1970-luvun lopulla ja 1980-luvun alkupuolella. Parhaimmillaan Transit Doppler -järjestelmällä päästiin paikannuksessa n. metrin absoluuttiseen ja 0.25 m suhteelliseen tarkkuuteen.

Transit-satelliitit olivat n. 1100 km:n korkuisilla ympyräradoilla, jolloin niiden kiertoaika oli n. 107 minuuttia. Satelliitit lähettivät kahta kantaaltoa taajuuksilla 400 MHz ja 150 MHz, joihin oli moduloitu mm. satelliitin ratatiedot. Vastaanotin vertaa havaittua kantaallon taajuutta paikallisoskillaattorin tuottamaan taajuuteen. Satelliitin liikkeen vuoksi taajuudessa on tapahtunut dopplersiirtymä

$$f_{\text{obs}} = f_0 \left( 1 - \frac{1}{c} \frac{dS}{dt} \right) \quad (1.1)$$

missä  $f_{\text{obs}}$  on havaittu taajuus,  $f_0$  lepotaajuus,  $c$  valon nopeus ja  $dS/dt$  satelliitin näkösäteen suuntainen nopeus. Kaavaa (1.1) voidaan käyttää koska satelliitin nopeus  $v \ll c$ . Kun satelliitin rata ja nopeus havaitsijan suhteen tunnetaan, voidaan havaintopaikka laskea. Geodeettiset Doppler-mittaukset loppuivat käytännössä GPS:n yleistymisen myötä. Järjestelmän ylläpito lopetettiin 1996 ja niin viimeinen Doppler-satelliitti sammui kenenkään sitä juuri kaipaamatta.

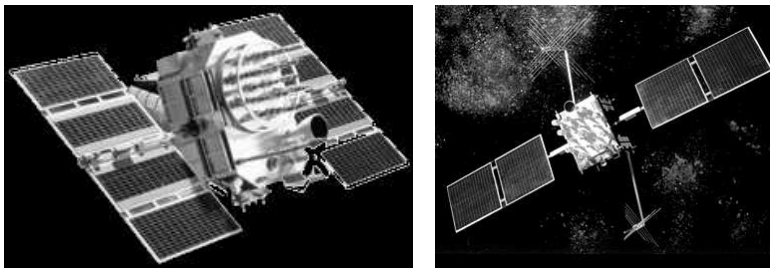
### 1.3 GPS

GPS-järjestelmä on Yhdysvaltain puolustusministeriön (DoD, Department of Defence) kehittämä, ja alun perin sotilaskäyttöön tarkoitettu. Käytännön koordinoijana toimii Navstar GPS Joint Program Office (JPO), jossa siviilikäytön yhteysvirasto on Yhdysvaltain liikenneministeriö (Department of Transport, DOT).

GPS:n juuret juontavat jo 1960-luvulle, jolloin Yhdysvaltain laivaston TIMATION ja ilmavoimien 621B projekteissa suunniteltiin passiivista satelliitteihin perustuvaa navigointijärjestelmää. Vuonna 1973 hyväksyttiin Pentagonin asettaman työryhmän (NAVSEG, Joint Services Navigation Satellite Executive Steering Group) laatima suunnitelma, josta sittemmin kehittyi GPS. Vaatimuksina oli mm. muutaman metrin paikannustarkkuus, häiriösuojisuus ja yksisuuntaisuus, ts. käyttäjä ei lähetä satelliitteihin päin mitään signaalia.

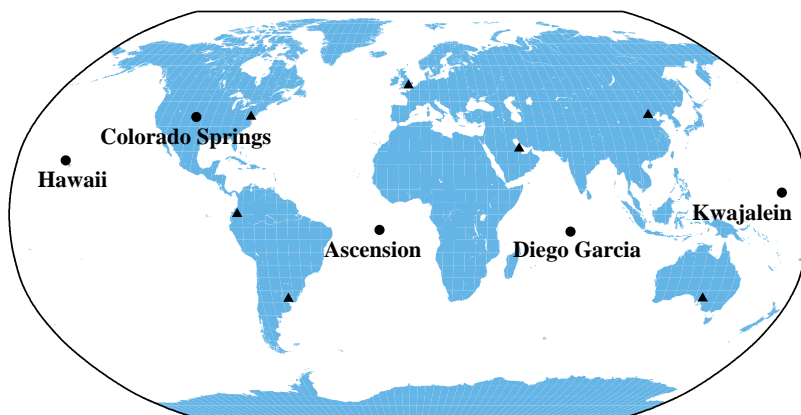
GPS-aika voidaan katsoa alkaneeksi vuonna 1978 kun Navstar 1 -satelliitti laukaistiin ja kun vuotta myöhemmin tulivat ensimmäiset siirrettävät vastaanottimet. Useista viivästyksistä johtuen järjestelmän lopullinen valmistuminen myöhästyi vuosilla ja vasta vuonna 1995 se oli suunnitellussa kokoonpanossaan.

GPS-järjestelmä on kolmiosainen: *satelliitit*, *kontrolliverkko* ja *käyttäjät*. Kontrolliverkon tarkoituksena on tarkkailla satelliittien tilaa, määrittää niiden ra-



**Kuva 1.8:** Kaksi GPS-satelliittimallia (2A, 2R). (Lockheed Martin / NASA)





**Kuva 1.9:** GPS-kontrolliasemat (ympyrät) ja NGA:n seuranta-asemat (kolmiot).

taelementit ja kellovirheet, sekä päivittää satelliittien lähettämiä tietoja. Kontrolliverkon ylläpito ja johto tapahtuu Colorado Springsissä olevasta komentokeskuksesta.

Alun perin maa-asemia oli vain neljä, nimittäin Diego Garciasa, Ascensionissa, Kwajaleinissa ja Havaijilla. Myöhemmin WGS84-koordinaattijärjestelmän realisaation ja satelliittien ratatietojen parantamiseksi asemien määrää lisättiin NGA:n (National Geospatial-Intelligence Agency; vuoteen 2004 saakka NIMA, National Imagery and Mapping Agency, sitä ennen DMA, Defence Mapping Agency) seuranta-asemilla, jotka sijaitsevat Australiassa, Argentiinassa, Bahrainissa, Ecuadorissa, Englannissa, Kiinassa ja Yhdysvalloissa (NIMA, 2000). GPS-järjestelmän maa-asemia on häviävän vähän esimerkiksi IGS-asemiin verrattuna, joiden avulla siviilikäyttöä varten radat saadaan alle desimetrin tarkkuudella.

GPS-satelliitit kiertävät maapalloa runsaan 20 000 km korkeudessa. Satelliittien radan säde on siten n. 26 560 km ja *kiertoaika* 1/2 tähtivuorokautta (kaksi minuuttia vaille 12 tuntia seinäkelloaikaa). Järjestelmä käsittää 24 satelliittia kuudella ratatasolla, joiden *inklinaatio*, ts. radan kaltevuus ekvaattoriin nähden on n. 55°. Kiertoradalla on myös muutamia varasatelliitteja. Vuoden 2004 alussa satelliitteja oli 28. Joka hetki on näkyvissä vähintään kuusi satelliittia; neljä on minimimäärä, joka tarvitaan jatkuvaan kolmiulotteiseen paikannukseen.

Vuosien 1978 ja 1985 välisenä aikana lähetettiin kymmenen ns. Blokki I testisatelliittia, joiden radan inklinaatio oli 63°. Viimeinen Blokki I satelliitti poistui käytöstä vuonna 1995.

Vuoden 1989 alussa lähetettiin ensimmäinen nykyisen sukupolven Blokki II:n

**Taulukko 1.3:** GPS-satelliitit v. 2004 kesäkuussa (Lähde: United States Naval Observatory (USNO), <http://tycho.usno.navy.mil/gps.html>).

---

LAUNCH ORDER	PRN	LAUNCH DATE	FREQ STD	PLANE
II-5	17	11 DEC 89	Rb	D6
II-9	15	01 OCT 90	Cs	D5
IIA-11	24	04 JUL 91	Cs	D1
IIA-12	25	23 FEB 92	Cs	A2
IIA-14	26	07 JUL 92	Rb	F2
IIA-15	27	09 SEP 92	Rb	A4
IIA-16	01	22 NOV 92	Cs	F4
IIA-17	29	18 DEC 92	Rb	F5
IIA-19	31	30 MAR 93	Rb	C5
IIA-20	07	13 MAY 93	Rb	C4
IIA-21	09	26 JUN 93	Cs	A1
IIA-22	05	30 AUG 93	Cs	B4
IIA-23	04	26 OCT 93	Rb	D4
IIA-24	06	10 MAR 94	Rb	C1
IIA-25	03	28 MAR 96	Cs	C2
IIA-26	10	16 JUL 96	Cs	E3
IIA-27	30	12 SEP 96	Rb	B2
IIA-28	08	06 NOV 97	Cs	A3
IIR-2	13	23 JUL 97	Rb	F3
IIR-3	11	07 OCT 99	Rb	D2
IIR-4	20	11 MAY 00	Rb	E1
IIR-5	28	16 JUL 00	Rb	B3
IIR-6	14	10 NOV 00	Rb	F1
IIR-7	18	30 JAN 01	Rb	E4
IIR-8	16	29 JAN 03	Rb	B1
IIR-9	21	31 MAR 03	Rb	D3
IIR-10	22	21 DEC 03	Rb	E2
IIR-11	19	20 MAR 04	Rb	C3

---

satelliiteista. Myöhempiä, hieman modifioituja satelliitteja kutsutaan Blokki IIA-satelliitiksi. Pääosa nykyisistä käytössä olevista satelliiteista on tyyppiä IIR. Ensimmäinen laukaistiin radalle vuonna 1998. Suunnitelluista 28 satelliitista muutama on vielä lähettämättä (2005), ja näihin tullaan tekemään muutoksia jotka

parantavat GPS:n suorituskykyä. (McDonald, 2002)

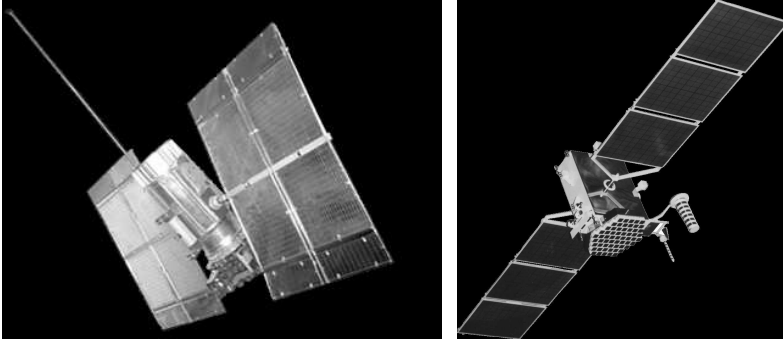
Alun perin uudistukset oli suunniteltu tehtäviksi vasta Blokki IIF -satelliitteihin. Aikataulumuutosten vuoksi näiden lukumäärä jää vain 12:een alun perin aiotusta runsaasta kolmesta kymmenestä, sillä Blokki III:n satelliitit ovat jo suunnitteilla. Koska satelliittien elinikä on tyypillisesti 5–8 vuotta, kestää jopa vuosikymmenen ennen kuin kaikki vanhat satelliitit on saatu korvatuiksi uusilla.

GPS-satelliitit lähettävät kantoaaltoa kahdella taajuudella, L1 (1575.42 MHz, aallonpituus 19 cm) ja L2 (1227.6 MHz, 24 cm). Kantoaaltoihin on moduloitu navigoinnissa käytettävät koodit, *C/A-koodi* ja *P-koodi*. *C/A-koodi* on julkinen, mutta *P-koodi* on yksinomaan sotilaskäytössä. Nyrkkisääntönä voi pitää, että *C/A-koodia* käyttävät (siviili-)navigointivastaanottimet pääsevät muutaman metrin paikannustarkkuuteen, *P-koodia* käyttävät noin metriin. Kantoaallon taajuus ja signaalien stabiilisuus varmistetaan satelliiteissa olevien cesium-kellojen avulla (vanhemmissa satelliiteissa rubidium-kello; taulukko 1.3, sarake ”FREQ STD”).

*P-koodi* on moduloitu sekä L1- että L2-taajuuteen, *C/A-koodi* vain L1:een. GPS-satelliittien modernisoinnissa *C/A-koodi* lisätään myös L2-taajuuteen ja sen lähetysteho kasvatetaan. Sekä L1- että L2-taajuuteen tulee uusi sotilaskäyttöön tarkoitettu *M-koodi*. Lisäksi tulee kolmas, siviilikäyttöön tarkoitettu taajuus *L5* (1176.45 MHz). Muutokset otetaan käyttöön sitä mukaa kuin uusia satelliitteja lähetetään kiertoradalle.

Erityisen merkittävä muutos oli vuoden 2000 toukokuussa loppunut GPS:n tarkkuuden tarkoituksellinen huonontaminen, *selective availability*, SA. Tämä vaikutti lähinnä navigointisovelluksiin ja DGPSään. Suhteellisissa mittauksissa vaikutus oli paljon vähäisempi. SA:n päälläollessa satelliittien lähettämiin rata- ja kellovirhetietoihin genereoitiin pieni pseudosatunnainen virhe, joka huononsi paikannustarkkuuden muutaman kymmenen metrin tasolle. Sotilaskäyttöön rakennetut vastaanottimet pystyivät poistamaan virheen.

GPS:n käyttö on laitteiden halpenemisen ja yksinkertaistumisen myötä levinnyt räjähdysmäisesti myös harrastus-, ammatti- ja tutkimuskäyttöön. Kännykän kokoiset, vain muutaman sata euroa maksavat navigointivastaanottimet ovat korvaamaton apuneuvo merellä ja maastossa liikuttaessa. Ajoneuvonavigointi, junien kuulutukset, tukkirekkojen ohjailu, taksipalvelut ja GPS-kännykkä-yhdistelmät ovat esimerkkejä GPS:n jokapäiväisestä käytöstä. Erilaisissa maanmittaussovelluksissa GPS on lähes täysin syrjäyttänyt perinteiset menetelmät, erityisesti muutamia satoja metrejä tai kilometrejä pitemmillä matkoilla. Geodesiassa koordinaatiojen luonti ja ylläpito, deformaatiomittaukset tai mannerlaattojen liikkeiden seuraaminen tapahtuvat GPS:n avulla. Edes taivas ei ole enää rajana, sillä yhä useammat Maata kiertävät satelliitit kuljettavat mukanaan GPS-vastaanotinta.



**Kuva 1.10:** GLONASS-satelliitti ja nykyiset satelliitit tulevaisuudessa korvaava GLONASS-K -malli. (<http://www.glonass-center.ru>)

## 1.4 GLONASS

*GLONASS* (ГЛОНАСС, ГЛОбальная НАвигационная Спутниковая Система) on Neuvostoliiton aikana aloitettu satelliittinavigointijärjestelmä, jonka tavoitteet ja toteutus ovat hyvin paljolti GPS:n kaltaisia. Hanke käynnistyi vuonna 1982. Vuoden 1996 alussa järjestelmä lähes saavutti suunnitellun laajuutensa, mutta sen jälkeen talousvaikeudet ovat vaikuttaneet lähetettävien satelliittien määrään. Vähimmillään GLONASS-satelliitteja on ollut alle 10, mutta Venäjän hallituksen tekemän päätöksen mukaan järjestelmä pyritään saamaan täyteen laajuuteensa vuoteen 2011 mennessä. Samalla järjestelmä ja satelliitit uudistuvat täydellisesti. Tähän mennessä GLONASS-havaintoja on voitu käyttää lähinnä täydentämään GPS-mittauksia.

Aivan kuten GPS, myös GLONASS on alun perin sotilaskäyttöön tarkoitettu. Järjestelmään kuuluu 24 satelliittia kolmella ratatasolla, joiden inkliinaatio on  $64.8^\circ$ , ts. napa-alueilla GLONASSin ratageometria on GPS:ää hieman parempi. Rata on pienempi kuin GPS:llä: korkeus merenpinnasta on n. 19 100 km ja kiertoaika  $11^h 15.7^m$ . Satelliitti kulkee saman kohdan yli aina 17 kierroksen kuluttua (32.6 minuuttia vaille kahdeksan keskiaurinkovuorokautta), jolloin Maan pinnalla olevan havaitsijan mielestä satelliittikonstellaatio näyttää samalta.

Aivan näin kauan ei kuitenkaan tarvitse odotella, vaan kiertoajan ja satelliittien lukumäärän vuoksi tilanne muistuttaa myös GPS:n näkymistä. Yhdessä tähti-vuorokaudessa ( $23^h 56^m$ ) satelliitti on ehtinyt kiertää  $17/8$  kierrosta, ts.  $45^\circ$  yli kaksi kierrosta. Kun satelliitteja on samalla tasolla kahdeksan eli ne ovat  $45^\circ$  päässä toisistaan, näkyy radalla seuraavana oleva satelliitti siinä kohtaa, missä edellinen

**Taulukko 1.4:** GLONASS-satelliitit. (Tilanne 5.3.2004 mukainen; lähde GLONASS Home pages, <http://www.glonass-center.ru>).

---

GLONASS number	Cosmos number	Plane/slot	Frequ. chann.	Launch date	Intro date
794	2402	1/02	04	10.12.2003	02.02.2004
789	2381	1/03	12	01.12.2001	04.01.2002
795	2403	1/04	06	10.12.2003	30.01.2004
711	2382	1/05	02	01.12.2001	15.04.2003
701	2404	1/06		10.12.2003	
787	2375	3/17	05	13.10.2000	04.11.2000
783	2374	3/18	10	13.10.2000	05.01.2001
792	2395	3/21	05	25.12.2002	31.01.2003
791	2394	3/22	10	25.12.2002	10.02.2003
793	2396	3/23	11	25.12.2002	31.01.2003
788	2376	3/24	03	13.10.2000	21.11.2000

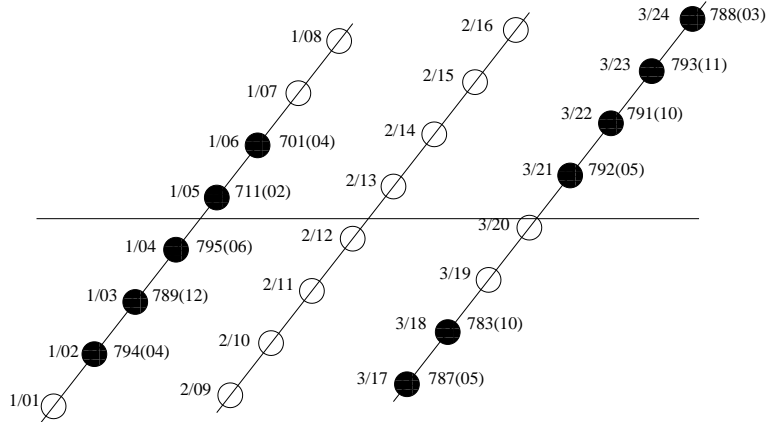
---

satelliitti näkyi vuorokautta aikaisemmin. Konstellatio toistuu GPS:n tavoin samannäköisenä yhden tähtivuorokauden välein, satelliitit vain ovat vaihtuneet.

GLONASSin rata on taivaanmekaniikan kannalta (ks. luku 3) huomattavasti edullisempi kuin GPS:n. Koska GPS-satelliitit ovat radoilla, joilla ne joka vuorokausi ovat aina saman paikan yläpuolella, voimistuvat pienetkin häiriöt (vrt. keinin tönäiseminen aina samassa kohtaa), jolloin rataa joudutaan korjaamaan sangen usein. GLONASSilla tämä ongelma on huomattavasti vähäisempi.

GLONASS-satelliitit ovat olleet GPS-satelliitteja lyhytikäisempiä. Niitä on lähetetty kaikkiaan lähes 90 kappaletta. Ensimmäisten satelliittien suunniteltu elin-aika oli vain vuosi, mutta uudempien elinajaksi on luvattu viisi vuotta ja tulevien mallien jopa 10 vuotta. Massaltaan 1400 kg satelliitteja nelivaiheinen Proton-kantoraketti pystyy nostamaan kiertoradalle kerrallaan kolme kappaletta. Satelliiteissa on myös kulmaprismaheijastin satelliittilaseria varten.

GLONASS lähettää signaalia kahdella taajuudella, mutta toisin kuin GPS:llä, jokaisella satelliitilla on oma taajuutensa. GLONASSin taajuuksia on jouduttu muuttamaan jo kahdesti, mikä kuvastaa näillä taajuuksilla vallitsevaa ruuhkaa ja kansainvälisissä sopimusneuvotteluissa käytävää kauppaa. GLONASSin käyttämällä 1–2 GHz välisellä alueella operoivat niin GPS, tuleva Galileo kuin kännykkäliikenne ja langattomat lähiverkot. Päälle päätteeksi samaan sumaan osuu



**Kuva 1.11:** GLONASS-satelliittien sijoittuminen ratatasoille. Satelliitit ovat kolmella ratatasolla, jotka ovat  $120^\circ$  välein. Kullakin ratatasolla on 8 satelliittia  $45^\circ$  päässä toisistaan ja vierekkäisten ratatasojen satelliitteja on siirretty  $15^\circ$ . Ratatason vasemmalla puolella oleva numero on satelliitin paikkanumero (slot), oikealla puolella on GLONASS-numero ja suluisissa satelliitin käyttämän taajuuskanavan numero. Toiminnassa olevat satelliitit on merkitty mustalla. Tilanne on 5.3.2004 mukainen. (Lähde GLONASS Home pages, <http://www.glonass-center.ru>.)

myös neutraalin vedyn 21 cm (1420 MHz) spektriviiva. Vaikka radioastronomit ovat yleensä heikoilla taajuuksia jaettaessa, heistä kun ei ole taloudellista hyötyä, on tämä Linnunradan kartoituksessa ensiarvoisen tärkeä taajuus onnistuttu toistaiseksi pitämään vapaana kaupallisesta saasteesta.

Alun perin GLONASS-signaali oli levittyneenä melko laajalle taajuusalueelle,  $f_{L1} = 1602 \text{ MHz} + 562.5 \text{ kHz} \times m$ , missä  $m = 1, \dots, 24$  on satelliitin numero. L2-taajuus poikkeaa L1-taajuudesta siten että  $f_{L1}/f_{L2} = 9/7$ . Vuodesta 1998 lähtien vastakkaisilla puolilla maapalloa olevat satelliitit siirtyivät käyttämään samoja taajuuksia, jolloin selvittiin 12 taajuudella. Vuodesta 2005 GLONASS:in taajuusalue siirretään väliin 1598.0625 – 1605.5 MHz. Tämä tietää ongelmia GLONASS-vastaanotinten omistajille, jotka saattavat joutua päivittämään vastaanottimensa uusien taajuuksien mukaisiksi.

Jokainen GLONASS-satelliitti lähettää samaa kahta koodia, jotka vastaavat GPS:n C/A- ja P-koodeja. Niitä ei ole kryptattu, eikä niihin ole lisätty pseudosatunnaisia virheitä, joten myös GLONASSin avulla päästään yhdellä vastaanotimella alle 10 metrin paikannustarkkuuteen. Toistaiseksi käytön esteenä on ollut satelliittien vähäinen määrä. Tavallisimmin vastaanottimet havaitsevat sekä GPS- että GLONASS-satelliitteja. GLONASS-satelliittien määrän lisääntyminen

**Taulukko 1.5:** GLONASS-satelliittien käyttämät signaalitaajuuudet. Vuosina 1998–2004 käytössä olivat kanavat 0–14, vuodesta 2005 eteenpäin kanavat –7 – +6.

---

Kanava	Taaajuus [MHz]	
	L1	L2
13	1609.3125	1251.6875
12	1608.75	1251.25
11	1608.1875	1250.8125
10	1607.625	1250.375
09	1607.0625	1249.9375
08	1606.5	1249.5
07	1605.9375	1249.0625
06	1605.375	1248.625
05	1604.8125	1248.1875
04	1604.25	1247.75
03	1603.6875	1247.3125
02	1603.125	1246.875
01	1602.5625	1246.4375
00	1602.0	1246.0
-01	1601.4375	1245.5625
-02	1600.8750	1245.1250
-03	1600.3125	1244.6875
-04	1599.7500	1244.2500
-05	1599.1875	1243.8125
-06	1598.6250	1243.3750
-07	1598.0625	1242.9375

---

parantaa paikannusmahdollisuuksia huonoissa olosuhteissa, joissa pelkkiä GPS-satelliitteja ei näy riittävästi.

GLONASS käyttää referenssijärjestelmänään PZ-90:tä (jota aiemmin kutsuttiin SGS90:ksi; Soviet Geodetic System). Datumiin liittyvä ellipsoidi (ks. luku 2) on Krassovskin ellipsoidi, joka poikkeaa alle 20 m WGS84-ellipsoidista.

GLONASS-satelliittien seuranta-asemia on vain entisen Neuvostoliiton alueella, joten satelliittien itsensä lähettämät ratatiedot ovat GPS-satelliittien vastavia epätarkempia. Ongelma voidaan hoitaa toki samoin kuin GPS:n tapauksessa, jossa IGS-verkon kautta saadaan jälkilaskentana satelliittien rataelementit pari kertaluokkaa tarkemmin kuin satelliittien itsensä lähettäminä.

Tarkkaa aikamääritystä tarvitsevien on myös otettava huomioon, että GLO-

NASS käyttää aikajärjestelmään Venäjän yleisajan realisaatiota UTC(SU), GPS puolestaan Yhdysvaltain laivaston observatorion realisaatiota UTC(USNO). Vaikka molemmat noudattavat kansainvälisen atomiajan määritelmää (ks. luku 2), voivat nämä paikallisten atomikellojen avulla ylläpidettävät realisaatiot poiketa toisistaan joitakin mikrosekunteja. Huomattavasti suurempi ero on se, että GLONASSin käyttämään aikaan lisätään samat karkaussekunnit kuin UTC:hen, mutta GPS-aikaan niitä ei lisätä (luku 2). Lisäksi GLONASSin aika on kolme tuntia edellä UTCtä, ts. Moskovan vyöhykeajan mukaisesti.

GLONASS-satelliittien uudistaminen alkaa taajuusalueen muuttamisen myötä (GLONASS-M). Samalla L2-taajuuden lähetysteho nostetaan ja kellojen stabiilisuutta parannetaan. Seuraavan sukupolven satelliitteihin, GLONASS-K, tulee GPS:n tapaan kolmas taajuus ja satelliittien odotettava elinikä kasvaa 10 vuoteen. Koska satelliittien koko on vain puolet nykyisistä, voidaan yhdellä Proton-kantoraketilla lähettää kerralla kuusi satelliittia.

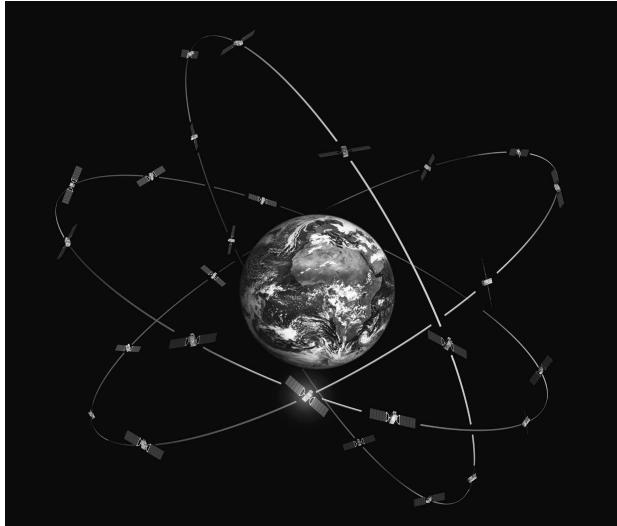
Kansainvälisen geodeettisen assosiaation alainen GLONASS-palvelu IGLOS (International GLONASS Service) alkoi IGEX-nimisenä pilottiprojektina vuonna 1998. Seuranta-asemia on ollut muutamia kymmeniä, Suomesta Metsähovi. Käytännössä asemat kuuluvat myös GPS-palveluun. IGLOS-projektin tarkoituksena on määrittää GLONASS-satelliittien tarkat radat ja pitää yllä pysyvien seuranta-asemien tuottaman datan arkistoa. Näiden havaintojen avulla GLONASSin käyttämän koordinaatti- ja aikajärjestelmän yhteys GPS:n käyttämiin on voitu määrittää tarkasti.

## 1.5 Galileo

Eurooppalainen satelliittipaikannusjärjestelmä *Galileo* mullistaa valmistuessaan navigoinnin ja paikannuksen. Se on GPS:stä ja GLONASS:sta poiketen siviilipaikannusjärjestelmä, jonka suunnittelussa on otettu huomioon mm. ilmailun vaatimukset luotettavuudesta ja katkottomasta saatavuudesta. Osa Galileon signaaleista on vapaasti käytettävissä, mutta se sisältää myös kaupallisia ja viranomaisille tarkoitettuja toimintoja.

Galileon signaalirakenteen ja taajuuksien käytöstä EU:n ja Yhdysvaltojen välillä tehtyjen sopimusten mukaan GPS:n ja Galileon yhteiskäyttö tulee olemaan varsin helppoa, sillä osa taajuuksista on samoja. Samanaikaisesti näkyvien satelliittien määrä kaksinkertaistuu nykyisestä. Jos GLONASS ja Galileo täydentyvät suunnitelmien mukaisesti, on paikannussatelliitteja yli 80 kappaletta vuoteen 2010 mennessä. Satelliittien määrä on merkittävä esimerkiksi RTK-mittauksissa.





**Kuva 1.12:** Galileo-järjestelmän 30 satelliittia ovat kolmella ratatasolla. (Kuva ESA.)

Galileon suunnittelu- ja rakennuskustannuksiksi on arvioitu runsaat 3 miljardia euroa. Summaa voidaan verrata siihen, että sillä saadaan noin 100 kilometriä rautatietä, tai että Suomen liikenneväylien (tiet, radat, vesiväylät) vuotuiset ylläpitokustannukset ovat noin miljardi euroa. Suomen tieliikenneonnettomuuksien yhteiskunnalle aiheuttamat kokonaiskustannukset ovat vuodessa noin 3 miljardia euroa. (Liikenne- ja viestintäministeriö, 2003.) Toiset 3 miljardia arvioidaan Galileon 20 vuoden käyttökustannuksiksi. Erityisesti eurooppalainen avaruusteollisuus odottaa Galileon tuovan runsaasti alaan liittyviä tilauksia. Satelliittien lisäksi tarvitaan maa-asemia, mutta ennen kaikkea käyttäjien tarvitsemia vastaanottimia ja niihin liittyviä palveluita.

Galileon navigointitarkkuudeksi on luvattu 6 metriä (90% ajasta) ja yhdessä GPS:n kanssa käytettynä parempi kuin 4 metriä. GPS:stä poiketen Galileo-järjestelmään sisältyy myös tieto signaalin tarkkuudesta ja luotettavuudesta. Suhteellisessa paikannuksessa käyttö on samanlaista kuin GPS:n tapauksessa, ja tarkkuuden voi olettaa olevan samaa luokkaa. Satelliittien reaaliajassa lähettämien ratatietojen tarkkuudeksi luvataan alle 10 cm, joka on huomattavasti parempi kuin GPS-satelliittien lähettämien ratatietojen tarkkuus.

Ensimmäinen testisatelliitti on tarkoitus laukaista vuoden 2005 aikana, ja koko järjestelmän on suunniteltu olevan toimintakunnossa vuonna 2008. Valmistuttuaan järjestelmä käsittää 30 satelliittia (27 varsinaista + 3 varasatelliittia) kol-



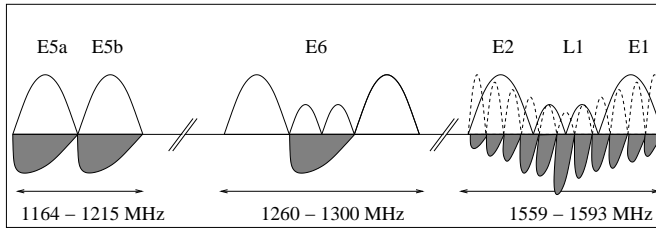
**Kuva 1.13:** Galileo-järjestelmän satelliitti. (Kuva ESA.)

mella ratatasolla, ts. jokaisella ratatasolla on 9 (+ 1) satelliittia. Satelliitin massa on 625 kg ja koko  $2.7 \times 1.2 \times 1.1 \text{ m}^3$ . Yhdellä Ariane 5 -kantoraketilla voidaan kerralla viedä jopa kahdeksan Galileo-satelliittia. Koska jokaisella ratatasolla on yksi varasatelliitti, voidaan vikaantunut satelliitti korvata varasatelliitilla viikon kuluessa. Satelliitin eliniäksi on suunniteltu 15 vuotta.

Radan säde on 29990 km (korkeus maanpinnasta 23616 km) ja radan inkliinaatio  $56^\circ$ . Kiertoaika on siten  $14^{\text{h}}4^{\text{m}}$  eli runsaat 2 tuntia pitempi kuin GPS-satelliitilla. Yhdessä tähtivuorokaudessa Galileo-satelliitti ehtii kiertää  $1 \frac{2}{3}$  kierrosta Maan ympäri. Samoin kuin GLONASSin tapauksessa, konstellaatio kuitenkin näyttää samalta kuin tähtivuorokautta aikaisemmin, koska  $40^\circ$  välein olevista satelliiteista kuudes on nyt samassa kohtaa rataa.

Järjestelmän maasegmenttiin suunnitellaan kuuluvaksi kymmenen linkkiasemaa, joiden lähettävät satelliiteille kontrollikeskuksen päivittämät ratatiedot, kellorajaukset ja järjestelmän yleiseen toimivuuteen liittyvät tiedot. Kontrollikeskuksia on kaksi ja radan laskentaan käytettäviä ja signaalin luotettavuutta seuraavia asemia 29 kappaletta. Signaalin katkottomuutta ja luotettavuutta valvotaan jatkuvasti, ja kriittisten sovellutusten vaatima luotettavuus ja katkottomuus pystytään takaamaan toisin kuin GPS:n tapauksessa, jossa tällaista ominaisuutta ei järjestelmään ole rakennettu.

Toinen merkittävä GPS-järjestelmästä poikkeava ominaisuus on pelastuspal-



**Kuva 1.14:** Galileon signaalit. GPS:n L1-signaali on samalla taajuudella E1–L1–E2 -signaalin kanssa, ja tuleva L5-signaali on E5a:n kanssa samalla taajuudella. GPS:n L2-signaali osuu E5b:n ja E6:n väliin (1227.6 MHz). Vaakatasoon piirretty intensiteettijakautuma kuvaa alkuperäisen signaalin kanssa neljänneksen vaihesiirrettyä ( $\pi/2$ ) pilotti-signaalia.

**Taulukko 1.6:** Galileon signaalit. Taajuuskaistajakautuma on esitetty kuvassa 1.14.

Signaali	Taajuus	Käyttö
E2-L1-E1	1575.42 MHz (= GPS L1)	julkinen, pelastus, viranomaiset
E6	1278.75 MHz	kaupallinen, viranomaiset
E5b	1207.14 MHz	julkinen, pelastuspalvelu
E5a	1176.45 MHz (= GPS L5)	julkinen, pelastuspalvelu

velun käyttöön tuleva signaali. Jokainen satelliitti on varustettu lähettimellä, joka välittää käyttäjän vastaanottimen lähettämän hätäsignaalin pelastuskeskukselle ja samalla tiedon lähettäjälle, että avunpyyntö on välitetty eteenpäin.

Galileon tuloa ennakoi eurooppalainen EGNOS-järjestelmä (European Geostationary Navigation Overlay Service). EGNOS tarjoaa differentiaalipaikannukseen (DGPS) verrattavaa korjaustietoa navigointikäyttöön, mutta sen lisäksi käyttäjä saa tiedon signaalin luotettavuudesta ja tarkkuudesta. Toisin kuin DGPS, joka on paikallinen, EGNOS on euroopanlaajuinen. EGNOS on Euroopan avaruusjärjestön (ESA), Euroopan komission (EC) ja Euroopan ilmailuliikenteen turvallisuus- ja navigointiorganisaation (Eurocontrol) yhteisprojekti.

Tällä hetkellä EGNOS käyttää GPS-signaalia, johon liittyvä korjaustieto välitetään kolmen geostationaarisen satelliitin kautta (Inmarsat III Atlantic Ocean Region-East (AOR-E), Inmarsat III F5 ja Artemis). Korjaustieto perustuu RIMS (Ranging and Integrity Monitoring Station) maa-asemiin, joista yksi sijaitsee Virolahdella.

EGNOS-korjausta käyttäen GPS-paikannustarkkuus on kaikkialla Euroopas-

sa parempi kuin n. 5 metriä. Galileo-satelliitit otetaan mukaan järjestelmään sitä mukaa kuin niitä lähetetään. EGNOS-järjestelmän laajentamista myös Euroopan ulkopuolelle on suunniteltu. Vastaavanlainen järjestelmä on lähinnä Pohjois-Amerikan alueella toimiva WAAS (Wide-Area Augmentation System). EGNOS:ista ja WAASista kerrotaan tarkemmin GPS:n navigointiratkaisujen yhteydessä.

## 1.6 Muut avaruusgeodeettiset paikannusmenetelmät

GPS:n, *Galileon* ja *GLONASSin* ohella nykyisin on käytössä myös muutamia muita avaruusgeodeettisia paikannusmenetelmiä. Näistä tärkeimmät ovat *satelliittilaser* (SLR), *DORIS* ja *VLBI*. Vaikka VLBI- ja satelliittilaserasemia on vain noin 30–40 paikassa maailmassa, on menetelmillä oma tärkeä asemansa esimerkiksi koordinaatistojen ylläpidossa. Tarvitsemme GNSS:stä riippumattomia havaintoja.

### 1.6.1 Satelliittilaser

Jo 1960-luvun puolivälissä tehtiin ensimmäiset kokeet *satelliittilasereilla* (SLR, Satellite Laser Ranging). Siinä kulmaprismoilla varustettuja satelliitteja ”ammutaan” laserpulsseilla.

Lähtevä laserpulssi ohjataan joko erillisen kaukoputken läpi tai saman kaukoputken kautta, jolla satelliitista heijastunut pulssi vastaanotetaan. Paluupulssi rekisteröidään kaukoputkeen liitetyllä herkällä valoilmaisimella, jolla pystytään parhaimmillaan havaitsemaan jopa yksittäinen heijastunut foton. Kulkuajan mittausta tehdään tarkalla aikavälimittarilla, joka rekisteröi pulssin lähtö- ja paluuhetken. Kun kulku aikaan tehdään ilmakehästä ja signaalin muista viiveistä johtuvat korjaukset, voidaan satelliitin etäisyys laskea. Etäisyysmittauksissa päästään parhaimmillaan senttimetrin tarkkuuteen ja absoluuttisessa paikannuksessa alle desimetrin.

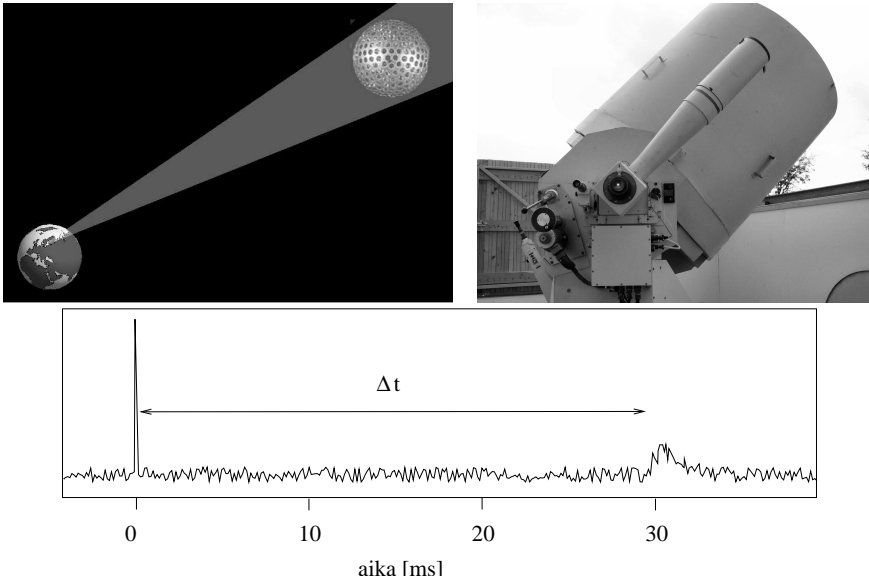
Pulssin kulkuajasta  $\Delta t$  voidaan laskea satelliitin etäisyys  $d$

$$d = \frac{\Delta t}{2}c \quad (1.2)$$

missä  $c$  on valon nopeus. Todellisuudessa signaalin kulkuun vaikuttaa eri virhelähteitä ja kulku aikaan on tehtävä useita korjauksia, joten todellinen havaintoyhtälö on monimutkaisempi:

$$d = \frac{\Delta t}{2}c + \Delta d_0 + \Delta d_e + \Delta d_d + \Delta d_r + \eta, \quad (1.3)$$

missä



**Kuva 1.15:** Satelliittilaserin periaate. Laserpulsssi heijastuu satelliittiin asennetusta kulmaprismasta. Vasemmalla ylhäällä on pallon muotoinen Lageos-satelliitti, jonka pinta on täynnä prismaheijastimia. Oikealla ylhäällä Metsähovin satelliittilaserin 1 m teleskooppi. Alakuvassa vasemmanpuoleinen piikki kuvaa lähtevää pulssia, oikeanpuoleinen piikki paluupulsssia. Vaaka-akselilla on aika. Satelliitin etäisyys saadaan signaalin kulkuajasta  $\Delta t$ . (Lageoksen kuva: NASA; Metsähovin laser: M. Poutanen)

$\Delta d_0$  on laserin, teleskoopin ja referenssipisteen keskinäisestä asennosta aiheutuva eksentrisyyskorjaus

$\Delta d_e$  satelliitin massakeskipisteen ja prisman välinen eksentrisyyskorjaus,

$\Delta d_d$  elektroniikasta, kaapeleista ja lasersäteen kulkureitistä teleskoopissa aiheutuva viive,

$\Delta d_r$  ilmakehästä johtuva refraktiokorjaus ja

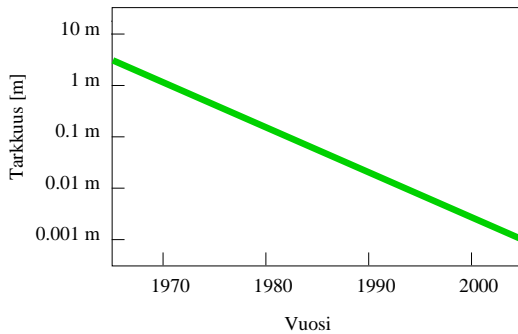
$\eta$  muut systemaattiset ja satunnaisvirheet.

Kuten myöhemmin havaitaan, myös GPS-signaalissa esiintyy suuri osa samoista virheistä, jotka vastaavassa havaintoyhtälössä täytyy ottaa huomioon.

Ilmaisimeen saapuvan signaalin voimakkuus riippuu mm. lähetystehosta, satelliitin etäisyydestä, teleskoopin koosta ja ilmakehän läpäisevyydestä

$$N = \frac{E_t}{h\nu} G_t A_r G_s A_s \frac{1}{D^4} T_a^2 T_r, \quad (1.4)$$

missä



**Kuva 1.16:** Satelliittilaserin tarkkuuden parantuminen.

$E_t$  on lähetyksen energia,

$h\nu$  fotonin energia,

$G_t$  lähettimen vahvistus,

$G_t = 1/(\pi/4 \theta^2)$  lähtökeilan  $\theta$  avautumiskulma,

$A_r$  vastaanottimen tehollinen pinta-ala,

$A_s$  satelliitin prismojen heijastuspinta-ala,

$G_s$  satelliitin vahvistus,

$D$  satelliitin etäisyys,

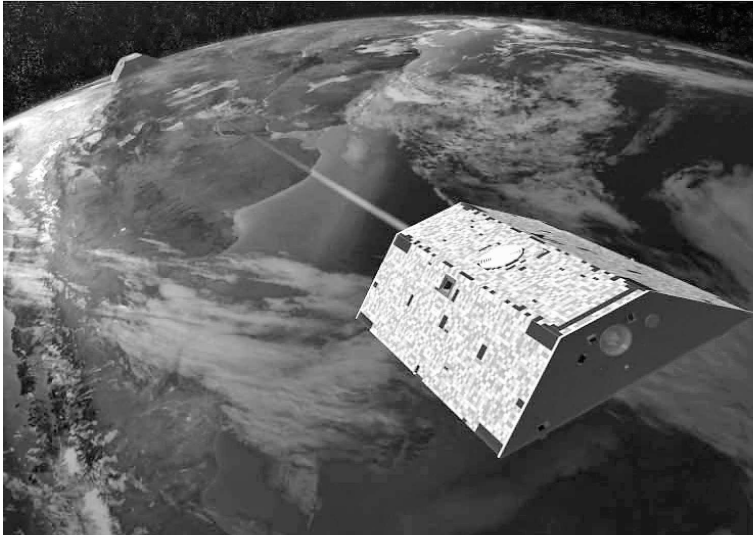
$T_a$  ilmakehän läpäisykerroin ja

$T_r$  teleskoopin optiikan läpäisykerroin.

Koska paluusignaali heikkenee kääntäen verrannollisena satelliitin etäisyyden  $D$  neljänteen potenssiin, on kaukaisimmille satelliiteille käytettävä kapeampaa keilaa tai suurempaa lähetystehoa, jotta saadaan riittävän voimakas paluusignaali. Lähtevän lasersäteiden avautumiskulma säädetään optisesti muutamasta kaarisekunnista noin puoleen kaariminuuttiin.

Keilan kaventaminen vaikeuttaa osumista, joten sen suhteen joudutaan käytännössä aina tekemään jonkinlainen kompromissi. Kymmenen kaarisekunnin avautumiskulmalla laserkeilan leveys 6000 km etäisyydellä on vajaat 300 metriä. Tuon matkan satelliitti kulkee muutamassa sekunnin sadasosassa. Jos satelliitti on havaintohetkellä Auringon valaisema, voidaan suuntauksen hienosäätö tehdä käsin. Jos satelliitti on Maan varjossa, se ei näy kaukoputkessa, jolloin sekä kaukoputken suuntaustarkkuuden että satelliitin rataennusteen täytyy olla riittävän tarkat.

Useimmat nykyiset satelliittilaserit käyttävät *neodyymi-YAG -laseria*, jonka pulssin kesto on alle 100 ps ( $10^{-10}$  s), aallonpituus 532 nm ja energia muutama



**Kuva 1.17:** Maan painovoimakenttää mittaavissa kahdessa Crace-satelliitissa on GPS-vastaanottimien lisäksi myös prismaheijastimet laserhavaintoja varten. (NASA / CSR, University of Texas / GeoForschungsZentrum Potsdam)

kymmenen mJ/pulssi. Koska yhdessä nanosekunnissa valo kulkee 30 cm, on laserista lähtevän pulssin pituus alle 3 cm. Uusimmissa lasereissa pulssien lähetystaajuus on kymmeniä tai jopa satoja hertsejä. Vanhemmissa rubiinilasereissa energiat olivat useita jouleja/pulssi ja pulssin pituus kymmeniä nanosekunteja. Pulssien väli-aika oli 5–15 sekuntia.

Noin neljäkymmenen kiinteän aseman lisäksi käytössä on muutama siirrettävä satelliittilaser. Metsähovin satelliittilaserasema on toiminut vuodesta 1978 ja vuonna 1997 otettiin käyttöön pikosekuntilaserilla varustettu 1 m:n teleskooppi.

Laserheijastimia on monissa Maata tutkivissa satelliiteissa. Osa satelliiteista on optimoitu radan tarkkaan määrittämiseen. Tällaisia ovat esimerkiksi *Lageos 1* ja *2* (LAsER GEODynamics Satellite). Ne ovat pallon muotoisia, n. 60 cm läpimitaltaan ja painavat runsaat 400 kg. Näin esimerkiksi Auringon säteilypain ei vaikuta merkittävästi näiden satelliittien ratoihin.

Satelliiteilla tehtyjä havaintoja käytetään mm. Maan massakeskipisteen ja sitä kautta globaalien koordinaatiston origon realisointiin. Satelliittilaser on tarkin menetelmä gravitaatiovakion  $G$  määrittämiseen (tai itseasiassa Maan massan  $M_{\oplus}$  ja gravitaatiovakion tulon  $M_{\oplus}G$  määrittämiseen). Vaikka uudet painovoimasatelliit-

tit havaitsevatkin Maan painovoimakentän yksityiskohtia, ei niiden avulla saada kaikkein pitkäaaltoisimpia termejä selville. Myös yli 30 vuoden aikasarjat ovat korvaamattomia globaalien painovoimakentän hitaiden muutosten seurannassa.

Myös monissa Maata ja Maan painovoimakenttää tutkivissa satelliiteissa on prismaheijastimet. Tällaisia ovat esim. *Topex/Poseidon*, *Envisat*, *Champ* ja *Grace*. Näiden satelliittien havaitsemisella pyritään parantamaan ratamäärityksen tarkkuutta. Toistaiseksi vain kahdessa GPS-satelliitissa on ollut prismaheijastimet.

Viime aikoina satelliitteihin asennetut GPS-vastaanottimet ovat osittain korvanneet laserin käytön. GPS:n etuna on ennen kaikkea jatkuva ja maanpäällisistä säistä riippumaton havaintosarja. Vaikka satelliittilasereilla tehdyt havainnot jatkautuvat sekä ajallisesti että satelliitin radan suhteen epätasaisesti, on niillä kuitenkin oma tärkeä merkityksensä mm. muilla menetelmillä tehtyjen mittausten kalibroinnissa.

*Kuulaser* on läheistä sukua satelliittilasertekniikalle. Siinä käytetään Maan luonnollista satelliittia, Kuuta, jonne Apollo- ja Luna-lennoilla 1970-luvun alussa vietiin yhteensä viisi kulmaprismaheijastinta. *McDonald-observatorio* Teksasissa ja *Observatoire de la Côte d'Azur* Ranskassa ovat käytännössä ainoita kuuhavain-toja tekeviä laserasemia.

Laserhavaintojen teko, laskenta ja käyttö koordinoidaan Kansainvälisen geodeettisen assosiaation (IAG) laserpalvelun kautta (ILRS, International Laser Ranging Service), jonka havaintoverkkoon kaikki havain-toja tekevät asemat kuuluvat.

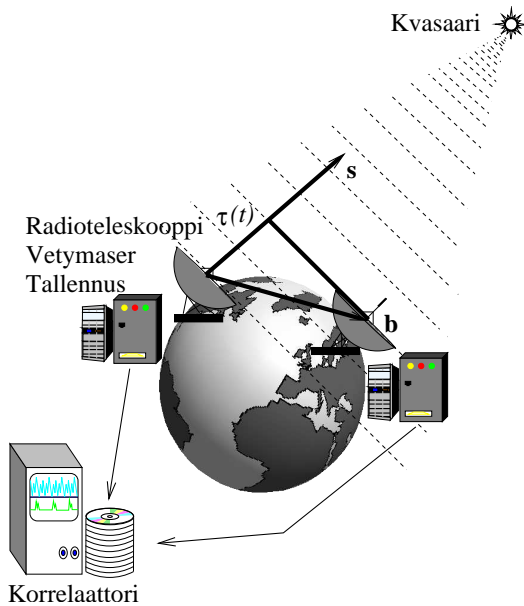
## 1.6.2 VLBI

Tarkin globaalisista paikannusmenetelmistä on *pitkäkantainterferometria VLBI* (Very Long Baseline Interferometry), joskin viime vuosina GPS:n avulla on päästy lähes samaan tarkkuuteen. VLBI kehitettiin alun perin radiotähtitieteen tarpeisiin parantamaan teleskooppien erotuskykyä, mutta geodesiassa VLBI on nykyisin korvaamaton globaalien koordinaatistojen luonnissa ja ylläpidossa sekä Maan asennon ja pyörimisliikkeen seurannassa.

Teleskoopin erotuskyky on luokkaa  $\lambda/D$ , missä  $\lambda$  on havaittavan säteilyn aallonpituus ja  $D$  teleskoopin läpimitta. Optisella alueella (aallonpituus  $\lambda \sim 500$  nm) kaukoputkella havaittavien yksityiskohtien erotuskykyä rajoittaa yleensä ilmaka-hä, jonka turbulenssit vääristävät tulevaa signaalia niin, että hyvissäkään olosuh-teissa ei pystytä erottamaan alle kaarisekunnin päässä toisistaan olevia yksityis-kohtia. Silmän erotuskyky puolestaan on pari kaariminuuttia.

Radioalueella havaittavat aallonpituudet ovat millimetristä metreihin. Ainoa





**Kuva 1.18:** Geodeettisen VLBI:n periaate. Kaukaisesta kvasaarista tuleva yhdensuuntainen aaltorintama saapuu eriaikaisesti kahteen teleskooppiin. Teleskooppeihin saapuvan signaalin aikaeron perusteella voidaan määrittää teleskooppien välinen vektori, jos havaintoja on tehty useista eri puolilla taivasta olevista lähteistä. Käytännössä ongelma on paljon monimutkaisempi, sillä aaltorintama häiriintyy ilmakehän läpi kulkiessaan.

tapa erotuskyvyn lisäämiseksi on teleskoopin koon kasvattaminen. Tässä tulee kuitenkin raja vastaan hyvin nopeasti. Suurimmat liikuteltavat radioteleskoopit ovat läpimitaltaan n. 100 m (Green Bank, USA ja Effelsberg, Saksa). Jotta radioalueella saavutettaisiin samanlainen erotuskyky kuin optisella alueella, tarvittaisiin jopa kilometrien läpimittaisia antennoja.

Ratkaisuksi kehitettiin interferometrinen menetelmä, jossa kahdesta antennista tuleva signaali yhdistetään. Maapallon pyörimisen vuoksi antenneihin tulevien signaalien välille syntyy tasaisesti muuttuva vaihe-ero, ts. radiolähdettä seuraamalla saadaan interferenssikuvio, jonka ominaisuudet riippuvat sekä vastaanottimien keskinäisestä asennosta että radiolähteen ominaisuuksista. Lopputuloksena on kuitenkin, että menetelmällä saavutetaan sama erotuskyky kuin antennilla, jonka koko olisi sama kuin näiden kahden antennin välimatka.

*Pitkäkantainterferometriaksi*, VLBI, kutsutaan menetelmää, jossa teleskoopit ovat niin kaukana, ettei niitä voi enää fyysisesti yhdistää toisiinsa. Tällöin tulevat signaalit taltioidaan magneettinauhoille (nykyisin myös tietokoneen kovalevyille) yhdessä tarkkojen aikamerkkien kanssa. Aikamerkkien tuottamiseen käytetään *vetymaseria*, jonka aikastabiilisuus on luokkaa  $10^{-15}$ . Ääritapauksissa antennit ovat vastakkaisilla puolilla maapalloa. Tällöin VLBI:llä saavutetaan jopa 0.0001'' (0.1



**Kuva 1.19:** Metsähovin 14 metrin radioteleskooppi. Teleskoopilla tehdään myös geodeettisia VLBI-havaintoja. (Kuva: M. Poutanen)

millikaarisekuntia) erotuskyky, joka on useita kertaluokkia parempi kuin mihin optisella alueella päästään.

Maapallon ilmakehän ulkopuolella kaukaisesta radiolähteestä tuleva signaali voidaan ajatella tasoallokksi, jolloin teleskooppeihin saapuvan signaalin vaiheero on yksinkertaista määrittää. Vaihe-ero riippuu ainoastaan radiolähteen ja teleskooppien suuntavektorin välisestä kulmasta. Maapallon pyörimisen vuoksi tämä kulma muuttuu jatkuvasti, jolloin saadaan klassisesta optiikasta tuttu interferenssikuvio. Kuvion muoto riippuu kohteen ominaisuuksista, ja muutaman tunnin mittaisista havainnoista voidaan rekonstruoida erotuskyvyltään  $\lambda/D$  luokkaa oleva kartta.

Ilmakehä mutkistaa tilannetta, sillä se vääristää tulevaa aaltorintamaa, jolloin teleskooppeihin saapuvan signaalin vaihe muuttuu epäsäännöllisesti. Niinpä vaihe-eron määrittämiseksi signaalit korreloidaan, ja korrelaatiofunktion maksimin avulla löydetään kutakin ajanhetkeä vastaava vaihe-ero. Toistaiseksi tämä on vaatinut niin suurta laskentatehoa, ettei korrelointia ole voitu tehdä ohjelmallisesti, vaan tarkoitusta varten erityisesti rakennetussa korrelaattorissa. Datan määrä saattaa olla jopa satoja megatavuja sekunnissa yhtä teleskooppia kohti. Laskenta-

tehojen kasvaessa myös ohjelmistopohjaiset korrelaattorit ovat tulossa mahdollisiksi.

Geodeettisissa VLBI-mittauksissa radiolähteinä käytetään *kvasaareita*, jotka ovat voimakkaita, käytännössä pistemäisiä radiolähteitä. Koska kvasaarien etäisyys on vähintään satoja miljoonia valovuosia, ne muodostavat eräänlaisen ajasta ja paikasta riippumattoman kiintopisteverkon. Havaitsemalla eri puolilla täivasta olevia kvasaareita, voidaan teleskooppien välinen vektori laskea. Nykyisin geodeettisissa VLBI-havainnoissa käytetään mm. 2 GHz ja 8 GHz taajuuksia (15 cm ja 3.75 cm aallonpituuksia), jolloin pääosa ionosfäärin vaikutuksesta voidaan poistaa kahden taajuuden havainnoissa hieman samaan tapaan kuin GPS-havainnoissakin.

Havaittavana suureena on teleskooppeihin tulevan signaalin viive  $\tau$ :

$$\tau(t) = -\frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{s}(t)}{c} + \Delta\tau_a(t) + \Delta\tau_i + \Delta\tau_{tr}(t) + \Delta\tau_{ion}(t), \quad (1.5)$$

missä

$\mathbf{b}$  on teleskooppien välinen vektori,

$\mathbf{s}$  kvasaarin suuntavektori,

$\Delta\tau_a$  maan pyörimisliikkeestä ja äärellisestä valon nopeudesta johtuva vuorokautinen aberratio, ts. kvasaarin suuntaan tehtävä pieni korjaus,

$\Delta\tau_i$  laite- ja kellokorjauksista johtuva viive,

$\Delta\tau_{tr}$  troposfäärin vaikutus signaaliviiveeseen ja

$\Delta\tau_{ion}$  ionosfäärin vaikutus signaaliviiveeseen.

Signaalien vaihe-ero  $\Phi(t)$  on

$$\Phi(t) = 2\pi\nu\tau(t), \quad (1.6)$$

missä  $\nu$  on havaittavan signaalin taajuus.

Teleskooppien välisen vektorin määrittämisessä päästään  $10^{-9}$  luokkaa olevaan suhteelliseen tarkkuuteen, ts. eri puolilla maapalloa olevien teleskooppien paikka toistensa suhteen pystytään määrittämään cm-tarkkuudella. Melko ilmeistä kuitenkin lienee, ettei VLBI ole eikä siitä tule geodeetin tai maanmittarin yleistyökalua; jo yksinomaan laitteiston koko ja hinta pitävät siitä tehokkaasti huolen.

VLBI on mukana kaikissa nykyisissä globaalien koordinaattijärjestelmien realisaatioissa. Emme voi kiinnittää sen paremmin Maahan kuin satelliitteihinkaan koordinaatistoa, joka olisi luotettavasti ja tarkasti rekonstruoitavissa myös hamassa tulevaisuudessa. Maan pinnalla mannerlaatat liikkuvat toistensa suhteen, maapallon asento, pyörimisakselin navan paikka ja satelliittien radat muuttuvat jatkuvasti. Jos havainnot perustuisivat pelkästään näihin, ei meillä olisi keinoa erottaa

mikä osa havaitusta muutoksesta johtuu havaintopisteen liikkeestä tai Maan asennon muutoksista, mikä osa satelliittiratojen muutoksista.

Koska VLBI:n kulmaerotuskyky on suuri, voidaan maapallon asento ja asennon muutokset havaita erittäin tarkasti. Siksi VLBI:tä käytetään Maan pyörimisliikkeessä ja navan paikassa tapahtuvien muutosten sekä Kuun aiheuttaman *nutation* seurantaan. VLBI on riippumaton satelliittien radoista ja ratojen muutoksista, sekä Maan painovoimakentästä ja massakeskipisteen paikasta. Kvasaarit tarjoavat satelliiteista riippumattoman kiintopisteverkon, eikä VLBI-havaintoja voi tulevaisuudessakaan korvata millään satelliitteihin perustuvalla menetelmällä.

Koordinaatiston origolla ei geodeettisissa VLBI-havainnoissa sen sijaan ole merkitystä. Kvasaarit ovat niin kaukana, että niiden väliset kulmat pysyvät muuttumattomina tarkasteltiinpa niitä maapallolta tai Marsista. Siksi satelliittilaseria tarvitaan koordinaatiston origon realisointiin.

Geodeettiset VLBI-havainnot koordinoidaan IAG:n geodeettisen VLBI-palvelun kautta (IVS, International VLBI Service for geodesy and astrometry).

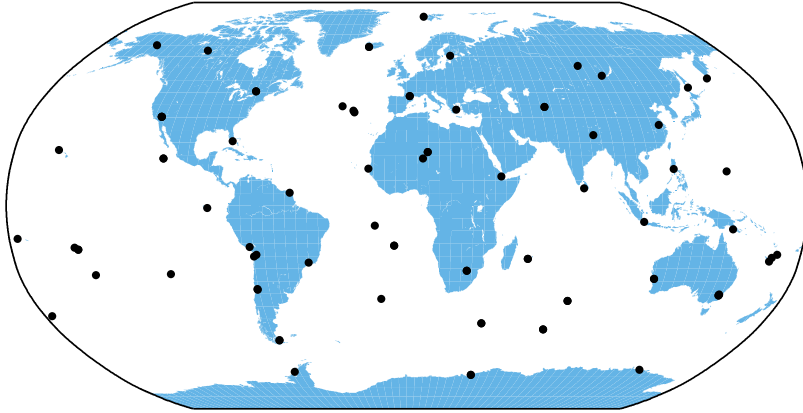
### 1.6.3 DORIS

*DORIS (Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite)* on Ranskan avaruushallinnon *CNES (Centre National d'études Spatiales)* kehittämä järjestelmä. Järjestelmän suunnittelussa ja rakentamisessa ovat olleet mukana myös Ranskan maanmittauslaitos *IGN (Institut Géographique National)* ja avaruusgeodesian tutkimusryhmä *GRGS (Groupe de Recherche en Géodésie Spatiale)*. DORISin tarkoituksena on satelliittien senttimetritarkkuinen paikannus, mutta sitä voidaan käyttää myös maanpäällisten asemien paikannukseen ja erityisesti niiden liikkeiden seurantaan.

DORIS-järjestelmässä käytetään radiosignaalin *Doppler-siirtymää*. Toimintaperiaate on vastakkainen kuin GPSllä, sillä lähetin on maa-asemassa ja vastaanotin satelliitissa. Maa-asema lähettää kahta signaalia, joiden taajuudet ovat 2036.25 MHz ja 401.25 MHz. Jälkimmäiseen signaaliin on moduloitu mm. maa-aseman tunnistetieto ja maa-asemalla olevan sääanturin havainnot.

DORIS otettiin käyttöön vuonna 1990, jolloin Spot 2 -satelliitti laukaistiin radalleen. Sen jälkeen DORIS-vastaanotin on ollut yhteensä viidessä muussa satelliitissa, nimittäin Spot 3 ja 4, Topex/Poseidon, Envisat ja Jason 1.

DORIS-havainnoilla on neljä pääsovellusta: satelliittien radanmäärittäminen, maanpäällisten asemien aikasarjoista saatava geodynamiikkaan liittyvä informaatio, reaaliaikaiset navigointisovellukset ja Maan painovoimakentän, ionosfäärin ja troposfäärin mallinnus.



**Kuva 1.20:** DORIS-asemaverkko

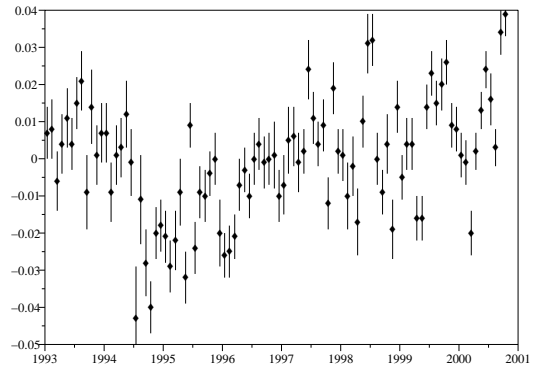
Satelliittien radanmäärittämisessä erityisesti satelliitin etäisyys saadaan muutamien senttimetrin tarkkuudella. Tämä on erityisen tärkeää satelliiteille, jotka altimetritulkalla mittaavat merenpinnan korkeutta (esim. Topex/Poseidon ja Jason).

Maa-aseman liikettä voidaan seurata DORIS-aikasarjoista. Kuten esimerkiksi kuvasta (1.21) nähdään, aseman liikkeessä voi olla vuotuista jaksollisuutta, sekulaarista (yhteen suuntaan tapahtuvaa) muutosta, mutta myös referenssijärjestelmästä johtuvia näennäisiä muutoksia, kuten Metsähovin osalta vuonna 1994 on tapahtunut. DORIS-havaintoja käytetään muiden havaintojen ohella myös ITRF-koordinaatiston realisointiin (luku 2).

Vuodesta 1998 lähtien (Spot 4 -satelliitti) DORIS-järjestelmään on liittynyt myös satelliittiratojen reaaliaikainen seuranta. Jälkilaskentana radat saadaan muutamien senttimetrin tarkkuudella, mutta jo reaaliaikaisesti paikka voidaan määrittää metritarkkuudella.

Muista globaaleista havaintoverkoista poiketen DORIS-verkko on jakaantunut varsin homogeenisesti. Tämä johtuu siitä, että CNES on koordinoinut maa-asemien perustamista ja pyrkinyt huolehtimaan alueellisesta homogeenisuudesta. Muut asemaverkot, kuten SLR, VLBI tai GPS ovat hyvin epätasaisesti jakaantuneet, niin että Euroopassa ja Pohjois-Amerikassa on huomattavat keskittymät, mutta esimerkiksi Aasia, Afrikka ja erityisesti eteläinen pallonpuolisko ovat useinkin lähes tyhjiä.

DORIS-verkko käsittää nykyisin runsaat 60 asemaa (kuva 1.20). CNES huolehtii paikallisten viranomaisten ja laitosten kanssa yhteistyössä asemien toiminnasta ja huollosta. Metsähovin DORIS-asema on toiminut keskeytyksettä 1990-



**Kuva 1.21:** Vasemmalla Metsähovin DORIS-antenni ja järjestelmään kuuluva sääasema ja oikealla korkeuskomponentin aikasarja vuoteen 2001, jolloin antenni vaihdettiin uuteen ja aikasarjaan tuli tästä johtuva katko. Kuva M.Poutanen; aikasarja IDS.

luvun alusta lähtien. Paikka itseasiassa sijaitsee Sjökullassa, n. 3 km Metsähovista, koska DORISin vaatimaa radiolähetintä ei voitu sijoittaa radioteleskoopin välittömään läheisyyteen.

Myös DORIS-havainnot koordinoidaan nykyisin IAG:n alaisen DORIS-palvelun (IDS, International DORIS service) kautta.

## Luku 2

# Koordinaatistot

*Korjattuaan viljan he purjehtivat pois, niin että he kahden vuoden kuluttua kolmantena vuotena kiersivät Herakleen patsaiden ohi ja saapuivat Egyptiin. Ja he kertoivat, mitä minä tosin en saata uskoa, mutta mahdollisesti joku toinen, että heillä purjehtiessaan Libyan ympäri oli Aurinko oikealla kädellä.*

— Herodotos: *Historiateos*, neljäs kirja (suom. Edward Rein)

Vaikka *Herodotos* ei uskonutkaan foinikialaisten kertomusta Auringon näkymisestä pohjoisessa, kertomus todistaa heidän todella purjehtineen Afrikan ympäri. Ei tuollaista kukaan omasta päästään keksi. Heillä ei ollut karttoja tai koordinaatteja, ja vasta vuosisatoja myöhemmin nämä apuneuvot tulivat merenkulkijoiden työvälineiksi. Nykyisin paikan ilmoittaminen koordinaattien avulla on itsestään selvyys – vai onko?

Koordinaattien määrittäminen ja koordinaatistoihin liittyvät käsitteet ovat eräs satelliittipaikannuksen tärkeimmistä asioista. Koordinaatistoja on kokonainen legio, ja tässä ryteikössä seikkaileva geodeetti tuntee välillä kaikista koordinaateista huolimatta – tai ehkä juuri sen vuoksi – olevansa eksyksissä.

Valitsemme seuraavassa ISO-standardia hieman yksinkertaisemman lähestymistavan (ks. oheista laatikkoa). Termistössämme *koordinaattijärjestelmä* (reference system) tarkoittaa ”ideaalista” koordinaatiston määrittelevää järjestelmää, joka sisältää mm. koordinaattiakselien origon, orientoinnin, vertausellipsoidin muodon, asennon, jne. Jotta järjestelmää voitaisiin käyttää todellisissa mittauksissa, se on realisoitava. Realisaatioita kutsumme *koordinaatistoksi* (reference frame). Maahan kiinnitetyissä koordinaatistoissa kiintopisteinä ovat esimerkiksi maastossa olevat pultit, joiden *koordinaatit* olemme mitanneet tässä kyseisessä

koordinaatistossa. Samalla pisteellä saattaa siis olla useita koordinaatteja. Tähtitieteellisissä koordinaatistoissa kiintopisteinä ovat tähdet ja kvasaarit. Koordinaatit ja koordinaatistot ovat tavallisimmin niitä, joiden kanssa käyttäjät joutuvat tekemisiin. Tietoja koordinaattijärjestelmästä tarvitaan harvemmin.

Joskus vastaanottimen tai laskentaohjelman antamat koordinaatit voivat poiketa kartan ilmoittamista paikoista tai tietokannassa olevista arvoista. Syynä yksinkertaisesti on eri koordinaatisto. Koordinaatistosta toiseen siirtyminen tapahtuu *koordinaattimuunnosten* avulla.

Varsin usein mittaukset tehdään tai tulokset lasketaan suoraan jollain *kartta-projektiolla*, joiden käytöstä mittauksen yhteydessä ei ole kuin harmia. GNSS antaa kolmiulotteisia koordinaatteja, jotka kyllä tarvittaessa voidaan vääntää mimmiselle projektiolle tahansa, mutta tämä tulee tehdä vasta siinä vaiheessa kun pistettä ollaan sijoittamassa kyseiselle kartalle. Laskut sen sijaan on syytä suorittaa globaalissa koordinaatistossa, joista puhumme luvussa 2.3. Myös laskun tulokset on syytä tallettaa tuossa samaisessa koordinaatistossa; näin varmistetaan, että mittaustuloksia voidaan myöhemminkin käyttää.

Tämä luku jakautuu viiteen osaan. Aluksi kerromme *astronomisista koordinaatistoista*, joita tarvitaan satelliittien paikkojen ilmoittamiseen. Useimmat eivät toki joudu näiden kanssa kovin usein tekemisiin, mutta näillä perustiedoilla pystyy hahmottamaan, missä päin taivasta satelliitit milloinkin näkyvät.

*Aika* liittyy läheisesti tähtitieteellisiin koordinaatistoihin ja maapallon pyörimisliikkeeseen. Nykyisin aikaa ei tosin enää mitata tähtitieteellisten ilmiöiden avulla, mutta ne ovat kuitenkin ajanmäärityksen taustalla. Kellojemme käymä aika on edelleenkin sidottu Maan pyörimisliikkeeseen. Tutustumme ajan eri määrittelyihin ja pyrimme myös selvittämään miten paikannussatelliittien käyttämä aika poikkeaa seinäkelloajasta. Ajan käsite on tärkeä siitäkin syystä, että koodin avulla tehtävä paikannus perustuu signaalin kulku-aikaan ja GNSS:ää käytetään myös tarkan ajan saamiseksi.

Seuraavaksi tutustumme tärkeimpiin *maahan kiinnitettyihin koordinaatistoihin* ja *siirtymiseen koordinaatistosta toiseen*. Eri koordinaatistot ja niiden välillä siirtyminen ovat GNSS-havaintajan jokapäiväisenä ongelmana. Sopimattoman koordinaatiston käyttö voi johtaa hyvinkin suuriin virheisiin. Tähän ei välttämättä ole yksinkertaista ratkaisua, mutta valotamme ongelmaa muutamain esimerkein.

Lopuksi tutustumme *korkeuteen*. GNSS:n kannalta korkeus on geometrinen suure siinä missä muutkin koordinaatit. Korkeuden erityisasema johtuu siitä, että perinteinen korkeudenmääritys, *vaaitus*, käsittelee korkeutta geopotentialieroina, joka on fysikaalinen suure. Tarvitsemme muunnospinnan, *geoidin*, jonka avulla pääsemme GNSS:n ellipsoidisista korkeuksista ortometrisiin korkeuksiin.



## Laatikko 2.1 ISO 19111 -standardin määritelmiä

ISO/TC 211 -työryhmän raportin ”*Geographic Information – Spatial referencing by coordinates*” mukaisten termien suomenkieliset vastineet löytyvät *Julkisen hallinnon suosituksista* JHS153(<http://www.jhs-suositukset.fi/>).

- datumi: Suureiden joukko, joka tarvitaan Maan pintaan kiinnitetyn koordinaatiston lähtöarvojen realisoimiseksi. Näitä ovat lähtöpisteen geodeettiset koordinaatit ( $\varphi, \lambda, h$ ), ja luotiviivanpoikkeaman komponentit ( $\xi, \eta$ ) sekä geoidin korkeus lähtöpisteessä ( $N$ ).
- geoidi: Maan painovoimakentän tasa-arvopinta, joka merialueilla yhtyy valtameren keskivedenpintaan.
- geodeettiset koordinaatit: Vertausellipsoidiin kiinnitetty paikan sijainti; leveys ( $\varphi$ ), pituus ( $\lambda$ ) ja korkeus vertausellipsoidin pinnasta ( $h$ ).
- koordinaatisto: 3D- tai 2D-, yleensä suorakulmainen akselisto, jonka avulla pisteen paikka voidaan määrittellä koordinaatiston origoon nähden. Koordinaatisto on koordinaattijärjestelmän realisaatio, joka on toteutettu mittaamalla joukolle maastossa olevia kiintopisteitä järjestelmän mukaiset koordinaatit. Koordinaatistoon liittyy sitä vastaava, lähtöpisteen määrittelevä datumi.
- koordinaatit: Suuret, jotka tarvitaan pisteen sijainnin määrittelemiseksi valitussa koordinaatistossa. Koordinaatit voidaan esittää joko suorakulmaisina ( $x, y, z$ ) tai geodeettisina ( $\varphi, \lambda, h$ ).
- koordinaattijärjestelmä: Joukko suureita ja määritelmiä, joiden avulla koordinaatisto ja sen origo määritellään ja orientoidaan.
- maantieteelliset koordinaatit: Vertausellipsoidiin kiinnitetty paikan sijainti. Maantieteelliset koordinaatit ovat leveys ( $\varphi$ ) ja pituus ( $\lambda$ ).
- vertausjärjestelmä: Sellaisten suureiden joukko, joita tarvitaan koordinaattijärjestelmän määrittelemiseen. Geodeettiseen vertausjärjestelmään kuuluvat seuraavat neljä suurta: vertausellipsoidin isoakselin puolikas ( $a$ ), Maan geosentrinen vetovoimavakio ( $GM$ ), dynaaminen muotokerroin ( $J_2$ ), pyörähdysliikkeen kulmanopeus ( $\omega$ ).
- vertausellipsoidi. Maan pinnan muotoa kuvaava matemaattinen pinta. Ellipsoidin koko ja muoto määritellään yleensä isoakselin puolikkaan ( $a$ ) ja litistysuhteen ( $f$ ) avulla.

## 2.1 Astronomiset koordinaattijärjestelmät

Taivaallisia kohteita (kuten satelliitteja) varten tarvitaan oma koordinaattijärjestelmänsä. Tutustumme aluksi pallotähtitieteen perusteisiin ja niihin koordinaatistoihin ja muunnoksiin, joita satelliittien paikan laskemisessa tarvitaan. Jatkoa varten määrittelemme myös muutaman peruskäsitteen. Luvun lopuksi käymme läpi koordinaatteja muuttavia tekijöitä ja sitä miten ne on otettava huomioon satelliittien paikkoja ilmoitettaessa.

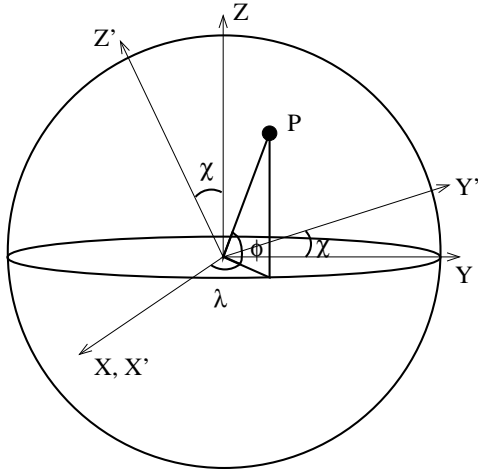
### 2.1.1 Pallotähtitieteen peruskäsitteitä

*Pallotähtitiede* tutkii taivaankappalten asemia ja näennäisiä liikkeitä taivaalla, ajanlaskua, paikanmäärittystä jne. Havait-sijan ajatellaan olevan (äärettömän suuren) pallon, *taivaanpallon*, keskipisteessä ja kaikkien kohteiden kiinnittyneinä sen sisäpinnalle, joten paikan ilmoittamiseen tarvitaan kaksi koordinaattia (esimerkiksi *rektaskensio* ja *deklinaatio*; näitä vastaavat Maahan kiinnitetyissä koordinaatistoissa leveys- ja pituusasteet).

Etäisyyksistä emme toistaiseksi välitä, koska suunnan ilmoittamiseen etäisyyttä ei tarvita (analogisesti leveys- ja pituusasteiden ilmoittamiseksi Maan pinnalla ei tarvitse tietää korkeutta). Olkoon siis taivaanpallon säde ykkönen, jolloin kaavoissa sädettä ei tarvitse merkitä näkyviin. Etäisyys tosin tulee mukaan sitä kautta, että suunta, jossa satelliitti havait-sijalle näkyy, riippuu satelliitin ja havait-sijan paikasta. Satelliittien tapauksessa täytyykin tehdä tarkka ero siitä, ollaanko maakeskisessä (*geosentrisessä*) vai havait-sijakeskisessä (*toposentrisessä*) järjestelmässä, mutta samaa taivaanpalloa ja samaa koordinaatistoa voimme silti mainosti käyttää.

Jos pallon keskipisteen kautta asetetaan taso, se leikkaa pallon kahteen yhtä suureen osaan pitkin ympyräviivaa, jota kutsutaan *isoympyräksi*. Ympyrän keskipisteen kautta kulkeva leikkaustason normaali puolestaan leikkaa pallon kahdessa pisteessä, joita sanotaan *navoiksi*. Jos palloa leikataan tasolla, joka ei kulje keskipisteen kautta, on leikkauskäyrä nimeltään *pikkuympyrä*. Kahden pallon pinnalla olevan pisteen kautta kulkee täsmälleen yksi isoympyrä ja tämän isoympyrän kaari on pallon pinnalla lyhin reitti pisteestä toiseen.

Asetetaan pallon keskipisteestä lähtemään suorakulmainen  $xyz$ -koordinaatistot.  $xy$ -taso leikkaa pallon pitkin isoympyrää, ja  $z$ -akseli tulee ulos navoilta. Paikka pallon pinnalla voidaan ilmoittaa kahta kulmaa käyttäen: olkoon  $\lambda$  positiivisesta  $x$ -akselista vastapäivään  $xy$ -tasossa mitattu kulma ja  $\phi$  pisteen kulmaetäisyys tästä



**Kuva 2.1:** Taivaanpallo. Kulmat  $\lambda$  ja  $\phi$  määrittävät kohteen P paikan taivaanpallolla yksikäsitteisesti. X-akselin ympäri kulman  $\chi$  verran kierrettyä koordinaatistoa merkitään pilkullisilla suureilla.

tasosta. Pisteiden  $xyz$ -koordinaatit ovat  $\lambda$ :n ja  $\phi$ :n avulla lausuttuna

$$\begin{cases} x = \cos \lambda \cos \phi \\ y = \sin \lambda \cos \phi \\ z = \sin \phi \end{cases} \quad (2.1)$$

Asetetaan vielä toinen samanlainen  $x'y'z'$ -koordinaatisto, mutta nyt niin, että tätä on edelliseen verrattuna kierretty  $x$ -akselin ympäri kulman  $\chi$  verran. Koska kysymyksessä on pelkkä kierto  $yz$ -tasossa, saadaan pilkulliset pilkuttomista ope-roimalla niihin kiertomatriisilla  $\mathbf{R}_1$  (ks. Liite A)

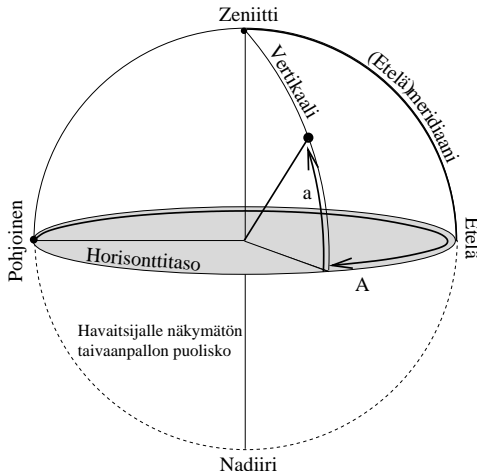
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{R}_1(\chi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

jossa

$$\mathbf{R}_1(\chi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \chi & \sin \chi \\ 0 & -\sin \chi & \cos \chi \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Kun (2.2) sijoitetaan (2.1):een, saadaan

$$\begin{cases} \cos \lambda' \cos \phi' = \cos \lambda \cos \phi \\ \sin \lambda' \cos \phi' = \sin \lambda \cos \phi \cos \chi + \sin \phi \sin \chi \\ \sin \phi' = -\sin \lambda \cos \phi \sin \chi + \sin \phi \cos \chi \end{cases} \quad (2.4)$$



**Kuva 2.2:** Horisonttijärjestelmä. Kulma  $A$  on pohjoissuunnasta myötöpäivään mitattu *atsimuutti* ja  $a$  on horisonttitasosta lähtien mitattu *korkeuskulma*.

### 2.1.2 Horisonttijärjestelmä

Havaitsijan kannalta kaikkein luonnollisin koordinaatisto on *horisonttikoordinaatisto*. Sen perustaso on havaitsijan kohdalle asetettu maapallon tangenttitaso, joka leikkaa taivaanpallon *horisonttia* pitkin. Suoraan havaitsijan yläpuolella oleva piste – havaitsijan kautta kulkevan horisonttitason normaalin ja taivaanpallon leikkauspiste – on nimeltään *zeniitti* ja alapuolella oleva *nadiiri*. Zeniitin kautta kulkevia isoympyröitä kutsutaan *vertikaaleiksi* ja ne leikkaavat horisontin kohtisuorasti. Etelä- (ja pohjois-)pisteen kautta kulkevaa vertikaalia kutsutaan *meridiaaniksi*.

*Horisonttijärjestelmän* ensimmäinen koordinaatti on *korkeuskulma* (korkeus, altitudi, elevaatio)  $a$  joka mitataan pitkin horisonttitasosta kohteeseen kulkevaa vertikaalia. Korkeuskulma on välillä  $[-90^\circ, +90^\circ]$  ja se on positiivinen horisontin yläpuolella oleville kohteille, negatiivinen alapuolella. (Ts. jos saamme laskuista negatiivisen korkeuden, ei kohde ole näkyvissä.) Suurimmillaan korkeus on kohteen *kulminoidessa*, ts. kun se on etelämeridiaanissa. Korkeuden sijasta käytetään joskus *zeniittikulmaa*  $z$ ,  $z = 90^\circ - a$ .

Toinen koordinaatti, *atsimuutti*,  $A$  mitataan pitkin horisonttitasoa myötöpäivään kohteen kautta kulkevan vertikaalin ja horisonttitason leikkauspisteeseen. Ikävä kyllä, nollasuunta ei vain ole yksikäsitteisesti sovittu; toiset käyttävät etelää, toiset pohjoista. Geodesiassa käytetään tavallisesti pohjoista nollasuuntana, tähtitieteessä yleensä etelää. Kun muutamat eksentrikot haluavat mitata atsimuutin vastapäivään (esiintyy erityisesti ”ranskalaisessa koulukunnassa” ja koskee muitakin kulmia, esim. Helmert-muunnoksen kiertokulmia!), on syytä olla tarkkana, mitä kukin kulloinkin tarkoittaa. Yritetään jatkossa noudattaa käytäntöä, jossa at-

simuutti mitataan pohjoisesta lähtien myötöpäivään.

Atsimuutti ilmoittaa siis kohteen ilmansuunnan, ts. pohjoinen on  $0^\circ$ , itä  $90^\circ$ , etelä  $180^\circ$  ja länsi  $270^\circ$ . Tämä on todellinen, maantieteellinen suunta; kompassin näyttämä *pohjoissuunta* poikkeaa atsimuutista  $0^\circ$  jopa usealla asteella. Eroa kutsutaan *erannoksi* ja sen suuruus riippuu siitä, missäpäin maapalloa ollaan. Se johtuu magneettisen navan ja maapallon pyörimisakselin määrittämän navan välistä erosta.

Maapallon pyörimisen johdosta kohteen atsimuutti ja korkeus muuttuvat jatkuvasti. Toinen horisonttikoordinaatiston piirre on sen paikallisuus: kullakin havaitsijalla on ikioma koordinaatisto. Koska koordinaatit riippuvat sekä ajasta että paikasta, ei niitä oikein sovi käyttää esimerkiksi tähtikarttojen tai luetteloiden laatimiseen. Sen sijaan, jos halutaan tietää, missäpäin taivasta kohde on, on laskettava horisonttikoordinaatit.

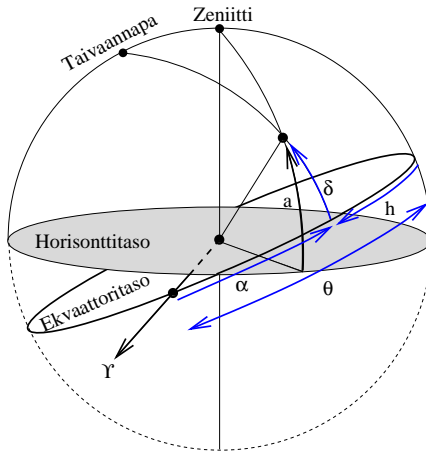
### 2.1.3 Ekvaattorijärjestelmä

Maan pyörimisakselin suunta pysyy lähes muuttumattomana ja näin ollen myös ekvaattorin taso (itse asiassa tämä ei tarkkaan ottaen pidä paikkaansa, mutta palataan siihen hetken päästä). Taivaanpallon ja maan ekvaattoritason leikkausviiva on isoympyrä, jota kutsutaan taivaanpallon ekvaattoriksi. Taivaanpallon pohjoisnapa on tätä isoympyrää vastaava napa, ja samalla maapallon pyörimisakselin ja taivaanpallon leikkauspiste. Tähtitaivas näyttää pyörivän taivaannavan ympäri. Pohjoisnapa jakaa meridiaanin *pohjois-* ja *etelämeridiaaniin*.

Piirretään taivaannavan ja kohteen kautta isoympyrän kaari, joka siis leikkaa ekvaattoritason kohtisuoraan. Kohteen kulmaetäisyys ekvaattorista pitkin em. isoympyrän kaarta on nimeltään *dekliinaatio* ja sitä merkitään tavallisesti kirjaimella  $\delta$ . Kohteen dekliinaatio ei siis muutu vuorokauden kuluessa (ellei kyseessä sitten ole esim. satelliitti, joka itse liikkuu). Ekvaattorin pohjoispuolella dekliinaatio on positiivinen, eteläpuolella negatiivinen. Dekliinaatio vastaa leveysastetta maapallon pinnalla.

Toinen koordinaatti mitataan pitkin ekvaattoritasoa. Nollasuuntaa kutsutaan *kevättasauspisteeksi*  $\Upsilon$  ja koordinaatti, jota nimitetään *rektaskensioksi*,  $\alpha$ , mitataan tästä suunnasta lähtien vastapäivään. Rektaskensiota ja dekliinaatiota käytetään tähtiluetteloissa ja -kartoissa ja satelliitin paikkakin voidaan ilmoittaa tässä koordinaatistossa. Dekliinaatio annetaan normaalisti asteina, mutta syystä joka selviää tuota pikaa, rektaskensio ilmoitetaan normaalisti aikamitoissa (tunteina, minuutteina, sekunteina). Kevättasauspisteen määrittelyyn palaamme hetken päästä.

Ekvaattoritason ja horisonttitason välinen kulma  $\chi$  riippuu havaitsijan leveys-



**Kuva 2.3:** Ekvaattorijärjestelmä. Tähtiajan  $\theta$ , tuntikulman  $h$  ja rektaskension  $\alpha$  välinen yhteys. Kulmaetäisyys ekvaattorin tasosta on nimeltään deklinaatio  $\delta$ . Kevättasauspisteen suunta on merkitty symbolilla  $\Upsilon$ .

asteesta  $\varphi$

$$\chi = 90^\circ - \varphi.$$

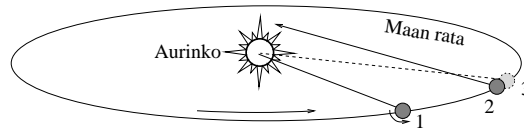
Päiväntasaajalla kulma on siis  $90^\circ$  ja navoilla  $0^\circ$ . Taivaannavan korkeus pohjoishorisontista on sama kuin havaitsijan leveysaste.

Havaitsijan kannalta rektaskensio ja deklinaatio ovat hieman hankalia. Vaikka kohteen koordinaatit pysyvät muuttumattomina, näkyy kohde taivaalla eri suunnalla eri aikaan vuorokaudesta. Näitä koordinaatteja ei siis voi käyttää kohteen etsimiseen taivaalta kuten korkeutta ja atsimuuttia. Ennen kuin pääsemme laskemaan ekvaattori- ja horisonttikoordinaatistojen välistä muunnosta, joudumme vielä tekemään pari määrittelyä.

### 2.1.4 Tähtiaika

*Kevättasauspiste* on se suunta jossa Aurinko vuotuisessa kulussaan nousee ekvaattoritason eteläpuolelta pohjoiselle, ts. *ekliptikan* (eli Maan ratatason) ja *ekvaattorin* leikkauspiste. Sen suunta voidaan realisoida havainnoista suhteellisen helposti, ja sitä on perinteisesti käytetty nollasuuntana.

Maapallon pyörimisen vuoksi kevättasauspiste ei havaitsijan mielestä pysy taivaalla paikallaan, vaan kiertää täyden kierroksen kerran vuorokaudessa havaitsijan horisonttikoordinaatistossa. Kun taivaankanteen ei ole maalattu mitään täplääkään kevättasauspisteen kohdalle, ei sitä voi suoraan käyttää kohteen etsimiseen (itse asiassa kevättasauspisteen seutu on harvinaisen vähätähtistä aluetta). Tarvitsemme apusuunnan ja apusuureen nollapisteen realisoimiseksi.



**Kuva 2.4:** Tähtivuorokausi ja aurinkovuorokausi. Hetkellä 2 maapallo on pyörähtänyt täyden kierroksen ( $360^\circ$ ) hetkeen 1 verrattuna (on siis kulunut yksi tähtivuorokausi). Samanaikaisesti Maa kuitenkin on liikkunut radallaan ja vasta neljää minuuttia myöhemmin, Maan pyörähdettyä n.  $1^\circ$  verran lisää, Aurinko näkyy maanpinnalla olevan tarkkailijan mielestä samassa suunnassa kuin hetkellä 1 (ts. nyt on kulunut yksi aurinkovuorokausi, kohta 3). Kellot käyvät Aurinkoon sidottua aikaa. Maan vuorokaudessa radallaan liikkumaa matkaa on kuvassa suuresti liioiteltu.

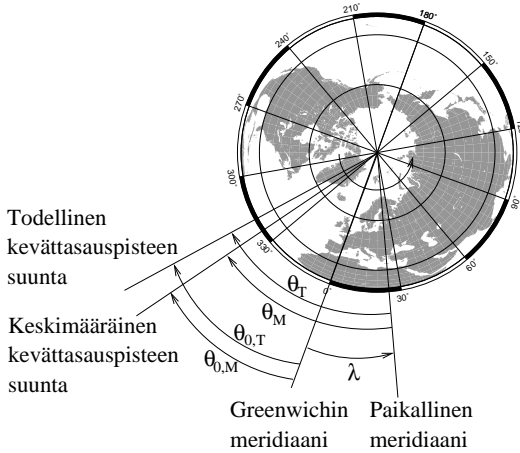
Koska havaitsijan kannalta etelämeridiaani on luonnollinen koordinaatiston nollakohta, määrittelemme rektaskensiota vastaavan paikallisen koordinaatin, *tuntikulman*,  $h$ , joka mitataan etelämeridiaanista myötöpäivään (kuva 2.3). Tuntikulma on muuttuva suure ja kasvaa tasaisella nopeudella ajan mukana. Kevättasauspisteen tuntikulmaa kutsutaan *tähtiajaksi* eli *sideeriseksi ajaksi*,  $\theta$ . Tähtiajan, tuntikulman ja rektaskension välillä on siis yhteys

$$\theta = h + \alpha \quad (2.5)$$

Koska tuntikulma ja tähtiaika kasvavat tasaisesti ajan mukana, on ne luonnollisinta ilmoittaa aikamitoissa. Samoin myös rektaskensio ilmoitetaan aikamitoissa. Kaikki kulmat ovat siis välillä  $[0, 24)$  h. Tähtiaikakin on paikallinen suure ja jokaiselle havaitsijalle ikioma.

Tähtiaika on  $0^h$  kevättasauspisteen *kulminoidessa* (ts. kun se on etelämeridiaanissa). Maapallon pyöriessä tähtiaika kasvaa, kunnes vuorokauden kuluttua, kevättasauspisteen jälleen kulminoidessa tähtiaika on kasvanut 24 h. Seinäkellosta katsoen kevättasauspisteen (tai minkä tahansa tähden) kulminaatioiden väli ei suinkaan ole 24 tuntia vaan nelisen minuuttia alle. Syynä on se, että kellomme käyvät *synodista*, Aurinkoon sidottua aikaa. Maan rataliikkeen vuoksi Aurinko näyttää liikkuvan hieman hitaammin kuin tähdet, joten tähtien mukaan käyvän ajan, *sideerisen ajan* täytyy seinäkelloon nähden hieman edistää (kuva 2.4). *Tähtivuorokauden* pituus on  $23^h 56^m 04.1^s$  seinäkelloaikaa.

*Tähtivuorokauden* pituus on likimain sama kuin maapallon todellinen pyörähdysaika akselinsa ympäri. Pieni ero johtuu siitä, että kevättasauspisteen paikka ei ole kiinteä, vaan liikkuu mm. *prekession* vuoksi n.  $50''$  vuodessa. Palaamme luvussa 2.1.6 koordinaatteja muuttaviin syihin. Tähtiaika Greenwichissä (ja kaikkialla



**Kuva 2.5:** Paikallinen tähtiaika  $\theta_M$  ja Greenwichin tähtiaika  $\theta_{0,M}$  mitataan keskimääräisen kevättasauspisteen suuntaan (kaavat (2.6) ja (2.8)). Ajat eroavat toisistaan havaintopaikan pituusasteen  $\lambda$  verran. Paikallinen todellinen tähtiaika  $\theta_T$  ja Greenwichin todellinen tähtiaika  $\theta_{0,T}$  mitataan todelliseen kevättasauspisteen suuntaan (kaava (2.20)).

nollameridiaanilla) hetkellä UT1 saadaan kaavasta

$$\begin{aligned} \theta_0 = & 1.0027379093 \text{ UT1} \\ & + 6^{\text{h}}41^{\text{m}}50.54841^{\text{s}} \\ & + 8640184.812866^{\text{s}} T \\ & + 0.093104^{\text{s}} T^2 \\ & - 6.2 \times 10^{-6} \text{ s } T^3 \end{aligned} \quad (2.6)$$

missä  $T$  on epookista J2000.0 (1.1.2000 klo 12 UT1, JD=2451545.0) havaintohetkeä edeltäneeseen Greenwichin keskiyöhön laskettujen *juliaanisten vuosisatojen* määrä (tällä ei ole mitään tekemistä juliaanisen kalenterin kanssa),

$$T = \frac{\text{JD}(0^{\text{h}}\text{UT}) - 2451545.0}{36525}. \quad (2.7)$$

UT1 on luvussa 2.2 esiteltävä yleisaika ("Greenwichin aika") ja JD *juliaaninen päivä* (ks. laatikko 2.2).

Tähtiaika halutulla paikkakunnalla saadaan lisäämällä kaavaan (2.6) paikkakunnan pituusaste aikamitoiksi muutettuna, ts.

$$\theta = \theta_0 + \lambda/15. \quad (2.8)$$

Tämän voi ymmärtää yksinkertaisesti ajattelemalla, että siirrymme Maan pinnalla esim.  $15^\circ$  itään. Nyt taivaalla olevat kohteet näkyvät tuon verran lännempänä, ts. kohteen tuntikulma on kasvanut  $15^\circ$ . Myös kevättasauspisteen tuntikulma ja siten myös tähtiaika on kasvanut saman verran. Kulma- ja aikayksiköiden välinen suhde puolestaan saadaan siitä, että  $24^{\text{h}} \cong 360^\circ$ , joten  $15^\circ \cong 1^{\text{h}}$ .



### Esimerkki 2.1 Tähtiajan laskeminen

Tähtiaika on paikallista aikaa, ja kaava (2.6) antoi tähtiajan Greenwichissä. Kun tähtiaika halutaan laskea Taka-Hikiällä ( $\varphi = 60^{\circ}45'$ ;  $\lambda = 25^{\circ}$ ) aprillipäivänä 1996 klo 23:35 kesäaikaa, lasketaan ensin tähtiaika Greenwichissä ja lisätään tähän T-H:n pituusaste (aikamitoiksi muutettuna). Suomessa käytetään *vyöhykeaikaa*, joka on kaksi tuntia edellä UT:stä (paitsi maaliskuun viimeisen viikonlopun ja lokakuun viimeisen viikonlopun välisenä aikana (vuoteen 1995 asti syyskuun), jolloin aikaeroa on kolme tuntia). Siis tähtiaika pitäisi saataman kello 20:35 UT.

$$\begin{aligned} \text{JD}(1.4.1996) &= 2450174.5 \\ \theta_0(20 : 35) &= 9 : 13 : 31 \\ \lambda/15 &= 1.6667\text{h} \\ \theta(\text{T} - \text{H}, 23 : 35) &= 10 : 53 : 31 \end{aligned}$$

### Esimerkki 2.2 Tähtiajan arviointi päässä laskulla

Tähtiaika voidaan myös arvioida päässä laskuilla moniin tarkoituksiin riittävällä tarkkuudella. Kuukaudessa tähtiaika edistää aurinkoaikakelloon verrattuna kaksi tuntia. Tähtiaikahan oli  $0^{\text{h}}$  kevättasauspisteen kulminoidessa. Kevättasauspiste on se piste, jossa Aurinko on *kevättasauspäivänä*, ts. ko. päivänä tähtiajan ja aurinkoaajan välinen ero on 12 tuntia. Vastaavasti *syystasauspäivänä* puolta vuotta myöhemmin kevättasauspiste on etelässä keskiyöllä, jolloin tähtiaika ja aurinkoaika ovat samoja.

Arvioidaan edellisen esimerkin tähtiaika päässä laskulla: Paikallinen keskiaurinkoaika saadaan seinäkelloajasta vähentämällä ensin kesäajan vuoksi yksi tunti, jolloin päästään Suomen viralliseen vyöhyke aikaan. Sen jälkeen tästä vähennetään vielä  $20^{\text{m}}$ , koska Taka-Hikiä sijaitsee  $5^{\circ}$  länteen Suomen vyöhykeajan mukaisesta pituuspiiristä. Aikamitoissa  $5^{\circ}$  vastaa  $20^{\text{m}}$ . Havaintohetkellä paikallinen keskiaurinkoaika on siis  $23:35 - 1:00 - 0:20 = 22:15$ .

Kevättasauspäivä oli kymmenen päivää aikaisemmin, joten tähtiaika on edistänyt aprillipäivään tultaessa 40 minuuttia aurinkoaikaan nähden. Tähtiaika on siis  $22:15 - 12:00 + 0:40 = 10:55$ . Tulos on kohtuullisen lähellä edellisen tehtävän tulosta. Tällä menetelmällä pääsee yleensä alle  $15^{\text{m}}$  päähän oikeasta arvosta.

### Laatikko 2.2 Juliaaninen päivä

Kaavoissa esiintyvä suure JD on nimeltään *juliaaninen päivä*, ja se on tähtitieteessä yleinen tapa numeroida päivät juoksevasti. Juliaaninen päivä vaihtuu klo 12 UT siitä syystä, että se on aikoinaan tehty eurooppalaisten tähtitieteilijöiden iloksi, jolloin päivämäärää ei tarvinnut vaihtaa keskellä yön havaintoja. Päivämäärän nollakohta on vuodessa 4713 e.Kr., joten negatiivisia päivälukuja ei hevin esiinny. Koska päivännumero on varsin suuri luku, laskuissa käytetään joskus *modifioitua juliaanista päivää* (MJD). Se saadaan vähentämällä juliaanisesta päivämäärästä luku 2 400 000.5. MJD siis vaihtuu kello 0 UT. Juliaaninen päivä voidaan laskea vaikkapa seuraavasti:

$$JD = \text{INT}(365.25f) + \text{INT}(30.6001(g + 1)) + p + B + 1720994.5$$

missä

$\text{INT}(x)$  on luvun  $x$  kokonaisosa,

$$\text{jos kuukausi} = [1,2] \begin{cases} f = \text{vuosi} - 1 \\ g = \text{kuukausi} + 12 \end{cases}$$

$$\text{jos kuukausi} = [3..12] \begin{cases} f = \text{vuosi} \\ g = \text{kuukausi} \end{cases}$$

$p = \text{päivä}$

$$A = \text{INT}(f/100)$$

$$B = 2 - A + \text{INT}(A/4).$$

FORTTRAN- ja muille ohjelmoijille on kätevä rivin lauseke JD:n laskemiseksi:

$$JD = 367 * Y - 7 * (Y + (M + 9)/12)/4 + 275 * M/9 + D + 1721013.5$$

Jakolaskut ovat kokonaisjakoja ja kaava pätee vuoden 1900 jälkeiselle ajalle. Tässä  $Y$  on vuosi,  $M$  kuukausi ja  $D$  päivä.

### 2.1.5 Horisontti- ja ekvaattorikoordinaatistojen välinen muunnos

Laskemme seuraavaksi muunnoksen horisontti- ja ekvaattorikoordinaatistojen välillä. Kun teemme kaavaan (2.4) seuraavat sijoitukset

$$\begin{cases} \lambda = A + 90^\circ \\ \phi = a \\ \lambda' = 90^\circ - h \\ \phi' = \delta \\ \chi = 90^\circ - \varphi \end{cases} \quad (2.9)$$

missä kulma  $\varphi$  on taivaannavan korkeus, joka on sama kuin havaintopaikan leveysaste, saamme

$$\begin{aligned}\sin h \cos \delta &= -\sin A \cos a \\ \cos h \cos \delta &= -\cos A \cos a \sin \varphi + \sin a \cos \varphi \\ \sin \delta &= \cos A \cos a \cos \varphi + \sin a \sin \varphi\end{aligned}\quad (2.10)$$

Vastaavasti käänteismuunnos on

$$\begin{aligned}\sin A \cos a &= -\sin h \cos \delta \\ \cos A \cos a &= -\cos h \cos \delta \sin \varphi + \sin \delta \cos \varphi \\ \sin a &= \cos h \cos \delta \cos \varphi + \sin \delta \sin \varphi\end{aligned}\quad (2.11)$$

Sama muunnos voidaan esittää myös *kiertomatriisien* avulla. Kirjoitetaan aluksi muunnos horisonttikoordinaatistosta ekvaattorikoordinaatistoon. Atsimuutti laskettiin pohjoisesta, joten koordinaatistoa on kierrettävä ensin  $z$ -akselin ympäri  $180^\circ$  verran. Kun tätä sitten kierretään  $x$ -akselin ympäri kulman  $-(90^\circ - \varphi)$  verran saammekin jo ekvatoriaaliset koordinaatit, tosin vain sen, jossa toisena koordinaattina on tuntikulma  $h$ . Kulma  $\varphi$  on *taivaannavan korkeus*, joka on sama kuin havaintopaikan *leveysaste*, joten sen etäisyys *zeniitistä* on tuo  $(90^\circ - \varphi)$ .

Jotta saisimme rektaskension, joudumme ensin kääntämään koordinaatiston vasenkätiseksi ja sitten kiertämään sitä vielä  $z$ -akselin ympäri tähtiajan verran. Kaiken kaikkiaan teemme siis seuraavat kierrot:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\alpha,\delta} = \mathbf{R}_3(-\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R}_1(-(90^\circ - \varphi)) \mathbf{R}_3(180^\circ) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{A,a} \quad (2.12)$$

Vastaavasti käänteismuunnos on

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{A,a} = \mathbf{R}_3(-180^\circ) \mathbf{R}_1(90^\circ - \varphi) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R}_3(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\alpha,\delta} \quad (2.13)$$

Lienee makuasia kumpaa muotoa (2.10 / 2.12 vai 2.11 / 2.13) käyttää. Käsien lasien jälkimmäiset tapaavat olla työläämpiä, mutta ohjelmoitaessa matriisioperaatiot tuottavat tavallisesti lukukelpoisempaa koodia, koska kutsuva rutiini tulee yksinkertaisemmaksi. Jälkimmäiset saattavat olla myös helpompia muistaa.

Kohteen näkyminen voidaan siis laskea seuraavasti kun sen *rektaskensio* ja *deklinaatio* tunnetaan:

- Lasketaan ensin havaintohetkeä ja -paikkaa vastaava tähtiaika  $\theta$ .

- Vähennetään rektaskensio, jolloin saadaan havaintohetken tuntikulma.
- Sijoitetaan deklinaatio, tuntikulma ja leveysaste viimeiseen kaavoista (2.11), jolloin saadaan kohteen korkeuskulma.
- Jos korkeus on negatiivinen, ei laskemista kannata jatkaa: kohde on taivaanrannan alapuolella.
- Koska atsimuutti on välillä  $[0,360)$ , on sekä  $\sin A$  että  $\cos A$  laskettava oikean neljänneksen selville saamiseksi.

### Esimerkki 2.3 Satelliitin näkyvyyden laskeminen

Olkoon esimerkin 2.1 ajanhetkellä satelliitin toposentriset koordinaatit

$$\begin{aligned}\alpha &= 12^{\text{h}}10^{\text{m}} \\ \delta &= 10^{\circ}14' \quad .\end{aligned}$$

Näkyykö satelliitti Taka-Hikiällä ja jos näkyy, niin missä suunnassa?

Kaavasta (2.5) saamme satelliitin tuntikulmaksi

$$h = 10 : 53 : 31 - 12 : 10 = -1.2747^{\text{h}}.$$

Viimeisestä kaavasta (2.11) saamme korkeudeksi

$$a = 15.5^{\circ}.$$

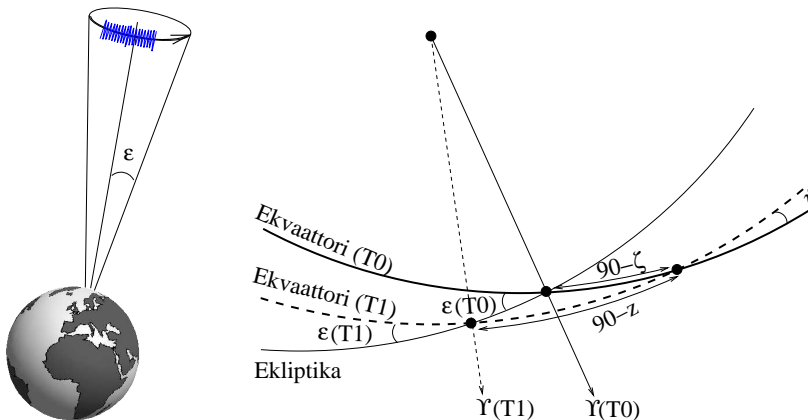
Satelliitti on siis taivaanrannan yläpuolella. Kahdesta ensimmäisestä kaavasta (2.11) seuraa

$$\begin{aligned}\sin A &= 0.993 \\ \cos A &= -0.118.\end{aligned}$$

Sinin ja kosinin merkkien perusteella

$$A = 96.8^{\circ}.$$

Satelliitti on itäkaakon suunnalla runsaan  $15^{\circ}$  korkeudella.



**Kuva 2.6: Prekessio.** Vasemmalla: Maan pyörimisakseli kiertyy ekliptikan navan ympäri 26000 vuodessa. Kuun aiheuttama *nutaatio* näkyy pienenä häiriönä prekessioliikkeessä. Kuvassa nutaation suuruutta on liioiteltu. Oikealla: Hetkellä  $T_0$  ekvaattori ja ekliptika ovat yhtenäisellä viivalla merkityissä asennoissa, hetkellä  $T_1$  ekvaattori on kiertynyt katkoviivalla merkittyyn asentoon. Kevättasauspiste  $\Upsilon$ , joka on ekvaattorin ja ekliptikan leikkauspiste on prekession vaikutuksesta kiertynyt.

### 2.1.6 Koordinaatteja muuttavat tekijät

Rektaskensio ja deklinaatio eivät hyvistä yrityksistämme huolimatta ole pysyviä, vaan muuttuvat hitaasti ajan mukana. Osa muutoksista on *sekulaarisia* ("vuosisataisia"; hitaasti, usein vallitsevasti yhteen suuntaan tapahtuvia), osa jaksollisia. Niinpä koordinaattien lisäksi on ilmoitettava myös se ajanhetki eli *epookki* jolle ne on annettu. Nykyisin käytössä on epookki J2000.0, sekä havaintohetki. Seuraavassa on lueteltu joitakin koordinaatteja muuttavista tekijöistä. Tarkemmin niihin voi tutustua minkä tahansa astronomisen geodesian tai pallotähtitieteen oppikirjan avulla (ks. esim. Karttunen *et al.*, 2003; laskukaavat löytyvät mm. julkaisusta McCarthy and Petit, 2004.).

#### Prekessio

Maa on hieman litistynyt, joten Kuu ja Aurinko pyrkivät vetovoimallaan kääntämään ekvaattoritason *ekliptikan* (eli maan ratatason) suuntaiseksi. Maapallon pyörimisen vuoksi tämä ei onnistu, vaan seurauksena on pyörimisakselin kiertyminen eli *prekessio*. Yhteen kierrokseen kuluu aikaa n. 26000 vuotta. Prekession vaikutuksesta kevättasauspiste liikkuu ekliptikaa pitkin myötäpäivään  $50.37''$  vuodessa.

Prekessio muuttaa sekä rektaskensiota että deklinaatiota. Muutos voidaan laskea kolmen kiertomatriisin avulla:

$$\mathbf{R}^P = \mathbf{R}_3(-z)\mathbf{R}_2(\vartheta)\mathbf{R}_3(-\zeta) \quad (2.14)$$

joka auki kirjoitettuna on

$$\mathbf{R}^P = \begin{pmatrix} -\sin \zeta \sin z + \cos \zeta \cos z \cos \vartheta & -\cos \zeta \sin z - \sin \zeta \cos z \cos \vartheta & -\cos z \sin \vartheta \\ \sin \zeta \cos z + \cos \zeta \sin z \cos \vartheta & \cos \zeta \cos z - \sin \zeta \sin z \cos \vartheta & -\sin z \sin \vartheta \\ \cos \zeta \sin \vartheta & -\sin \zeta \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Kertoimet  $\zeta$ ,  $z$  ja  $\vartheta$  saadaan seuraavista sarjakehitelmistä kun prekessoitavana ovat standardiepookille J2000.0 annetut koordinaatit:

$$\begin{aligned} \zeta &= 2306.2181''T + 0.30188''T^2 + 0.017998''T^3 \\ z &= 2306.2181''T + 1.09468''T^2 + 0.018203''T^3 \\ \vartheta &= 2004.3109''T - 0.42665''T^2 - 0.041833''T^3 \end{aligned} \quad (2.16)$$

missä  $T$  on epookista J2000.0 kuluneiden *juliaanisten vuosisatojen* määrä (2.7).

Myös ekliptikan taso muuttuu. Syynä on *planeettaprekessio*, ts. planeettojen aiheuttamat häiriöt pyrkivät kääntämään maapallon ratatasoa. Planeettaprekession aiheuttama kevättasauspisteen liike on n. 0.12'' vuodessa.

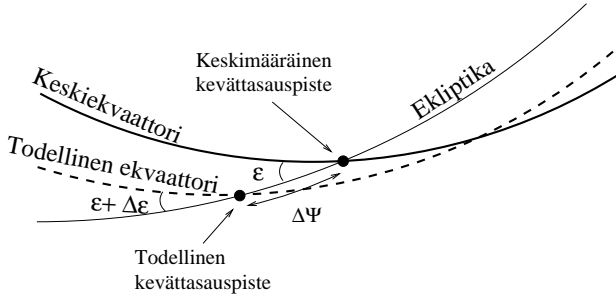
*Ekliptikan kaltevuus* eli ekliptikan ja ekvaattoritason välinen kulma on

$$\varepsilon = 23^\circ 26' 21.448'' - 46.8150''T - 0.00059''T^2 + 0.001813''T^3 \quad (2.17)$$

missä  $T$  on epookista J2000.0 laskettujen juliaanisten vuosisatojen määrä. Kaavat pätevät muutaman vuosisadan nykyhetkestä eteen- ja taaksepäin.

## Nutaatio

Maapallon luonnollinen satelliitti, Kuu, aiheuttaa myös häiriöitä maapallon asentoon. Kuun ratataso prekessoi 18.6 vuoden jaksoissa, ja tämä aiheuttaa periodisia, noin kymmenen kaarisekunnin suuruisia häiriöitä maapallon prekessioliikkeeseen. Kuu aiheuttaa myös lyhytjaksoisempia muutoksia, aina vuorokauteen asti, mutta ne ovat päätermiä huomattavasti pienempiä. Kaiken kaikkiaan *nutaation* hallitseminen on vaikeaa, sillä Kuun rataliike on hyvin monimutkaista.



**Kuva 2.7:** Nutaatien vaikutus kevätasauspisteen paikkaan.

Myös nutaatio voidaan esittää kiertomatriisilla

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^N &= \mathbf{R}_1(-\varepsilon - \Delta\varepsilon)\mathbf{R}_3(-\Delta\psi)\mathbf{R}_1(\varepsilon) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\psi \cos \varepsilon & -\Delta\psi \sin \varepsilon \\ \Delta\psi \cos \varepsilon & 1 & -\Delta\varepsilon \\ \Delta\psi \sin \varepsilon & \Delta\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Tässä  $\Delta\varepsilon$  on nutaatio ekliptikan kaltevuudessa,  $\Delta\psi$  longitudissa,  $\Delta\psi \cos \varepsilon$  rektaskensiossa ja  $\Delta\psi \sin \varepsilon$  nutaatio deklinaatiossa. Koska  $\Delta\varepsilon$  ja  $\Delta\psi$  ovat pieniä kulmia, on kiertomatriisissa tehty approksimaatio  $\cos \Delta\varepsilon \approx 1$ ,  $\sin \Delta\varepsilon \approx \Delta\varepsilon$ ,  $\cos \Delta\psi \approx 1$  ja  $\sin \Delta\psi \approx \Delta\psi$ . *Todellinen ekliptikan kaltevuus* on

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon. \quad (2.19)$$

Suuret on taulukoitu esim. *Astronomical Almanacissa*. Sarjakehitelmät ( $\Delta\psi$  106 termiä;  $\Delta\varepsilon$  64 termiä) löytyvät mm. teoksesta *Explanatory Supplement of the Astronomical Almanac*. Muutaman kaarisekunnin tarkkuuden riittäessä nutaatio voidaan laskea myös oheisen laatikon kaavoilla.

Vuonna 2000 IAU:n yleiskokous hyväksyi uudet prekession ja nutaation laskukaavat, jotka vähitellen korvaavat nykyiset. Ne sisältävät lähes 700 termiä, ja antavat navan suunnan 0.2 millikaarisekunnin tarkkuudella.

Kaavan (2.6) tähtiaika oli *keskimääräinen tähtiaika* Greenwichissä. Koska nutaatio vaikuttaa ekliptikaan ja siis myös kevätasauspisteen suuntaan, on todellisen tähtiajan, so. kevätasauspisteen havaintohetkeä vastaavan todellisen paikan laskemiseksi tehtävä vielä nutaatiosta johtuva korjaus

$$\theta_0 = \theta + \Delta\psi \cos \varepsilon \quad (2.20)$$

Aivan vastaavasti havaintohetken todellinen rektaskensio ja deklinaatio lasketaan keskimääräisistä tekemällä nutaatiosta johtuva korjaus.

### Laatikko 2.3 Prekession ja nutaation likimääräiset kaavat

Jos muutaman kaarisekunnin tarkkuus riittää, sekä prekessio että nutaatio voidaan laskea likimäärin seuraavilla kaavoilla. Tarkempia kehitelmiä tarvitsevat löytävät ne esim. teoksista *Explanatory Supplement of the Astronomical Almanac* tai McCarthy and Petit, 2004.

Prekessio:

$$\begin{aligned}d\delta &= 20.038 ["/a] \cos \alpha \\d\alpha &= 3.074 [s/a] + 1.336 [s/a] \sin \alpha \tan \delta\end{aligned}$$

Kaavat antavat vuotuisen muutoksen deklinaatioon kaarisekunteinä ja rektaskensioon aikasekunteinä. Vakiot pätevät vuoden 2000 läheisyydessä.

Nutaatio:

$$\begin{aligned}C_1 &= 125.0^\circ - 0.05295t \\C_2 &= 200.9^\circ + 1.97129t \\ \Delta\psi &= -0.0048^\circ \sin C_1 - 0.0004^\circ \sin C_2 \\ \Delta\varepsilon &= 0.0026^\circ \cos C_1 + 0.0002^\circ \cos C_2 \\ t &= JD - 2451545.0.\end{aligned}$$

$\Delta\psi$  ja  $\Delta\varepsilon$  voidaan sijoittaa kaavaan (2.18).

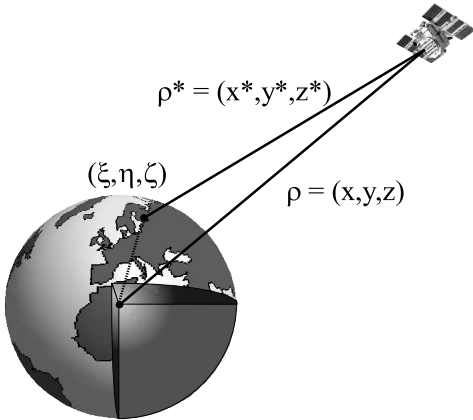
Edellä olleet muutokset vaikuttivat itse koordinaatistoon. Tähän ryhmään kuuluu vielä *napavariaatio*, mutta koska se ei vaikuta tähtitieteellisiin koordinaatteihin, käsittelemme sen terrestristen koordinaatistojen yhteydessä. Seuraavat eivät vaikuta koordinaatistoihin, mutta muuttavat kohteiden näennäisiä paikkoja taivaalla.

### Toposentrinen koordinaatisto

Kun läheistä kohdetta, kuten satelliittia tai planeettaa, katsotaan maapallon eri puolilta, se näkyy tähtitaustaa vasten eri suunnissa. Paikat lasketaan yleensä geosentrisinä, mutta satelliittien tai aurinkokunnan kohteiden ollessa kyseessä on havaitsijan paikkakin otettava huomioon, ts. suunnat on redukoitava havaitsijakeskiseksi eli *toposentrisiksi*.

Yksinkertaisimmin tämä käy vähentämällä havaitsijan geosentrinen paikkavektori kohteen geosentrisestä paikkavektorista (pätee toki yhtä lailla myös nopeusvektoreille). Jos satelliitin geosentrinen paikkavektori on  $\vec{r} = (x, y, z)$  ja ha-





**Kuva 2.8:** Satelliitin geosentrinen  $\rho$  ja toposentrinen  $\rho^*$  paikka.

vaitsijan paikkavektori  $\mathbf{r} = (\xi, \eta, \zeta)$ , on satelliitin toposentrinen paikka  $\vec{\rho}^*$ :

$$\vec{\rho}^* = \vec{\rho} - \mathbf{r}$$

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

### Aberraatio

Valon äärellisestä nopeudesta johtuu, että kohde näyttää siirtyvän hieman havait-sijan liikkeen suuntaan. Tätä muutosta kutsutaan *aberraatioksi* ja sen suuruus on

$$a = \frac{v}{c} \sin \vartheta, \quad (2.22)$$

missä  $v$  on havaitsijan nopeus,  $c$  valon nopeus ja  $\vartheta$  havaitsijan liikkeen ja kohteen todellisen suunnan välinen kulma. Maapallon rataliikkeestä aiheutuva suurin muutos, vuotuinen aberraatio on  $21''$  ja pyörimisestä johtuva vuorokautinen aberraatio maksimissaan  $0.3''$ . Vuotuinen aberraatio ei vaikuta satelliittien tapauksessa.

Koska planeetta tai satelliitti ehtii liikkua radallaan sinä aikana kun valo tulee sieltä silmäämme, ei kohde enää havaintohetkellä ole siinä paikassa, missä se näyttää olevan. Planeettojen tapauksessa sitä kutsutaan *planeetta-aberraatioksi*. Sen suuruus riippuu sekä kohteen etäisyydestä että nopeuden näkösädetä vastaan kohtisuorasta komponentista. GPS-satelliiteille suunnanmuutos on maksimissaan muutama kaarisekunti, eikä sillä ole vaikutusta paikannukseen.

### Refraktio

Koska ilmakehä taittaa valoa, muuttuu kohteen paikka riippuen sen näennäisestä korkeudesta taivaalla. *Refraktion* suuruuteen vaikuttaa paitsi ilmakerroksen paksuus, myös ilmanpaine, lämpötila, kosteus jne., joten refraktion täsmällinen määrittäminen on vaikeaa. Jos zeniittietäisyys  $z$  on alle  $75^\circ$ , voidaan refraktiota approksimoida kaavalla

$$R = \frac{P}{273 + T} 0.00452^\circ \tan z, \quad (2.23)$$

missä  $P$  on ilmanpaine pascaleina ja  $T$  lämpötila Celsius-asteina. Horisontissa refraktion suuruus on puolisen astetta.

Edellä oleva pätee vain näkyvälle valolle; mikroaaltosäteily, kuten *GPS-signaali*, kulkee eri tavalla. Lisäksi mukaan tulevat *troposfäärin* ja *ionosfäärin* vaikutukset itse signaaliin, jotka muuttavat signaalin kulkuaitaa, mutta tästä enemmän myöhemmissä kappaleissa.

### Esimerkki 2.4 Satelliitin geosentrinen ja toposentrinen paikka

Olkoon satelliitin geosentrinen paikka  $(\alpha, \delta)$ -koordinaatistossa epookissa J2000.0 esimerkin 2.1 ajanhetkelle

$$\begin{aligned} \alpha &= 19^{\text{h}} 09^{\text{m}} 30^{\text{s}} \\ \delta &= 1^\circ 04' 0'' \end{aligned}$$

ja etäisyys Maan massakeskipisteestä

$$r = 1.34R_{\oplus} = 8547 \text{ km.}$$

Laske satelliitin geosentriset ja toposentriset  $(xyz)$ -koordinaatit ja toposentrinen rektaskensio ja deklinaatio, kun havaintopaikka on Taka-Hikiällä,  $\phi = 60^\circ 45'$ ;  $\lambda = 25^\circ$ .

Lasketaan havaitsijan geosentriset  $(\xi, \eta, \zeta)$ -koordinaatit, kaavat (2.32):

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2830 \text{ km} \\ 1320 \text{ km} \\ 5540 \text{ km} \end{pmatrix}.$$

Satelliitin geosentriset  $(xyz)$ -koordinaatit ovat

$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \cos \delta = 0.400R_{\oplus} = 2550 \text{ km} \\ y = r \sin \alpha \cos \delta = -1.279R_{\oplus} = -8158 \text{ km} \\ z = r \sin \delta = 0.025R_{\oplus} = 159 \text{ km} \end{cases}$$

ja toposentriset  $(x^* y^* z^*)$ -koordinaatit

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2550 \\ -8158 \\ 159 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2830 \\ 1320 \\ 5540 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -280 \\ -9478 \\ -5381 \end{pmatrix},$$

sekä toposentrisen etäisyys  $r^* = 10902$  km. Toposentrisen rektaskensio ja deklinaatio,  $\alpha^* \delta^*$  on

$$r^* \begin{pmatrix} \cos \alpha^* \cos \delta^* \\ \sin \alpha^* \cos \delta^* \\ \sin \delta^* \end{pmatrix} = 10902 \text{ km} \begin{pmatrix} -0.026 \\ -0.869 \\ -0.494 \end{pmatrix}$$

josta

$$\left. \begin{array}{l} \delta^* = -29.6^\circ \\ \cos \alpha^* = -0.030 \\ \sin \alpha^* = -0.999 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha^* = 17^{\text{h}} 53^{\text{m}}$$

Kaavasta 2.11 saamme satelliitin korkeudeksi  $a = -32^\circ$ , joten eipä näy Takahikiällä.

## Esimerkki 2.5 Prekessio- ja nutaatiokorjaus

Laskemme vielä edellisen esimerkin satelliitille prekessio- ja nutaatiokorjaukset epookista J2000.0 epookkiin 1.4.1996 klo 20:35. Aluksi apusuuret prekessio- korjausta varten, (2.16):

$$\begin{aligned} JD &= 2450174.5 + (20 : 35 - 12^{\text{h}})/24 = 2450174.858 \\ T &= (JD - 2451545.0)/36525 = -0.037512 \\ \zeta &= -86.51145'' \\ z &= -86.51034'' \\ \vartheta &= -75.18720'' \end{aligned}$$

Kaavoista (2.14) saamme

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{1.4.96} &= \mathbf{R}^{\text{P}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{J2000.0} \\ &= \begin{pmatrix} 1.00000 & 0.00084 & 0.00047 \\ -0.00084 & 1.00000 & 0.00000 \\ -0.00036 & 0.00000 & 1.00000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.400 \\ -1.279 \\ 0.025 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3989 \\ -1.2793 \\ 0.0023 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Näin saatuihin koordinaatteihin tehdään vielä nutaatiokorjaus. Lasketaan aluksi apusuureet kaavaa (2.18) varten:

$$\begin{aligned} t &= -1370.1420 \\ C_1 &= 197.549 \\ C_2 &= -2500.947 \\ \Delta\psi &= 0.0013167 \\ \Delta\varepsilon &= -0.002290 \\ \varepsilon &= 23^\circ 26' 23.204'' \end{aligned}$$

josta saamme nutaatiokorjatuiksi koordinaateiksi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.00000 & -0.00121 & -0.00052 \\ 0.00121 & 1.00000 & 0.00229 \\ 0.00052 & -0.00229 & 1.00000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.3989 \\ -1.2793 \\ 0.0023 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4004 \\ -1.2788 \\ 0.0054 \end{pmatrix}$$

### 2.1.7 Kansainvälinen tähtitieteellinen koordinaattijärjestelmä

Tähtitieteellisten koordinaattijärjestelmien lopuksi annamme tarkan määrittelyn ekvaattorijärjestelmälle ja sen realisaatiolle. Järjestelmää kutsutaan *kansainväliseksi tähtitieteelliseksi koordinaattijärjestelmäksi*, *ICRS* (International Celestial Reference System) ja sen realisaatio on *tähtitieteellinen koordinaatisto*, *ICRF* (International Celestial Reference Frame).

Kuten mekaniikasta tiedetään, *Newtonin liikelait* pätevät vain *inertiaalikoordinaatistossa*, ts. koordinaatistossa joka on joko levossa tai tasaisessa suoraviivaisessa liikkeessä. Tämän määrittelyn mukaista koordinaatistoa käytetään Maata kiertävien satelliittien ratalaskuissa ja niiden paikkojen ilmoittamiseen. Siksi määriteltävän koordinaattijärjestelmän ja sen realisaation pitää täyttää tämä ehto.

Vuonna 1991 *Kansainvälinen tähtitieteellinen unioni* (*International Astronomical Union, IAU*) päätti yleiskokouksessaan uuden tähtitieteellisen koordinaatiston perustamisesta. Syynä oli se, että käytössä ollut realisaatio, *FK5-tähtiluettelo* (Fundamental Katalog) ei tarkkuudeltaan enää vastannut uusimpien havaintojen vaatimuksia. 1990-luvun alussa Maata kiertänyt *Hipparcos-satelliitti* oli mitannut 118 218 tähden paikat noin millikaarisekunnin tarkkuudella, joka on pari kertaluokkaa parempi kuin mihin maanpäällisillä havainnoilla päästään optisella alueella. Lisäksi VLBI-mittausten avulla oli radioalueella saatu satojen ekstragalaktisten kohteiden (kvasaarien) paikat likimain samalla tarkkuudella. Uusi ICRS korvasi FK5:een perustuvan järjestelmän vuoden 1998 alussa.

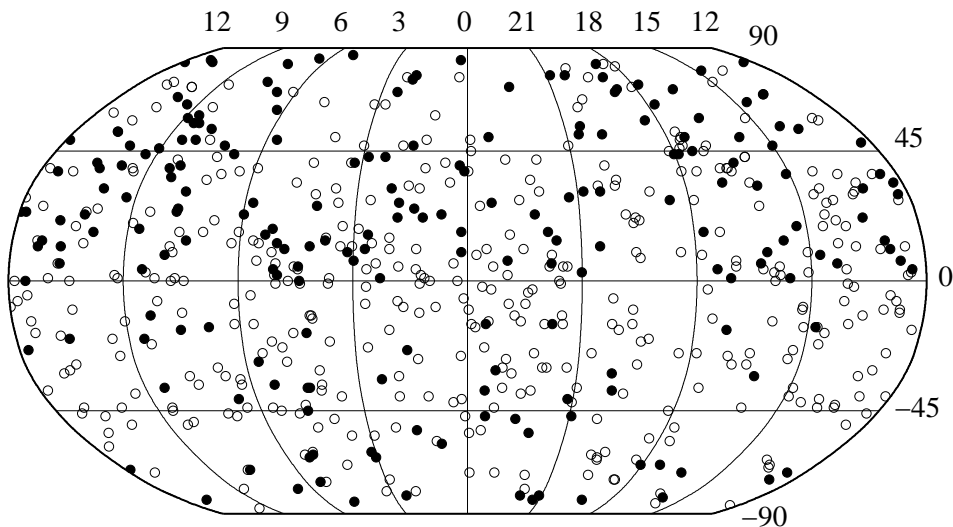
Aiemmasta poiketen ICRS on *kinemaattinen järjestelmä*, ts. se perustuu tähtien ja kvasaarien mitattuihin paikkoihin. Sen mukaisen koordinaatiston akselit

on orientoitu järjestelmän määrittävien kohteiden avulla (kuva 2.9). Aiempi FK5-määritelmä oli *dynaaminen*, ts. se perustui annettuna epookkina Maan *ekvaattorin* ja *ekliptikan* (Maan ratatason) asentoon ja näiden leikkauspisteen, *kevättasauspisteen*, suuntaan.

Uuden järjestelmän etuna on se, että se on ajasta ja paikasta riippumaton. Järjestelmän määrittelevät kvasaarit ovat niin kaukana (satoja miljoonia valovuosia), että niiden paikat taivaalla eivät muutu vuosisatojenkaan kuluessa. Ne muodostavat ajasta riippumattoman kiintopisteistön. Tähtien tapauksessa niiden ominaisliike täytyy ottaa huomioon; mm. tästä johtui, että FK5-luettelon paikat tulivat aikaa myöten yhä epätarkemmiksi, koska ominaisliikkeitä ei tunnettu riittävällä tarkkuudella.

Yhteensopivuuden takaamiseksi vanhojen järjestelmien kanssa, ICRS määriteltiin niin, että se on yhtyy mahdollisimman tarkoin viimeisimpään FK5-järjestelmään. Niinpä ICRS:n  $x$ -akseli osoittaa kevättasauspisteen suuntaan epookkina J2000.0,  $y$ -akseli on J2000.0 ekliptikan tasossa ja  $z$ -akseli osoittaa saman epookin navan suuntaan. Koordinaattiakselien orientointitarkkuus on luokkaa 0.02 millikaarisekuntia.

Järjestelmän origo on joko *aurinkokunnan barysentrissä* (massakeskipistees-



**Kuva 2.9:** ICRS:n määrittelevät ekstragalaktiset kohteet (212 täytettyä ympyrää) ja muut ICRF-realisaatiossa käytetyt kohteet (avoimet ympyrät). Vaaka-akselilla rektaskensio, pystyakselillä deklinaatio.

sä) tai *Maan massakeskipisteessä*. Jälkimmäinen soveltuu luonnollisesti paremmin Maata kiertävien satelliittien liikkeiden kuvaamiseen. Tähtien ja ekstragalaktisten kohteiden tapauksessa origon paikalla ei ole merkitystä, ja suhteellisuusteoriasta johtuva pieni ero voidaan ottaa laskennallisesti huomioon. Maan mukana Aurinkoa kiertävä koordinaatisto on kiihtyvässä liikkeessä, joten se ei tarkkaan ottaen täytä inertiaalikoordinaatiston vaatimuksia. Siksi sitä joskus kutsutaan *kvasi-intertiaalikoordinaatistoksi*.

ICRS on realisoitu tähtien ja ekstragalaktisten kohteiden avulla. Edelliset ovat Hipparcos-luettelon tähtiä, jälkimmäiset VLBI-havainnoissa käytettyjä kvasaareita. *IERS (International Earth Rotation and Reference Systems Service)*, joka on IAG:n palvelu, ylläpitää ICRF:n 667 kohteen primääriluetteloa. Lisäksi IERS laskee parametrit, joiden avulla ICRF:stä voidaan siirtyä Maahan sidottuun ITRF-koordinaatistoon. Näitä ovat sekä prekessio- että nutaatiotermit. Samoin tarvitaan tieto Maan navan paikan (*napavariaatio*) ja pyörimisnopeuden (vuorokauden pituus) muutoksista; näihin viitataan usein lyhenteellä *EOP (Earth Orientation Parameters)*. (<http://www.iers.org/>)

ICRF-realisaatio saattaa parantua vielä nykyisestääänkin. Vuoden 2010 paikkeilla suunnitellaan laukaistavaksi uusi astrometrinen satelliitti *GAIA*, joka mittaa tähtien paikkoja jopa 100 kertaa Hipparcosta paremmalla tarkkuudella. Lisäksi saamme nykyistä paremman yhteyden optisten ja radiohavaintojen välille.

## 2.2 Aika

*Aika* ja *ajan mittaaminen* ei suinkaan ole niin yksinkertaista kuin mitä kellosta katsoen saattaisi kuvitella. Myös paikannussatelliitit antavat ajan ja aika voidaan ajatella yhdeksi koordinaatiksi muiden joukossa. GPS:n käyttö on helpottanut ajan mittaamisen ongelmia jo 1990-luvun alusta lähtien; sen avulla jopa mikrosekuntia tarkempi yhtenäinen aika on ollut käytettävissä kaikkialla maapallolla. Mutta mikä on se aika, jota paikannussatelliitit mittaavat ja mitä muita määritelmiä on?

Kaikki nykyiset ajan yksiköt perustuvat *sekuntiin*. Se on *SI-järjestelmän* perusyksikkö. Sekunti on 9 192 631 770 kertaa sellaisen säteilyn värähdysaika, joka vastaa cesium 133 -atomin perustilan ylihienorakenteen kahden tietyn energiataason välisessä siirtymässä syntyvän säteilyn värähdysaika. Ajan mittaamisen tarkkuutta kuvaa sekin, että nykyinen SI-järjestelmän mukainen pituuden määritelmä palautuu aikaerojen mittaukseen: yksi *metri* on matka, jonka valo kulkee tyhjiössä 1/299 792 458 sekunnissa. Samalla määritelmä kiinnittää valon nopeuden numeerisen arvon,  $c = 299\,792\,458$  m/s.

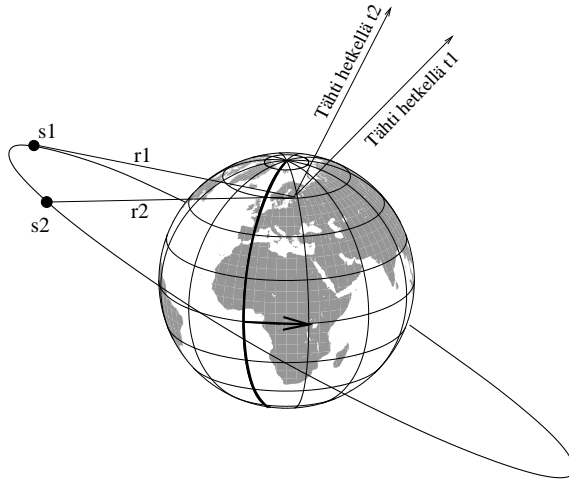
Ajan määritelmät voidaan jakaa kolmeen luokkaan: Maan pyörimisliikkeen ja asentoon liittyvät, inertiaalikoordinaatistoissa käytettävät ja atomikellojen avulla ylläpidettävä aika. Taulukossa 2.1 on lueteltu tärkeimmät eri luokkiin kuuluvat aikajärjestelmät. Ensimmäiseen luokkaan kuuluvat paitsi vanhimmat vuorokauden pituuteen perustuvat aikakäsitteet, myös *Maan asennon* ja pyörimisliikkeen muutosten seuraamiseen käytettävä aika. Aikaa ja tietoa Maan asennosta tarvitaan esimerkiksi siirryttäessä tähtitieteellisestä koordinaatistosta Maahan sidottuihin koordinaatistoihin. Aikaa ylläpidetään mm. *VLBI-havaintojen* avulla.

Toiseen ryhmään kuuluvaa aikaa tarvitaan *inertiaalikoordinaatistossa* liikkuvien satelliittien ja planeettojen ratalaskuissa. Kolmanteen ryhmään kuuluvat niin atomikellojen avulla ylläpidettävät ajan realisaatiot kuin esimerkiksi GPS-signaalin kulkuajan mittaussatelliitista vastaanottimeen.

Yhden senttimetrin siirtyminen ekvaattorilla vastaa noin  $10^{-5}$  s muutosta *pai-kallisessa tähtiajassa*. Satelliitti kulkee radallaan senttimetrin matkan noin  $10^{-6}$  sekunnissa ja *satelliitin etäisyyden* mittaaminen senttimetrin tarkkuudella signaalin kulkuajan perusteella vaatii  $10^{-10}$  s ajanmääritystarkkuutta. Eri kohteissa ajanmäärityksen vaatimukset ovat siis hyvin erilaiset. Samalla tämä myös kuvastaa sitä, mihin tarkkuuteen eri ajanmääritysmenetelmillä voidaan päästä. Vertailun vuoksi nykyisten atomikellojen ”käyntivirheet” ovat luokkaa  $10^{-15}$ .

**Taulukko 2.1:** Ajan eri määritelmiä. Yleisaikaa, tähtiaikaa ja efemeridiaikaa lukuunottamatta kaikki muut realisaatiot on sidottu kansainväliseen atomiaikaan.

Maan pyörimisliike ja Maan asento	Yleisaika (UT) Tähtiaika ( $\theta$ )
Inertiaalikoordinaatistoissa käytettävä aika	Efemeridiaika (ET) Terrestrinen dynaaminen aika (TDT) Terrestrinen koordinaattiaika (TCT) Terrestrinen aika (TT) Barysentrinen dynaaminen aika (TDB) Barysentrinen koordinaattiaika (TCB)
Atomikellot ja aikavälien mittauss	Kansainvälinen atomiaika (TAI) Koordinoitu yleisaika (UTC) GNSS-satelliittien aikajärjestelmät



**Kuva 2.10:** Kolme erityyppistä ajan käyttökohdetta. Tähten paikka taivaalla havaitsijan horisontti-koordinaatistossa, satelliitin paikka radallaan ( $s_1, s_2$ ) ja signaalin kulkuajasta mitattu satelliitin etäisyys ( $r_1, r_2$ ).

### 2.2.1 Maan pyörimisliike ja aika

sideerinen ja  
synodinen  
aika

Varsin pitkän aikaa ajan mittaaminen perustui yksinomaan maapallon pyörimisliikkeeseen. Luvussa 2.1.4 on jo käsitelty *tähtiaikaa* (sideerinen aika), joka liittyy maapallon pyörähdysaikaan ja *kevättasauspisteen* liikkeeseen. Sideerisen vuorokauden pituus ei ole täsmälleen sama kuin maapallon pyörähdysaika akselinsa ympäri, koska kevättasauspiste liikkuu *prekession* vuoksi  $50''$  vuodessa. Sideerinen vuorokausi on  $0.0084^s$  lyhyempi kuin maapallon pyörähdysaika.

Kellomme käyvät Aurinkoon sidottua *synodista aikaa*. Koska Maan rata on lievästi elliptinen, Maan nopeus radallaan vaihtelee hieman. Siksi todellinen *synodinen vuorokausi*, esimerkiksi aika Auringon etelässäolohetkestä seuraavaan, ei ole yhtä pitkä eri aikoina vuotta (ks. kuva 2.4). Ero fiktiivisen, tasaisesti liikkuvan *keskiauringon* mukaan määritettyyn *keskiaurinkoaikaan* on enimmillään n. 15 minuuttia. Eroa kutsutaan *ajantasaukseksi*.

*Keskiaurinkovuorokausi* on tasaisesti liikkuvan keskiauringon kahden peräkkäisen *kulminaation* välinen aika. Greenwichin keskiauringon tuntikulmaa kutsutaan *yleisajaksi*, *UT (Universal time)*;

$$UT = \text{Greenwichin keskiauringon tuntikulma} + 12^h. \quad (2.24)$$

Suoraan tähtihavainnoista saatavaa aikaa merkitään lyhenteellä *UT0*. Se sisältää mm. Maan senhetkisen navan paikasta havaitsijan longitudiin (ja siten myös aikaan) johtuvan termin, joka riippuu havaintoaseman sijainnista Maan pinnalla. Kun havainnot korjataan *konventionaaliseen terrestriseen koordinaatistoon* (ks. luku 2.3), saadaan havaintopaikasta riippumaton aika *UT1*. *UT1* on perussuure



geodeettisissa ja tähtitieteellisissä havainnoissa, ja se kuvaa Maan todellista asentoa ICRF:ssä.

UT1 on kuitenkin sen verran epäsäännöllistä (kuva 2.11), että tarvittiin aikajärjestelmä, joka on maapallon pyörimisnopeuden vaihteluista riippumaton. *Efemeridiaika* perustuu maapallon kiertoon Auringon ympäri. *Efemeridisekunti* määriteltiin siten, että se oli *trooppisen vuoden* 31 556 925.9747:s osa vuonna 1900 tammikuun 0. päivänä kello 12 UT. Sekunnin pituus on johdettu vuosien 1756–1895 aikana tehdyistä havainnoista. Efemeridiajan suhteellinen tarkkuus on n.  $10^{-9}$  ja se saadaan havaitsemalla Auringon, Kuun ja planeettojen paikkoja. Paalamme efemeridiaikaan vielä kappaleessa 2.2.2, sillä sitä voidaan käyttää myös inertiaalikoordinaatistojen aikajärjestelmänä.

Atomikellojen kehittyessä saavutettiin  $10^{-12} - 10^{-13}$  luokkaa olevia tarkkuuksia. Vuoden 1967 Painojen ja mittojen komission yleiskokouksessa SI-järjestelmän efemeridisekunti korvattiin atomi-ilmiöön perustuvalla sekunnin määritelmällä. *Sekunnin pituutta* uusi määritelmä ei muuttanut, koska se sovitettiin vastaamaan efemeridisekunnin pituutta.

---

*atomiajat*


---

Vuonna 1977 efemeridiaika korvattiin *kansainvälisellä atomiajalla* (*Temps Atomique International, TAI*), joka määriteltiin niin että  $ET - TAI = 32.184$  s epookkina 1.1.1977. TAI on merenpinnan tasossa (*geoidilla*) liikkumattoman kellon näyttämä aika, jonka realisaatiota ylläpidetään eri puolilla maapalloa olevissa aikalaboratorioissa. Tällä hetkellä verkostoon kuuluvia atomikelloja on yli 250, ja kunkin kellon aikaa voidaan pitää TAI:n paikallisena realisaationa. Kellojen synkronointi  $\mu$ s-tasolla hoidetaan keskinäisten vertausten ja nykyisin myös GPS:n antaman ajan avulla.

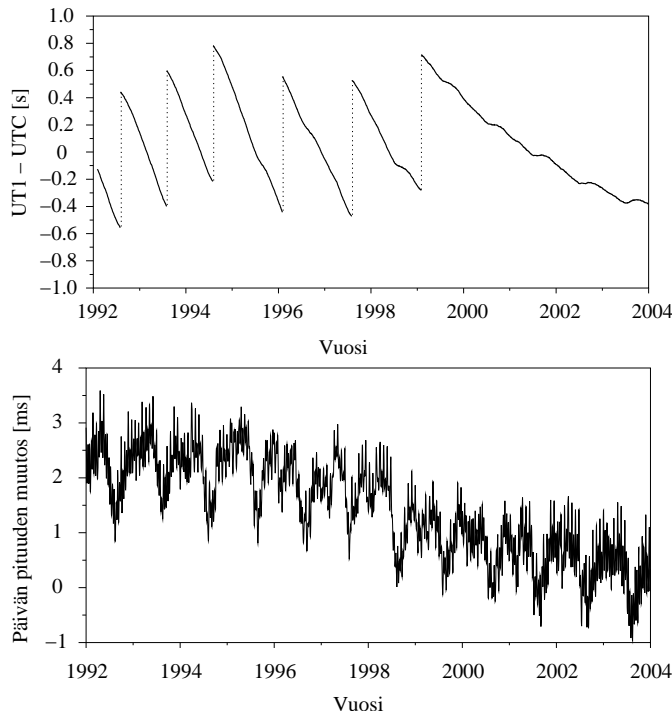
*Maan pyörimisliikkeen* hidastumisen vuoksi UT1:n ja TAI:n ero kasvaa jatkuvasti. Sekunnin pituushan on johdettu 1800-luvun Maan keskimääräisestä pyö-

**Taulukko 2.2:** Atomikellojen suhteellisia tarkkuuksia.  $\Delta f$  on taajuuden  $f$  muutos aikayksikössä, ja ”1 ns virhe” tarkoittaa aikaa, joka kuluu ennen kuin kellon virhe on nanosekunnin suuruusluokkaa.

oskillaattori	taajuus [GHz]	$\Delta f/f$	1 ns virhe
kvartsikide	n. 0.005	$10^{-9}$	1 s
rubidium	6.834682613	$10^{-12}$	15 min
cesium	9.192631770	$10^{-13}$	2.5 h
vetymaser	1.420405751	$10^{-15}$	11 vrk

rimisnopeudesta. Nykyisestä pyörimisnopeudesta johdettu sekunnin pituus olisi hieman pitempi.

Jos mitään ei tehtäisi, poikkeaisi kellojen näyttämä aika yhä enemmän Maan pyörimisliikkeen osoittamasta ajasta. Siksi vuonna 1972 otettiin käyttöön *koordinoitu yleisaika (UTC)*, jonka mukaan kellomme nykyisin käyvät. Se on atomiaikaan sidottu aika, joka seuraa yleisaikaa UT1 niin ettei ero pääse kasvamaan yli 0.9 sekunnin. Jos näin uhkaa käydä, lisätään tai vähennetään UTC:stä *karkaussekunti*. Tämä tehdään tarvittaessa joko 30. kesäkuuta tai 31. joulukuuta. Toistaiseksi maapallon pyöriminen on hidastunut, joten UTC:hen on jouduttu lisäämään sekunteja (kuvat 2.11 ja 2.12).



**Kuva 2.11:** *UT1:n* ja *UTC:n* välinen ero sekunneissa vuosina 1992 – 2004 (yläkuva). Hyppyt johtuvat karkaussekunnin lisäämisestä UTC:hen. Alakuvassa vuorokauden pituuden muutos millisekunneina samana ajanjaksona. Vuorokauden pituudessa on sekä vuodenaikais- että pitkäaikaisvaihteluita. Vuorokauden piteneminen on vuoden 2000 jälkeen ollut vähäisempää kuin 1990-luvulla, joka näkyy siitä, että karkaussekuntia ei ole tarvinnut lisätä UTC:hen vuoden 1999 jälkeen. (Lähde US Naval Observatory, <http://maia.usno.navy.mil/>)

Koordinaattorina toimii Pariisissa oleva *Central Bureau of the International Earth Rotation and Reference Systems Service* (IERS/CB), jonka edeltäjä tunnettiin nimellä *Bureau International de l'Heure* (BIH). IERS on vastuussa karkaussekuntien lisäämisestä. IERS:n kuukausittain ilmestyvästä bulletiinista selviää ajan lisäksi mm. Maan napaliike.

Jo 1800-luvun lopulta maapallo on jaettu  $15^\circ$  levyisiin *aikavyöhykkeisiin*, joissa noudatettava *vyöhykeaika* poikkeaa kokonaisella tunnilla viereisen vyöhykkeen ajasta. Suomessa käytetään  $30^\circ$  itäisen pituuspiirin mukaista vyöhykeaikaa, joka siis on 2 tuntia edellä UTC:tä (kesäaikana 3 h).

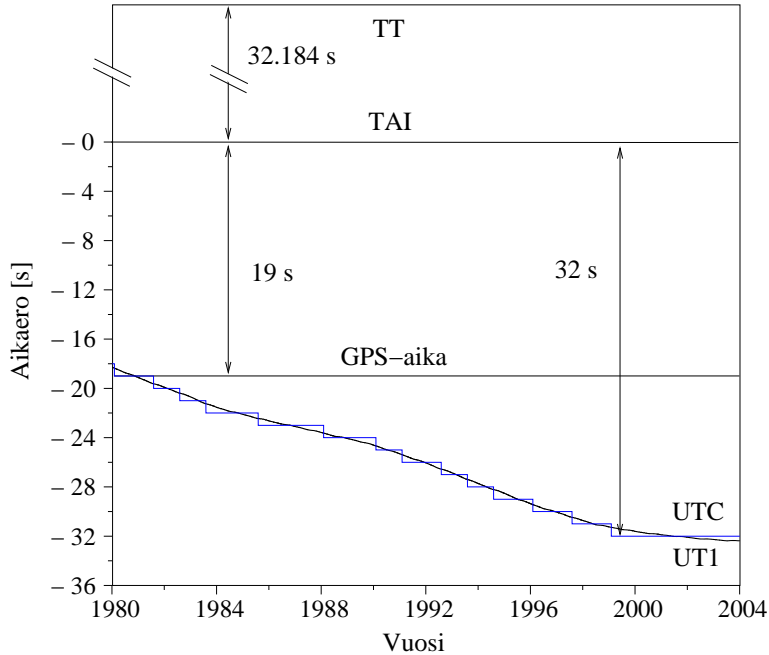
### 2.2.2 Inertiaalikoordinaatioissa käytettävä aika

*Inertiaalikoordinaatistossa* aika etenee eri tahtia kuin Maan pinnalla. Syitä on kaksi. Koska maapallo pyörii akselinsa ympäri ja kiertää Aurinkoa, aiheutuu kellon käyntiin kiihtyvistä liikkeistä pieni suhteellisuusteoreettinen efekti. Toinen syy on painovoimapotentialissa. Maan pinnalla käyvä kello on eri potentiaalissa kuin inertiaalikoordinaatistossa oleva. Myös potentiaaliero vaikuttaa ajan etenemiseen.

Satelliittien, luotainten ja planeettojen ratalaskuissa on käytettävä inertiaalikoordinaatistossa tasaisesti etenevää aikaa. Jo vuonna 1952 käyttöön otettu *efemeridiaika* oli tällainen. Sen tarkkuus tosin oli vain n. 0.1 s, ja sitä ei koskaan voitu käyttää reaaliaikaisesti, vaan vasta havaintojen reduktioiden jälkeen laskettiin UT1:n ja efemeridiajan välinen ero.

Vuonna 1977 otettiin käyttöön kaksi dynaamista ajankäsitettä. Aurinkokunnan massakeskipisteeseen korjattua aikaa kutsutaan *barysentriseksi dynaamiseksi ajaksi* (TDB). Samalla otettiin käyttöön myös efemeridiaikaa vastaava uusi käsite *terrestrinen dynaaminen aika* (TDT), ts. maapallon mukana liikkuvan kellon käymä aika. Yhden TDT-sekunnin pituus on sama kuin vanhan efemeridisekunnin pituus. TDB:tä käytetään silloin kun koordinaatiston origo on aurinkokunnan barysentrissä, TDT:tä kun koordinaatisto on geosentrinen. Maksimissaan TDT poikkeaa TDB:stä 1.6 millisekuntia.

Vuoden 1991 IAU:n yleiskokouksen päätöksissä hyväksyttiin kolme uutta aikakäsitettä korvaamaan dynaamista aikaa. Nämä olivat *barysentrinen koordinaattiaika* (TCB), *geosentrinen koordinaattiaika* (TCG) ja *terrestrinen aika* (TT). Vuoden 2000 yleiskokouksessa terrestrisen ajan määritelmää vielä tarkennettiin. Syynä uusiin määritelmiin oli se, että tähtitieteellisen koordinaattijärjestelmän määrittelyssä oli siirrytty dynaamisesta koordinaatistosta kinemaattiseen (ks. luku 2.1.7) ja samalla haluttiin saada yleisen suhteellisuusteorian avaruusaika-koordi-



**Kuva 2.12:** Eri aikamääritelmien väliset erot. Kansainvälinen atomiaika TAI, Terrestri- nen aika TT ja GPS-aika poikkeavat toisistaan vain vakiomäärän. Yleisajan UT1:n ero TAI:aan sen sijaan kasvaa jatkuvasti. Kellojemme käymä koordinoitu yleisaika UTC seuraa UT1:tä niin ettei niiden ero pääse kasvamaan yli 0.9 sekunnin. Vuonna 2005 TAI – UTC oli 32 s ja GPS-aika – UTC 13 sekuntia.

naatiston (metrisen perustensorin) kannalta mahdollisimman hyvin ja konsisten- tisti määritely ajan realisaatio. Tarkemmat määrittelyt löytyvät mm. IERS:n kon- ventioista (McCarthy and Petit, 2004 ja siellä annetuista lähteistä).

Oleellista uusissa määrittelyissä kuitenkin on, että terrestriksen ajan kohdalla nimeä lukuunottamatta mikään muu ei muutu, ts.

$$TT = TDT = ET = TAI + 32.184^s. \quad (2.25)$$

Sen sijaan terrestriksen ajan ja geosentrisen koordinaattiajan välillä on pieni ero,

$$\frac{d(TT)}{d(TCG)} = 1 - L_G,$$

missä  $L_G = 6.969290134 \times 10^{-10}$ . Satelliittien ratalaskuissa käytetään terrestristä aikaa.

### 2.2.3 GPS:n aikamääritelmät

*GPS-aika* (*GPST*, GPS Time) on GPS-satelliittien käyttämä aikajärjestelmä. Se määritellään TAI:n avulla, niin että

$$\text{GPST} = \text{TAI} - 19.0^{\text{s}}. \quad (2.26)$$

Kun toisaalta  $\text{UTC} = \text{TAI} - n$  sekuntia, jossa  $n$  vuonna 2005 oli 32, poikkesi GPS-aika UTC:stä 13 sekuntia. Jokaisen *karkaussekunnin* lisäämisen myötä kasvaa GPST:n ero UTC:hen nähden, sillä GPST:hen karkaussekunteja ei lisätä. Satelliittien lähettämän *navigointiviestin* mukana tulee tieto karkaussekuntien määrästä, joten vastaanotin osaa näyttää myös UTC:n mukaista aikaa.

Kuten edellä on kerrottu, jokaisella aikalaboratoriolla on oman atomikellonsa kautta TAI:n paikallinen realisaatio. GPS-satelliittien käyttämä aika on USNO:n (*US Naval Observatory*) ylläpitämä ja siten USNO:n realisaation mukainen. Aika saattaa poiketa muutamia nanosekunteja muiden laboratorioden TAI-realisaatioista.

GPS-ajan nollahetki on 6. tammikuuta 1980 klo 0 UT (= JD 2444244.5). Tuolloin  $\text{GPST} = \text{UTC}$ . Tästä nollahetkestä lähtien aika ilmoitetaan viikkoina ja viikon sekunteina niin että uusi *GPS-viikko* alkaa aina sunnuntaina klo 0 UT. Usein tarvitaan myös tietoa monesko päivä ko. vuotta on kulumassa, esimerkiksi datatiedostojen nimeämiseen. Tammikuun 1. päivä on luonnollisesti päivä 1 ja edellisen vuoden viimeinen päivä oli DOY 365 (*DOY* = Day Of Year).

Yhdessä nanosekunnissa valo kulkee n. 30 cm, joka tarkassa geodeettisessa paikantamisessa on jo melkoinen matka. Nanosekunnin virheen kasaantumiseen kuluu cesiumkellosta taulukon 2.2 mukaan runsaat kaksi tuntia. Nykyisissä *GPS-satelliiteissa* on cesiumkellot, joiden virhettä seurataan jatkuvasti. Itse kelloja ei rukata, vaan satelliittien lähettämään signaaliin vain koodataan tieto kuinka paljon kukin kello on väärässä ajassa.

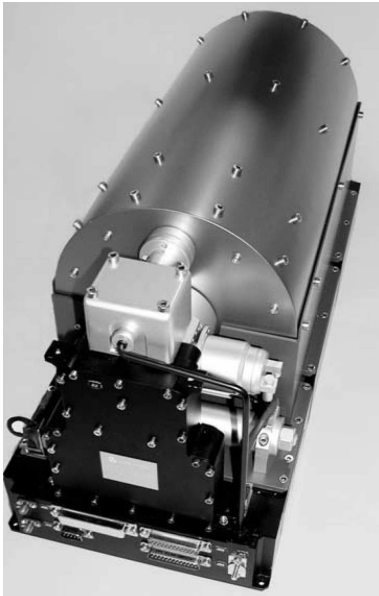
Tavallisissa vastaanottimissa on yleensä halpa kvartsikide, jonka virhe on huomattavasti suurempi ja vaikeammin ennustettavissa. Vastaanottimet pitävät kellonsa likimain synkronissa GPS-ajan kanssa. Tämä voi tapahtua esimerkiksi niin, että vastaanottimen kello hyppää millisekunnin kun ero sen käymän ajan ja GPS-satelliiteista saadun ajan välillä kasvaa tuota suuremmaksi. Joissakin vastaanottimissa voidaan käyttää stabiilia ulkopuolista taajuuslähdettä, esim. *vetymaseria*, jolloin vastaanottimen *kellovirheestä* päästään lähes kokonaan eroon.

### Esimerkki 2.6 GPS-aikamääreitä

Olkoon päivämäärä 20.04.2004 klo 20:04 UT. Tämä on

- JD 2453116.33611
- MJD 53115.83611
- GPS-viikko 1267
- viikon sekunnit 245040
- vuoden päivä DOY 111
- viikonpäivä tiistai

Päivänumeron laskeminen käy näppärästi *juliaanisen päivän* avulla vähentämällä halutun päivän juliaanista päivänumerosta saman vuoden ensimmäisen päivän JD. Samoin GPS-viikko on helppo laskea: esimerkiksi em. viikko 1267 saadaan yksinkertaisesti  $\text{INT}((2453116.0 - 2444244.5) / 7) = 1267$ , missä INT on jakolaskun kokonaisosa. Viikonpäivän saa laskemalla JD modulo 7, jolloin maanantai = 0, tiistai = 1, . . . , sunnuntai = 6, esim.  $2453116 \text{ MOD } 7 = 1$ .



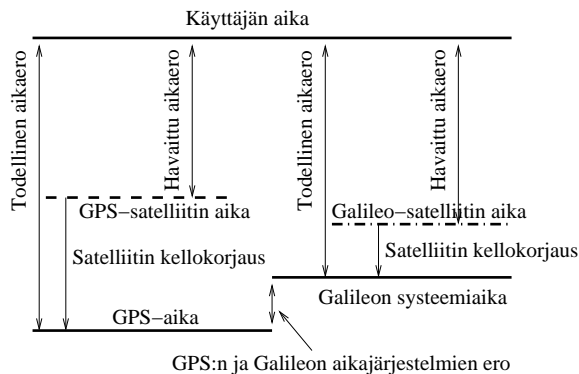
**Kuva 2.13:** Galileo-satelliitteihin suunniteltu passiivinen vetymaser. Sen massa on 15 kg ja tehontarve 70 W. Kuva ESA.

### 2.2.4 Galileon aikajärjestelmä

Galileo-satelliitteihin on suunniteltu kahta eri kelloa, rubidium-oskillaattoreita ja vetymaseria. Näiden avulla ajan tarkkuudeksi taataan parempi kuin 30 ns ja taa-juuden stabiilisuudeksi alle  $3 \times 10^{-13}$  (99.5 % ajasta). Vetymaserista johtuu, että Galileon ajan stabiilisuus on parempi kuin GPS:llä tai GLONASSilla, koska vety-maser takaa huomattavasti paremman pitkän ajan stabiilisuuden. Galileon kellojen virhettä ei siten tarvitse kontrolloida yhtä usein kuin muiden paikannussatelliittien.

Galileo käyttää omaa riippumatonta aikajärjestelmää, *Galileo System Time* (GST). Sen ylläpitoon on suunniteltu Euroopassa sijaitsevaa kontrolliasemaa. Sen vetymaseria puolestaan kontrolloivat eurooppalaiset aikalaboratoriot, joiden avulla järjestelmän aika pidetään alle 50 ns päässä TAI:sta. GST – TAI epävarmuus (95 %) on alle 28 ns. GST:hen ei lisätä karkaussekunteja, joten sen ero UTC:n suhteen tulee muuttumaan samalla tavalla kuin GPS-ajan.

GPS:n ja Galileon suunnitellun yhteiskäytön vuoksi on tärkeä tuntee myös näiden aikajärjestelmien välinen ero, *GPS Galileo Time Offset* (GGTO). Galileon navigointiviestiin on kaavailtu lisättäväksi tieto aikajärjestelmien erosta. Vaikka ero voitaisiin laittaa tuntemattomana havaintoihin ja ratkaista samanaikaisesti muiden tuntemattomien kanssa (paikka, vastaanottimen kellovirhe, ...) saattaa menetelmä heikentää ratkaisun tarkkuutta joissain tapauksissa. GGTO:n tarkkuus reaaliaikaisesti tulee olemaan muutamia nanosekunteja, jälkilaskennassa ainakin kertaluokkaa parempi.



**Kuva 2.14:** Yhteiskäytössä olevien satelliittijärjestelmien aikaerot on tunnettava, jotta käyttäjän vastaanottimeen ei synny ylimääräistä virhettä. Satelliittien kellojen virheet korjataan ilmoittamalla kunkin satelliitin lähettämään aikaan tarvittava kellokorjaus.

### 2.2.5 GLONASS:n käyttämä aika

GLONASS-satelliiteissa on cesium-kellot, joiden suhteellinen tarkkuus on luokkaa  $5 \times 10^{-13}$ . Kellojen virheet pystytään kahdesti vuorokaudessa tehtävillä päivityksillä pitämään alle 15 ns verrattuna kontrollikeskuksessa oleviin vetymasereihin. Itse GLONASS-järjestelmän aika seuraa UTC-aikaa alle millisekunnin tarkkuudella. Aikajärjestelmän ylläpidosta vastaa Mendeleevossa sijaitseva Venäjän metrologisen keskuksen aika- ja taajuuspalvelu (VNIIFTRI).

GPS-järjestelmästä GLONASS-aika poikkeaa siinä, että GLONASS-aikaan lisätään UTC:n mukaiset karkaussekunnit. Lisäksi aika poikkeaa UTC:tä tasan kolmella tunnilla, ts. siinä käytetään Moskovan aikavyöhykkeen mukaista aikaa,

$$\text{GLONASST} = \text{UTC} + 3^{\text{h}} 0^{\text{m}} 0.0^{\text{s}}. \quad (2.27)$$

GLONASSin aikaero GPS-aikaan kasvaa siis sitä mukaa kun karkaussekunteja lisätään UTC:hen, koska GPS-aika etenee tasaisesti. Vuonna 2005 GLONASS-ajan ja GPS-ajan ero oli siis  $3^{\text{h}} 0^{\text{m}} 13^{\text{s}}$ .

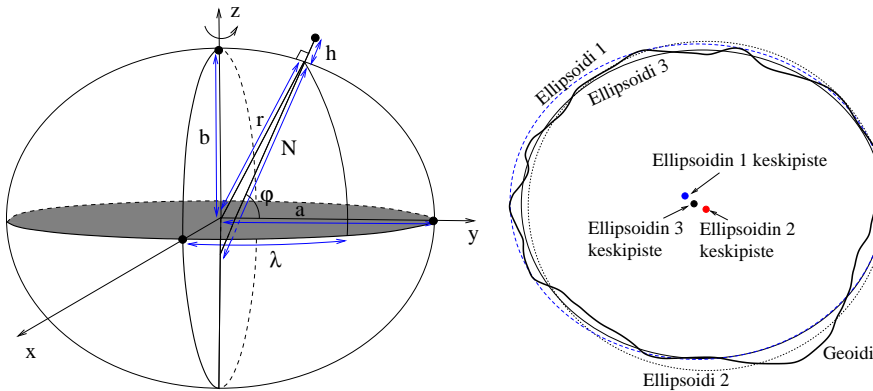
## 2.3 Terrestriest koordinaattijärjestelmät

Siirrymme nyt *Maahan kiinnitettyihin koordinaatistoihin*. Koordinaattijärjestelmiä (ja siten myös koordinaatistoja) on lukuisia. Mitä todennäköisimmin GNSS-havaintaja joutuu tekemään joukon *koordinaattimunnoksia* ennen kuin kädessä olevat *koordinaatit* ovat halutussa järjestelmässä. Eräs jako voisikin olla *globaalit* ja *paikalliset koordinaatistot*: GNSS-laskut tehdään globaalissa, mutta lopputulokset on esitettävä paikallisessa koordinaatistossa ja mahdollisesti vielä halutulla *karttaprojektiolla*. Paikallinen koordinaatisto, esimerkiksi *Kartastokoordinaattijärjestelmä (KKJ)* ei sovellu GNSS-laskuihin.

Yhä suurempi osa muunnoksista on piilotettu joko vastaanottimeen tai laskentaohjelmistoon, jolloin käyttäjällä ei ehkä ole aavistustakaan siitä proseduurista, joka käteen tulevien koordinaattien takana on. Pahimpien katastrofien välttämiseksi on kuitenkin syytä tietää mitä ohjelmistojen syövereissä tapahtuu ja miksi ja miten moisia muunnoksia tehdään. Väärin tehty tai tekemätön muunnos saattaa aiheuttaa lopputulokseen satojen metrien virheen.

Pyrimme tässä luvussa antamaan tarpeelliset käsitteet ja työkalut erilaisista koordinaatistoista selviämiseen. Tutustumme myös Suomen uuteen koordinaatistoon *EUREF-FIN*, joka korvaa tähän saakka käytössä olleen Kartastokoordinaattijärjestelmän, *KKJ:n*.





**Kuva 2.15:** CTRS:n mukaisen suorakulmisen koordinaatiston origo on Maan massakeskipisteessä,  $z$ -akseli osoittaa Maan pyörimisakselin suuntaan ja  $x$ -akseli Greenwichin meridiaaniin. Maan muotoa kuvaamaan asetetaan tavallisesti pyörähdysellipsoidi (vasemmalla). Kuvan symbolit on selitetty tekstissä. Aiemmin ellipsoidit sovitettiin niin, että ne kuvasivat Maata parhaiten sillä alueella, jolla niitä käytettiin (oikealla, ellipsoidit 1 ja 2). Nykyiset globaalit mallit käyttävät geosentristä ellipsoidia (ellipsoidi 3). Paksu viiva on keskimerenpinta ja manneralueilla sen teoreettinen jatke, *geoidi*. Muoto- ja korkeusvaihteluita on suuresti liioiteltu.

### 2.3.1 Konventionaalinen terrestrinen järjestelmä, CTRS

Määritellään aluksi koordinaattijärjestelmä, joka soveltuu globaalien koordinaatistojen pohjaksi. Määrittelyn mukainen järjestelmä tunnetaan *konventionaalisenä terrestrisenä järjestelmänä*, CTRS (Conventional Terrestrial Reference System), joskus myös CTS (Conventional Terrestrial System). Käytännössä kaikki nykyiset globaalit järjestelmät ovat CTRS:n mukaisia. CTRS on eräänlainen ideaalinen järjestelmä, jonka käytännön realisaatioita todelliset koordinaattijärjestelmät ja koordinaatistot ovat.

Määritellään oikeakätinen suorakulmainen koordinaatisto, jonka  $z$ -akseli on maapallon pyörimisakselin suuntainen ja  $x$ -akseli osoittaa *Greenwichin meridiaaniin*. Koordinaatiston origo on *maapallon massakeskipisteessä*.

Koordinaatiston origon ja orientoinnin lisäksi usein määritellään myös *Maan muotoa* likimain kuvaava referenssipinta, *vertausellipsoidi* (kuva 2.15). Ellipsoidin keskipiste yhtyy koordinaatiston origoon ja pikkuakselin puolikas  $b$  koordinaatiston  $z$ -akseliin.  $a$  on isoakselin puolikas. Tätä ellipsoidia käyttäen voidaan esittää pisteen maantieteelliset koordinaatit pituus ja leveys,  $\lambda$  ja  $\varphi$ . Pisteiden korkeus ellipsoidista on  $h$ . Suure  $N$  on *poikittaiskaarevuussäde*. Se on havaitsijan

---

*vertausellipsoidi*

---

kohdalle asetetun ellipsoidin normaalin suuntainen.

Kahden ellipsoidin dimensiota kuvaavan parametrin (esim. isoakseli ja litistyneisyys) lisäksi koordinaattijärjestelmään liittyvän *vertausjärjestelmän* määrittelyyn tarvitaan kaksi muuta Maata kuvaavaa fysikaalista parametria, jotka kiinnittävät *nollameridiaanin* ja *painovoiman* referenssiellipsoidilla. Koska koordinaatisto on Maahan kiinnitetty, sen täytyy pyöriä inertiaalikoordinaatistoon nähden maapallon pyörimisliikkeen kulmanopeudella, ts. *UT1:n* mukaisella kulmanopeudella.

---

GRS80

---

Eräs määritelmän mukaisista realisaatioista on taulukossa 2.3. Se on Kansainvälisen Geodeettisen Assosiaation (*IAG*) vuonna 1980 hyväksymä ja tunnetaan nimellä *GRS80* (Geodetic Reference System 1980).

Taulukossa 2.3 suureen *GM* massan yksikkönä on maapallon massa. Palaamme luvussa 3 siihen, miksi massaa ja *vetovoimavakiota* *G* ei voida tarkasti kirjoittaa erilleen. Toinen oudompi suure on dynaaminen litistyneisyys,  $J_2$ , josta enemmän oheisessa laatikossa.

Taulukossa 2.3 esitetyt suureet eivät toki ole ainoa mahdollisuus vertausjärjestelmän määrittelemiseksi. Toinen, täysin ekvivalentti tapa on antaa isoakselin puolikas, *ellipsoidin litistyssuhde*  $f$ , pyörimisen kulmanopeus ja *normaalipainovoima ekvaatorilla*,  $\gamma_a$ . Litistyssuhde  $f$  ja pikkuakselin puolikas  $b$  saadaan kaavoista

$$f = \frac{3}{2}J_2 + \frac{\omega^2 a}{2\gamma_a} \quad (2.28)$$

$$b = (1 - f)a. \quad (2.29)$$

Normaalipainovoima  $\gamma$  voidaan laskea, kun Maata kuvaava pyörähdysellipsoidi on annettu. GRS80-ellipsoidille  $f = 1 : 298.257222101$ .

*CTRS:n* käytännön määrittely ei ole aivan suoraviivaista. Ennen avaruusgeodeettisia menetelmiä ei ollut edes mahdollista määrittää riittävän tarkasti *Maan*

**Taulukko 2.3:** Geodeettisen vertaussysteemin GRS80 määrittelevät suureet IAG:n vuoden 1980 resoluution mukaan.

---

$a$	= 6 378 137 m	ellipsoidin isoakselin puolikas
$J_2$	= $1\,082\,630 \times 10^{-9}$	dynaaminen litistyneisyys
$\omega_E$	= $7\,292\,115 \times 10^{-11}$ rad/s	maapallon pyörimisen kulmanopeus
$GM$	= $3\,986\,005 \times 10^8$ m <sup>3</sup> s <sup>-2</sup>	gravitaatiovakio

---

**Laatikko 2.4 Maan painovoimakentän potentiaali***Newtonin vetovoimalaki*

$$\mathbf{f} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

kertoo voiman  $\mathbf{f}$ , jolla  $M$ -massainen kappale vaikuttaa  $m$ -massaiseen kappaleeseen etäisyydellä  $r$ .  $\hat{\mathbf{r}}$  on  $r$ :n suuntainen yksikkövektori,  $\mathbf{r}/|r|$ . Jos kappaleet eivät ole pistemäisiä, voima voidaan laskea integraalista

$$\mathbf{f} = -G \int_M \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} dM,$$

jossa massa  $m$  on merkitty ykköseksi. Määritellään *potentiaali*  $V$  yhtälöllä  $\mathbf{f} = \nabla V$ , jossa  $\nabla$  (nabla) on gradienttioperaattori

$$\nabla = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Potentiaali  $V$  on siis skalaari ja voima  $\mathbf{f}$  vektori, joka antaa kussakin pisteessä  $V$ :n gradientin suunnan ja suuruuden. Potentiaali on siten

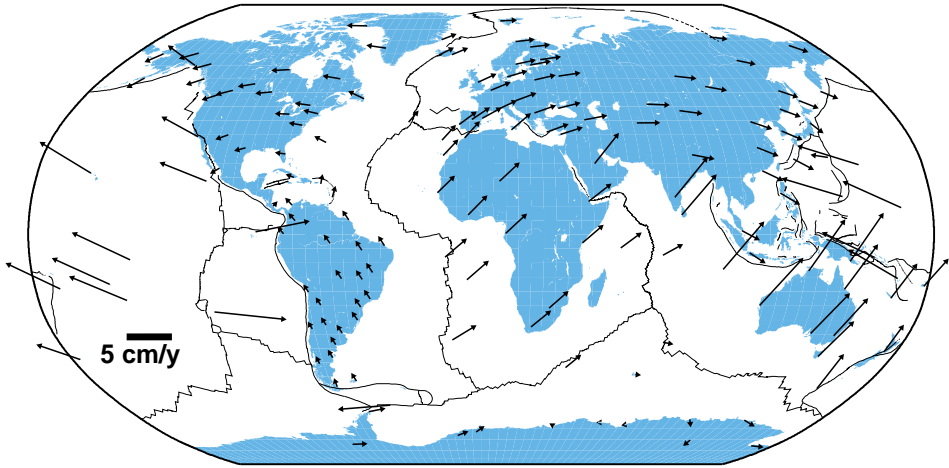
$$V = G \frac{M}{r} \quad \text{pistemäinen kappale}$$

$$V = G \int_M \frac{1}{r} dM \quad \text{ei - pistemäinen kappale}$$

Jos  $a$ -säteinen kappale on lähes pallomainen ja pyörähdyssymmetrinen, sen potentiaali on kätevä esittää palloharmonisten funktioiden sarjakehitelmänä

$$V = \frac{GM}{r} \left( 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n J_n P_n(\sin \varphi) - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \right),$$

jossa  $P_n(\sin \varphi)$  on Legendren polynomi ja  $P_{nm}(\sin \varphi)$  Legendren liit-tofunktio. Kaavan johto löytyy esim. kirjasta Heiskanen–Moritz, 1967.  $(GM/r)$  on pistemäisen massan aiheuttama potentiaali. Ensimmäinen summalauseke arvolla  $n = 2$  on pyörähdysellipsoidin ensimmäinen termi. Litis-tyneisyys  $f$  saadaan kaavasta (2.28) kun  $J_2$  tunnetaan.



**Kuva 2.16:** Mannerlaatat liikkuvat toistensa suhteen muutamia senttimetrejä vuodessa. Nuolet kuvaavat pysyvien GPS-asemien avulla mitattuja liikevektoreita.

*massakeskipisteen* paikkaa, maaellipsoidin muotoa, saati yhdistää eri mantereilla olevia geodeettisia verkkoja. Nykyisinkin tarvitaan useita eri tekniikoita, kuten luvussa 1 kerrottiin.

Myös globaalien koordinaatistojen realisaatiossa on omat ongelmansa. Maa ei ole jäykkä kappale, sen *massakeskipiste*, *pyörimisakselin paikka* ja nollameridiaani liikkuvat. Parisenkymmentä suhteellisen kiinteää *laattaa* kelluu tahmean vaipan päällä. Näiden liikkeet toistensa suhteen ovat luokkaa 1–10 cm vuodessa.

koordinaatistojen aikariippuvuus

*Koordinaatistot* realisoidaan eri mannerlaatoilla olevien kiintopisteiden avulla, joten pisteet liikkuvat toistensa suhteen. Niinpä on ilmoitettava myös se epookki, jolle koordinaatit pätevät. Toisen ajanhetken koordinaatit saamme laskemalla mannerlaattojen liikkeestä johtuvat korjaukset. Korjaukset lasketaan joko kiintopisteille pitkäaikaisten havaintojen perusteella saaduista nopeusvektoreista tai globaalista laattaliikemallista (esim. NNR-NUVEL-1A). Koordinaattien aikariippuvuuden takia *alueelliset koordinaatistot*, esimerkiksi Euraasian mannerlaattaan kiinnitetyt, ovat nykyisten kansallisten realisaatioiden pohjalla (luku 2.3.6).

NNR-NUVEL-1A

NUVEL-mallilla voidaan kuvata laattaliikkeitä antamalla joko maantieteellisissä koordinaateissa napa  $(\varphi_0, \lambda_0)$ , jonka ympäri kyseinen laatta kiertyy vakiokulmanopeudella  $\Omega$ , tai suorakulmaisissa koordinaateissa kiertonopeudet  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  kunkin koordinaattiakselin ympäri, ks. taulukko 2.4. Maantieteellisessä koordinaatistossa saadaan

$$d\varphi/dt = \Omega \cos(\varphi_0) \sin(\lambda - \lambda_0) \quad (2.30)$$

**Taulukko 2.4:** NNR-NUVEL-1A laattojen kiertonavat ja kulmanopeudet. DeMets et al., Effect of recent revisions to the geomagnetic reversal time scale on estimates of current plate motions, *Geophys. Res. Lett.* Vol. **21** No. 20, 2191-2194, 1994

Laatan nimi	maantieteellinen			suorakulmainen		
	$\varphi_0$ [°]	$\lambda_0$ [°]	$\Omega$ [°/Ma]	$\Omega_x$ [rad/Ma]	$\Omega_y$ [rad/Ma]	$\Omega_z$ [rad/Ma]
Africa	50.569	-73.978	0.2909	0.000891	-0.003099	0.003922
Antarctica	62.986	244.264	0.2383	-0.000821	-0.001701	0.003706
Arabia	45.233	-4.464	0.5455	0.006685	-0.000521	0.006760
Australia	33.852	33.175	0.6461	0.007839	0.005124	0.006282
Caribbea	25.014	266.989	0.2143	-0.000178	-0.003385	0.001581
Cocos	24.487	244.242	1.5103	-0.010425	-0.021605	0.010925
Eurasia	50.631	247.725	0.2337	-0.000981	-0.002395	0.003153
India	45.505	0.345	0.5453	0.006670	0.000040	0.006790
N. America	-02.438	-85.895	0.2069	0.000258	-0.003599	-0.000153
Nazca	47.804	259.870	0.7432	-0.001532	-0.008577	0.009609
Pacific	-63.045	107.325	0.6408	-0.001510	0.004840	-0.009970
S. America	-25.325	235.570	0.1164	-0.001038	-0.001515	-0.000870
Juan de Fuca	-30.054	58.870	0.6658	0.005200	0.008610	-0.005820
Philippine	-38.011	-35.360	0.8997	0.010090	-0.007160	-0.009670
Rivera	20.428	253.128	1.9781	-0.009390	-0.030960	0.012050
Scotia	-25.273	261.234	0.1705	-0.000410	-0.002660	-0.001270

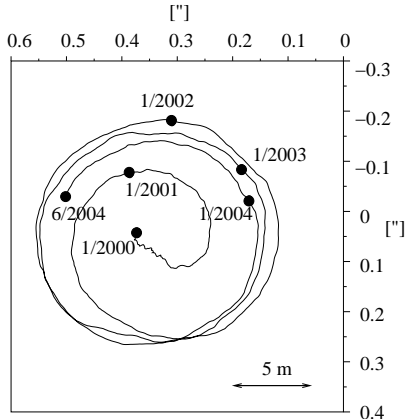
$$d\lambda/dt = \Omega (\sin(\varphi_0) - \cos(\lambda - \lambda_0) \tan(\varphi) \cos(\varphi_0)),$$

missä  $\varphi, \lambda$  on paikka, jolle liikenopeus lasketaan. Taulukossa 2.4 olevat kiertonopeudet  $\Omega$  ovat yksiköissä astetta miljoonassa vuodessa ja laskun tulos saadaan samoissa yksiköissä.

Suorakulmaisissa koordinaateissa pisteen  $(x, y, z)$  liikevektori voidaan laskea kaavoista

$$\begin{aligned} dx/dt &= \Omega_y \times z - \Omega_z \times y \\ dy/dt &= \Omega_z \times x - \Omega_x \times z \\ dz/dt &= \Omega_x \times y - \Omega_y \times x. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Kun kaavaan (2.31) sijoitetaan taulukon 2.4 arvot ja pisteen  $(x, y, z)$ -koordinaatit kilometreissä, saadaan pisteen liikenopeus yksiköissä millimetriä vuodessa.



**Kuva 2.17:** Napavariaatio vuosina 2000-2004.  $x$ - ja  $y$ -akselien yksiköt ovat kaarisekunteja. Kuvassa  $x$ -akselin suunta on alaspäin ja  $y$ -akselin vasemmalle. CIO:n paikka on pisteessä (0,0).

---

*napavariaatio*

---

*Maapallon pyörimisakseli* ei pysy Maan kuoreen nähden paikallaan, vaan siinä on sekä 434 vuorokauden periodinen että hidas sekulaarinen muutos. 434-vuorokautisen *Chandlerin jakson* amplitudi vaihtelee, mutta on keskimäärin n. 10 m. Havaintohetken todellisen navan ja Greenwichin meridiaanin mukaisesti orientoitua systeemiä kutsutaan hetkelliseksi terrestriseksi järjestelmäksi. Navan liikettä maankuoren suhteen kutsutaan *napavariaatioksi*.

Maapallon pyörimisakselin suunta määritetään nykyisin pääasiassa geodeettisten *VLBI-havaintojen* avulla. Aiemmin tarkoitukseen käytettiin *zeniittiputkin* tehtyjä tähtihavaintoja. Havainnoista saadaan lisäksi pyörimisakselin ja nollameridiaanin liike maankuoren suhteen. Tietoja tarvitaan todellisen *tähtiajan* ja *UT1:n* laskemiseen. Maan massakeskipisteen määrittämiseen käytetään *GPS-*, *kuulaser-*, *satelliittilaser-* ja *DORIS-havaintoja*.

---

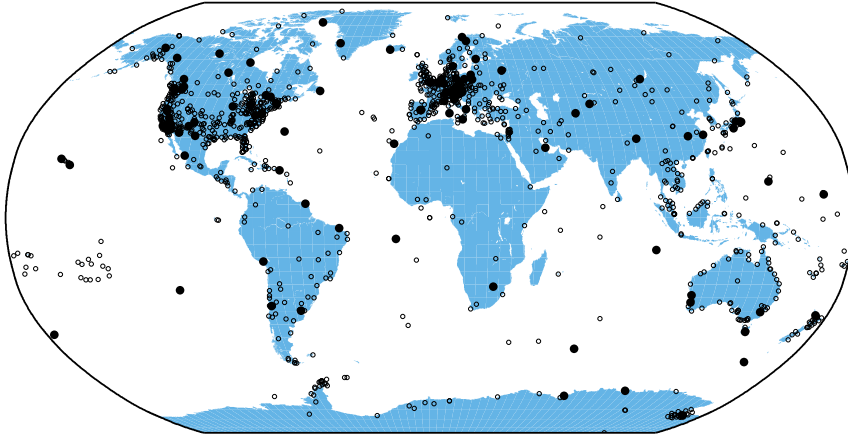
*CTRS:n määrittely*

---

Jotta välttyisimme jatkuvalta koordinaatiston kääntelyltä, määrittelemme Konventionaalisen terrestrisen järjestelmän (CTRS) siten, että  $z$ -akselin kiinnittämä navan paikka (*Conventional International Origin, CIO*) yhtyy vuosien 1900-1905 keskimääräiseen navan paikkaan. CTRS:n  $x$ -akseli osoittaa Greenwichin keskimääräiseen meridiaaniin. Ennen muinoin nollameridiaani todella kulki Greenwichin observatorion ohikulkukoneen kautta, mutta nykyisin se määrätään samoista globaaleista havainnoista kuin Greenwichin näennäinen tähtiaikakin.

Navan sekulaarisesta siirtymisestä johtuu ettei CIO enää ole Chandlerin jakson määrittelemän silmukan sisällä. Navan hetkelliset koordinaatit ( $x_p, y_p$ ) annetaan CIO:n suhteen suorakulmaisessa koordinaatistossa, jonka  $x$ -akseli on nollameridiaanitasossa ja  $y$ -akselin positiivinen suunta länteen.

Kuun ja Auringon synnyttämät *vuorovesivoimat* saavat aikaan *kiinteän maan vuoksen*, jonka vaikutus on otettava huomioon pisteiden koordinaatteja mitattaes-



**Kuva 2.18:** IERS:n ylläpitämän ITRF2000-koordinaatiston määrittelevät pisteet (täytetyt ympyrät) ja muut ITRF2000-pisteet (avoimet ympyrät). Lähde <http://www.iers.org/iers/>.

sa. Maanpinnan korkeuden vuorokautinen vaihtelu on yli 30 cm (luku 2.5.3). GPS-ohjelmat ottavat vuoksen huomioon automaattisesti.

### 2.3.2 Kansainvälinen terrestrinen järjestelmä, ITRS

Nykyisin IAG:n palveluna toimiva International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS) ylläpitää globaalia koordinaattijärjestelmää, ITRS (International Terrestrial Reference System), ja sen realisaatiota ITRF (International Terrestrial Reference Frame).

ITRS on määritelty CTRS:n mukaisesti Kansainvälisen Geodeettis-Geofysikaalisen Unionin (IUGG, International Union of Geodesy and Geophysics) yleiskokouksessa Wienissä 1991 (McCarthy and Petit, 2004). Koordinaatiston navan paikkaa kutsutaan IERS:n referenssinavaksi ja nollameridiaania IERS:n referenssimeridiaaniksi. ITRS:ään liittyvä vertausellipsoidi on GRS80.

Aiemmin lähes vuosittain, nykyisin muutaman vuoden välein julkaistava realisaatio, ITRF, perustuu satelliittilaser-, kuulaser-, DORIS- ja VLBI-, sekä myös globaalin GPS-verkon havaintoihin. Koska havaintoasemat sijaitsevat eri mantereilla, ne liikkuvat mannerlaattojen mukana toistensa suhteen. Niinpä myös epookki on kiinnitettävä; tämä ilmenee ITRF:ään liitettävästä vuosiluvusta. Uusin on ITRF2000. Sen standardiepookki on 1997.0. Realisaatio perustuu eri tutkimusryhmien tekemiin laskuihin, jotka yhdistetään IERS:ssä. Riippumattomien ratkaisujen ja havaintosarjojen käytöllä pyritään pienentämään satunnaisia ja systemaatt-

---

CTRS:n  
realisaatioita

---

**Taulukko 2.5:** ITRF-2000 -koordinaatiston laskennassa mukana olevat suomalaiset GPS-asetat. Liikevektorit on saatu GPS-ratkaisuista ja saattavat poiketa hieman taulukon 2.4 NUVEL-mallin mukaisista nopeuksista.

	x [m]	y [m]	z [m]
	dx/dt [m/a]	dy/dt [m/a]	dz/dt [m/a]
Metsähovi	2892570.923	1311843.330	5512634.057
	-.0160	.0149	.0088
Vaasa	2699864.444	1078263.891	5658064.766
	-.0141	.0154	.0149
Joensuu	2564139.226	1486149.658	5628951.362
	-.0185	.0142	.0071
Sodankylä	2200146.809	1091638.257	5866870.700
	-.0168	.0117	.0117

tisia virheitä.

ITRF2000 on globaalissa skaalassa tarkin CTRS:n mukaisten järjestelmien realisaatioista ja sitä käytetään nykyään lähes yksinomaan, kun koordinaatteja tarvitaan tutkimuskäytössä. Myös muunnokset muihin järjestelmiin tunnetaan varsin hyvin. Suomalaisista pisteistä ITRF:n laskennassa ovat Geodeettisen laitoksen Metsähovin tutkimusaseman satelliittilaser, GPS, sekä Metsähovi/Sjökullassa olevat VLBI- ja DORIS-pisteet, sekä Suomen pysyvän GPS-verkon, *FinnRef*:in Sodankylän, Vaasan ja Joensuun asemat.

GPS-satelliittien tarkat rataelementit (Precise ephemeris) perustuvat *IGS-verkon* (International GNSS Service) havaintoihin. Verkkoon kuuluvista lähes 400 asemasta noin kolmasosa on mukana IGS:n laskemassa ITRF-realisaatioissa. GPS-satelliittien tarkat radat ovat siten ITRF2000-koordinaatistossa. Siksi tarkimmissa GPS-laskuissa lähtöpisteiden koordinaatteina pitäisikin käyttää ITRF2000-koordinaatteja. Palaamme tähän myöhemmissä luvuissa.

### 2.3.3 Maailman geodeettinen järjestelmä 1984, WGS84

*WGS84* on lyhenne jonka kaikki GPS:n käyttäjät ovat varmasti nähneet. Vuodesta 1987 lähtien GPS on käyttänyt koordinaattijärjestelmänään Yhdysvaltain puolustusministeriön (*DoD*) luomaa WGS84:ää (World Geodetic System 1984). WGS84-järjestelmä (ja sen samanniminen realisaatio) on määritelty Yhdysvaltain armeijan karttaviraston (*NGA*:n, National Geospatial-Intelligence Agency, aiem-



min *NIMA*, National Imagery and Mapping Agency, aiemmin Defence Mapping Agency, *DMA* julkaisussa (NIMA 2000).

WGS84 on *CTRS:n* mukaisesti perustettu geosentrinen järjestelmä. Sen määritelmä on siten sama kuin ITRS:n. WGS84:n alkuperäinen realisaatio oli modifioitu Doppler-järjestelmää varten luodusta NNSS-koordinaatistosta (NNSS, Navy Navigation Satellite System). Tämän origoa ja skaalaa muutettiin ja koordinaatistoa kierrettiin niin, että sen nollameridiaani yhtyi tuolloin viimeisimpään olemassa olleeseen BIH:n (Bureau International de l'Heure; IERS:n edeltäjä) määrittelemään v. 1984 nollameridiaaniin ja BIH:n terrestriseen koordinaatistoon BTS.

Sittemmin WGS84:n realisaatiota on tarkennettu useaan otteeseen, ja viimeisin v. 2000 määrittely (8350.2, kolmas laitos, NIMA, 2000) toteaa, että WGS84 on senttimetritasolla yhtenevä ITRF:n kanssa. Realisaatio perustuu GPS:n kontrolliasemiin ja NIMA:n seuranta-asemiin (kuva 1.9, s. 17). ITRF:n realisoiviin pisteisiin verrattuna (kuva 2.18, s. 79) WGS84-pisteitä on kuitenkin hyvin vähän.

Uusin realisaatio toivottavasti selkiyttää niiden lukuisten kyselijöiden huolta WGS84:n ja ITRF:n suhteesta, joille vastaus metritason yhteensopivuudesta ei ole kelvannut. Ongelmana on yksinkertaisesti ollut, että WGS84-realisaatiota ei aiemmin tunnettu tuota tarkemmin.

Tarkempi realisaatio on tuonut myös koordinaatiston aikariippuvuuden. Metritasolla ei tarvinnut välittää sen paremmin mannerlaattojen liikkeestä kuin kiinteän maan vuoksesta. Molemmat on nyt otettu huomioon samalla tavoin kuin ITRF:ssä.

Käytännössä ITRF ja WGS84 ovat yhtenevät, mutta muodollisesti niillä on joitakin eroja. Näistä merkittävin on eri vertausellipsoidi. WGS84-referenssiellipsoidi on tosin käytännössä sama kuin ITRF:n *GRS80*. WGS84-ellipsoidin litistys-suhde on  $f = 1 : 298.257223563$  ja *GRS80*:llä  $f = 1 : 298.257222101$ . Ero on niin pieni, että korkeusero *GRS80*-ellipsoidiin nähden on kaikkialla maapallolla alle millimetrin. GPS-havaintojen redukoinnissa suorakulmaisista maantieteelliseksi voidaan siis käyttää kumpaa tahansa ellipsoidia.

---

*WGS84:n ja  
ITRF:n ero*

---

**Taulukko 2.6:** WGS84:n määrittelevät suureet (NIMA, 2000).

$a$	= 6 378 137 m	ellipsoidin isoakselin puolikas
$f$	= 1/298.257223563	litistyneisyys
$\omega_E$	= $7\,292\,115 \times 10^{-11}$ rad/s	maapallon pyörimisen kulmanopeus
$GM$	= $3\,986\,004.418 \times 10^8$ m <sup>3</sup> s <sup>-2</sup>	gravitaatiovakio

GPS-satelliitit lähettävät ratatietonsa WGS84-järjestelmän mukaisina (*Broadcast ephemeris*). Näin ollen GPS-laskut tulee suorittaa sen kanssa yhteensopivassa järjestelmässä. Näitä ovat *ITRS:n*, *ETRS:n* tai *EUREF-FIN:n* mukaiset koordinaatistot. Vain kaikkein tarkimmissa töissä mannerlaattojen liikkeitä on otettava huomioon, jolloin on käytettävä ITRF:n viimeisintä realisaatiota ja lähtöpisteiden koordinaatit on laskettava havaintohetken epookkiin.

### 2.3.4 Galileon koordinaatisto, GTRF

Galileo käyttämä koordinaatisto *GTRF* (*Galileo Terrestrial Reference Frame*) on yksi *ITRS:n* realisaatioista, joka perustuu Galileon maa-asemiin. Vaikka *GTRF* on muodollisesti riippumaton *ITRF:stä*, on se käytännössä senttimetritasolla yhtenevä sekä *ITRF:n* että *WGS84:n* kanssa.

Miksi Galileoille tarvitaan oma aika- ja koordinaattijärjestelmänsä? Muodollinen ero johtuu siitä, että omien referenssiasemiensa ja koordinaattiratkaisunsa kautta Galileo on riippumaton niin *GPS:n* kuin *ITRF:n* määrittävistä referenssipisteistä. Todellisuudessa Galileon maa-asemia tullaan käyttämään myös *ITRF:n* ylläpidossa. *ITRF* sisältää *GPS:n* lisäksi myös *GLONASSin*, *VLBI:n*, satelliittilaserin ja *DORISin* havainnot. Siksi se ei ole sisäisesti yhtä ristiriidaton kuin realisaatio, joka sisältää vain yhden havaintomenetelmän pisteet.

Käytännössä Galileon tarkat radat lasketaan samalla tavoin kuin *GPS:n* tarkat radat on laskettu jo vuodesta 1992 lähtien. Tätä ennakkoiden *IGS-palvelun* nimi muutettiin vuonna 2005 muotoon *International GNSS Service*, aiemmin *International GPS Service*.

### 2.3.5 GLONASSin koordinaatisto, PZ-90

*GLONASS-satelliitit* lähettävät ratatietonsa *PZ-90 -koordinaatiston* mukaisina (Параметров Земли (ПЗ-90), ”Maan parametrit”). Myös *PZ-90* on *CTRS:n* mukainen.

**Taulukko 2.7:** PZ-90:n määrittelevät suuret. ([www.glonass-center.ru](http://www.glonass-center.ru))

$a$	= 6 378 136 m	ellipsoidin isoakselin puolikas
$f$	= 1/298.257839303	litistyneisyys
$\omega_E$	= 7 292 115 $\times 10^{-11}$ rad/s	maapallon pyörimisen kulmanopeus
$GM$	= 3 986 004.4 $\times 10^8$ m <sup>3</sup> s <sup>-2</sup>	gravitaatiovakio

Kansainvälinen *IGLOS*-projekti (International GLONASS Service) on *IGS:n* pilottiprojekti, jonka tarkoituksena on koordinoida globaalia GLONASS-havain-toasemaverkkoa. Havainnoista lasketaan GLONASS-satelliittien tarkat rataelementit, samaan tapaan kuin GPS-satelliittien radat lasketaan IGS-verkon havainnoista. Samalla saadaan muunnos ITRF:n ja PZ-90:n välille. Muunnoksiin palaamme luvussa 2.4.4. Jos GLONASS-havaintojen laskennassa käytetään IGLO-Sin tuottamia tarkkoja ratoja, ei PZ-90:n ja ITRF:n välistä muunnosta tarvita. Tällöin laskut tapahtuvat suoraan ITRF-koordinaatistossa.

Vaikka realisaatiot ovat lähellä toisiaan, on koordinaatistojen välisissä muunnoksissa desimetrien epävarmuus, koska PZ-90:n määrittelevät pisteet ovat kaikki entisen Neuvostoliiton alueella. Suurin osa satelliittien radoista kulkee siis alueella, jossa PZ-90 ei ole määritelty. Myös IGLOS-verkkoon kuuluvat asemat ovat epätasaisesti jakautuneet. Valtaosa noin 50 asemasta on Euroopassa, ja vain muutama muissa maanosissa. Erityisesti PZ-90:n kanssa yhteisiä pisteitä on vähän.

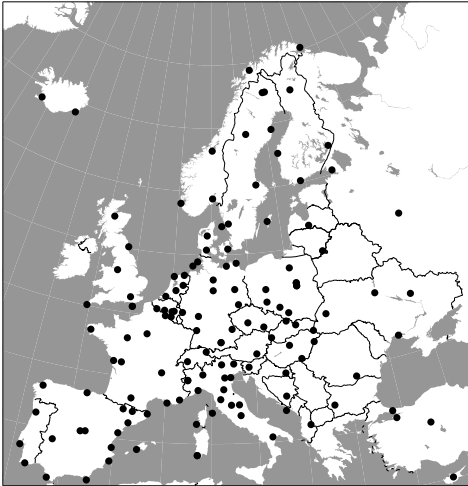
### 2.3.6 Eurooppalainen koordinaattijärjestelmä, ETRS89

Globaalit *ITRF-koordinaatit* ovat moniin käytännön sovelluksiin hankalahkoja, sillä koordinaatiston määrittelevien kiintopisteiden paikat toistensa suhteen muuttuvat. Nykyisillä mittaustarkkuuksilla kiintopisteiden määrittelemää ajasta riippumaton globaalia koordinaatistoa ei voi luoda, koska sekä mannerlaattojen liikkeet että muut laaja-alaiset maankuoren liikunnat tulevat näkyviin. Ratkaisuna ovat maanosan laajuiset *alueelliset koordinaatistot*, jotka sijaitsevat pääosin yhden mannerlaatan alueella.

Vuoden 1990 Firenzen kokouksessa IAG:n alakomissio *EUREF* (IAG Reference Frame Sub-Commission for Europe, IAG SC1.3a, <http://www.euref-iag.net/>) esitti, että Euroopassa tulisi siirtyä käyttämään koordinaatistoa, joka on kiinnitetty Euraasian mannerlaatan deformaantumattomaan osaan.

Tuossa kokouksessa määriteltyä järjestelmää kutsutaan *ETRS89:ksi* (European Terrestrial Reference System 1989). ETRS89 on yhtenevä ITRS:n kanssa epookkina 1989.0, mutta ETRS:n realisaatio ei ole samalla tavalla ajasta riippuva. Vastaavaa realisaatiota kutsutaan nimellä *ETRF89* (European Terrestrial Reference Frame)

*Euroopan komission* aloitteesta organisoitiin vuonna 1999 kokous, jonka päätöslauselmassa esitettiin ETRS89:n hyväksymistä yleiseurooppalaiseksi koordinaattijärjestelmäksi. Kokous suositteli edelleen, että eri maiden kansalliset mittaustavalliset toimittaisivat siirtoparametrit sekä menetelmät, joiden avulla siirtyminen kansallisesta koordinaattijärjestelmästä ETRS89:ään voidaan tehdä.



**Kuva 2.19:** Euroopan pysyvä GPS-verkko, *EPN* (European Permanent GPS Network) muodostaa nykyisen eurooppalaisen koordinaatiston rungon. (Lähde: <http://www.epncb.oma.be/>)

Myös Euroopan karttalaitosten järjestö *Eurogeographics* suosittelee ETRS89 mukaisten koordinaattien käyttöä.

ETRS:n realisoimiseksi ensimmäinen Euroopan laajuinen GPS-kampanja, *EUREF89*, toteutettiin jo v. 1989. Noin 90 GPS-pisteen lisäksi verkkoon liitettiin 12 VLBI-pistettä, joiden koordinaatit pidettiin tasoituksessa kiinteinä. Koordinaatiston skaala ja orientointi ovat siten peräisin VLBI-havainnoista. Tässä kampanjassa oli Suomesta mukana neljä pistettä, Metsähovi/Sjökullan VLBI-piste, sekä I luokan kolmiopisteet Nisula, Jänhiälä ja Kaunispää. Työn tuloksena saatiin koordinaatisto, jota kutsutaan nimellä *EUREF89*.

Alkuperäistä verkkoa laajennettiin mm. Itä-Euroopan suuntaan ja yhä uusia maita liitettiin *EUREF*-verkkoon. Samalla tarkkuudet ja pistemäärät lisääntyivät alkuperäisestä *EUREF89*-mittauksesta. *EUREF89*-koordinaatit ovat jo poistuneet käytöstä. Kaikki kansalliset laajennukset on kuitenkin tehty *EUREF*-komission suositusten mukaisesti ja uusien *EUREF*-pisteiden koordinaatit ovat *EUREF*-kokouksessa hyväksytyjä.

---

*Euroopan  
pysyvä  
GPS-verkko*

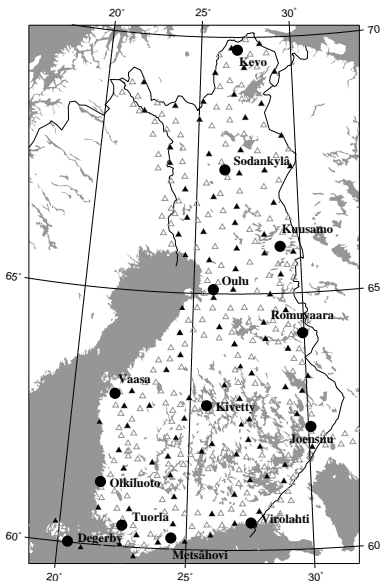
---

Euroopan pysyvää GPS-verkkoa (*EPN*, European Permanent GPS Network) on rakennettu 1990-luvun puolivälistä alkaen, ja nykyisin se käsittää yli 150 asemaa 32 maassa (kuva 2.19). *EPN* muodostaa ETRS89:n realisaation rungon, jota kautta eri maissa olevat kansalliset verkot on yhdistetty toisiinsa ja *ITRF*-verkkoon.

*ETRF* on nykyinen eurooppalainen koordinaatisto, josta on olemassa useita kansallisia realisaatioita. Uusien pisteiden *ETRF*-koordinaatit saadaan joko laskemalla ne muunnoksen avulla *ITRF*-koordinaateista (Boucher and Al-

tamimi, 2001) tai sitomalla havainnot olemassa oleviin ETRF-pisteisiin. ITRF-koordinaateista muunnoksen kautta saataviin ETRF-koordinaatteihin liitetään tavallisesti vastaava vuosiluku, esim. *ITRF-2000:sta* saadaan muunnoksella ETRF-2000 -koordinaatteja.

Koska muunnoskaavat eivät ota huomioon maankuoren pystysuoria liikkeitä, esimerkiksi maannousua (ks. luku 2.4), poikkeavat kansalliset realisaatiot toisistaan joitakin senttimetrejä riippuen koordinaatit määrittävän GPS-mittauksen ajankohdasta. Näin on myös Suomen kansallisen realisaation osalta, mistä syystä sille on annettu nimi *EUREF-FIN* erotukseksi muista ETRS89-järjestelmän mukaisista realisaatioista. Erot muihin realisaatioihin ovat kuitenkin useimpiin tarkoituksiin merkityksettömiä ja tarkimmissa töissä on joka tapauksessa käytettävä havaintohetken epookkiin laskettuja ITRF-koordinaatteja.



**Kuva 2.20:** Suomen kansallisen realisaation *EUREF-FIN*:in rungon muodostavat Suomen pysyvän GPS-verkon, *FinnRefin* asemat (ympyrät), joiden kautta *EUREF-FIN* on sidottu eurooppalaiseen koordinaatistoon. *EUREF*-tihennyksen 100 pistettä (mustat kolmiot) määrittelevät Suomen *EUREF-FIN* -koordinaatiston. Lähes kaikki pisteet kuuluvat myös vanhaan I-luokan kolmioverkkoon (kolmiot). Oikealla Tuorlan aseman antennimasto sääasemineen. Kuva M. Poutanen.

### 2.3.7 Suomen kansallinen realisaatio, EUREF-FIN

Geodeettisen laitoksen ja Maanmittauslaitoksen luoma ETRS89:n kansallinen realisaatio *EUREF-FIN* korvaa kartastokoordinaattijärjestelmän, *KKJ:n*. *EUREF-FIN* on kuvattu julkaisussa Ollikainen *et al.* (2000) ja Julkisen hallinnon suosituksessa *JHS153*. Valtakunnallisissa kartastotöissä ja paikkatietopalveluissa suositetaan käytettäväksi yleiseurooppalaista koordinaattijärjestelmää ETRS89, mutta siirtymävaiheessa myös kartastokoordinaattijärjestelmä on edelleen käytössä. Julkisen hallinnon suosituksessa *JHS154* määritellään *EUREF-FIN* -koordinaatiston kanssa käytettävät karttaprojektiot ja tasokoordinaatistot sekä muunnos *EUREF-FIN* -tasokoordinaatiston ja kartastokoordinaatiston välille.

Ensimmäinen ETRS-järjestelmän mukainen realisaatio luotiin Suomeen v. 1992, jolloin mitattiin 22 I-luokan kolmiopistettä käsittävä verkko. Mittaukset sidositiin kolmeen *EUREF89*-pisteeseen, Sjököllä, Nisula ja Kaunispeä. Realisaatio oli siten *EUREF89:n* mukainen.

Vuosina 1994–1996 Geodeettinen laitos rakensi 12 pistettä käsittävän pysyvän GPS-verkon, *FinnRef* (kuva 2.20). Verkon pisteistä neljä, Metsähovi, Vaasa, Joensuu ja Sodankylä ovat osana Euroopan pysyvää GPS-verkkoa, *EPN:a*. *FinnRef*-verkko on *EUREF-FIN* -koordinaatiston runko, jota kautta verkko on liitetty eurooppalaiseen järjestelmään.

ETRS89:n mukaisen kansallisen realisaation luomiseksi Geodeettinen laitos mittasi vuosina 1996–97 lähinnä I luokan kolmiopisteistä koostuvan sadan pisteen verkon *EUREF*-vaatimusten edellyttämällä tarkkuudella (Ollikainen *et al.*, 2000). Kullakin pisteellä mittausjakson pituus oli vähintään  $2 \times 24^h$ . Laskennassa pysyvän GPS-verkon pisteet pidettiin kiinteinä ja laskut tehtiin ITRF94-koordinaatistossa. Muunnos ITRF94-koordinaatistosta ETRF89-koordinaatistoon tehtiin *EUREF*-komission suositusten mukaisesti (Boucher and Altamimi, 2001). Mittausten keskiepookki on 1997.0, mikä on siten myös *EUREF-FIN* -koordinaatiston epookki.

*EUREF-FIN* -koordinaatit poikkeavat useilla senteillä *EUREF89*-koordinaateista, pääasiassa siksi että mittausten ajanhetki on eri. *EUREF*-komission suositusten mukaisesti esimerkiksi maannousun vaikutusta ei oteta huomioon. Tästä johtuen uudelle realisaatiolle annettiin nimi *EUREF-FIN* erotukseksi muista realisaatioista. Realisaation pisteistä 19 hyväksyttiin virallisiksi *EUREF*-verkon pisteiksi *EUREF*-komission kokouksessa Prahassa 1999.

Julkisen hallinnon suosituksessa *JHS154* määritellään *EUREF-FIN*:iä vastaava *tasokoordinaatisto*. Se suositetaan muodostettavaksi käyttäen UTM-karttaprojektiota (koko maa) tai Gauss-Krüger -projektiota (paikalliset sovelluk-

---

Suomen  
pysyvä  
GPS-verkko

---

uusi kansallinen  
koordinatisto

set). Karttaprojektion nimeä käytetään synonyyminä myös karttaprojektiota vastaavalle tasokoordinaatistolle. (Karttaprojektioista, ks. liite B ja taulukko 2.8). Vuonna 2005 ilmestyivät ensimmäiset uuden järjestelmän mukaiset kartat.

Maan laajuisen UTM-projektion nimi on *ETRS-TM35FIN*, missä ETRS viittaa koordinaattijärjestelmään, TM karttaprojektion tyyppiin (poikittainen Mercator), 35 UTM-kaistaan ja FIN-päätte ilmaisee, että projektiio poikkeaa standardista kaistan leveyden osalta. ETRS-TM35FIN -projektiossa käytetään Suomessa vain yhtä projektiokaistaa, jonka keskimeridiaani on 27° itäistä pituutta. Kaista ulottuu noin 8° keskimeridiaanista länteen ja 5° itään.

---

*ETRS-  
TM35FIN*

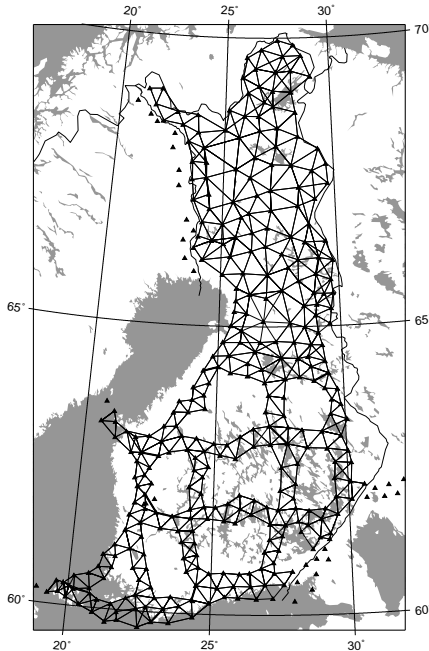
---

ETRS-TM35FIN -projektion sijasta voidaan paikallisesti käyttää *Gauss-Krüger -projektiota* esimerkiksi kaavoituksessa ja rakentamisessa. Tällöin projektion tunnuksena on ETRS-GK $n$ , missä GK viittaa Gauss-Krüger -projektiioon ja  $n$  on projektion *keskimeridiaani*. ETRS-GK $n$  -projektiossa käytetään 1° leveyisiä projektiokaistoja ja alueelle parhaiten soveltuvaa keskimeridiaania,  $n = 19^\circ, 20^\circ, 21^\circ \dots 31^\circ$ .

**Taulukko 2.8:** Suomessa valtakunnallisesti käytössä olevia karttaprojektioita (JHS154).

Lyhenne	ETRS-TM35FIN	ETRS-GK $n$	KKJ / YKJ*
Projektiio	UTM	Gauss-Krüger	Gauss-Krüger
Vertausellipsoidi	GRS80	GRS80	Kansainvälinen 1924
Keskimeridiaani [°]	27	19, 20, ..., 31	18, 21, 24, 27, 30, 33
Kaistoja	1	13	6 / 1
Kaistanleveys [°]	13 (-8, +5)	1 ( $\pm 0.5$ )	3 ( $\pm 1.5$ ) / 13
Mittakaavakorjaus [ppm]			
0 km keskimeridiaanista	-400	0	0
50 km	-369	31	31
100 km	-278	122	122
150 km	-125	-	275
200 km	90	-	490
300 km	703	-	1103
400 km	1563	-	1962

\*YKJ (yhtenäiskoordinaatisto) on muuten sama kuin KKJ, mutta koko Suomi on yhdessä kaistassa, keskimeridiaani 27°.



**Kuva 2.21:** Suomen I luokan kolmioverkko. Mittakaavan antavien perusviivojen suurenusverkkojen pääsivut on piirretty paksumalla viivalla.

### 2.3.8 Vanhat koordinaattijärjestelmät ED50 ja KKJ

Ennen avaruusgeodeettisten mittausten tuloa eri maissa oli käytössä lukuisia geodeettisia järjestelmiä, jotka eivät kuitenkaan olleet globaaleja. Globaaleja koordinaatioita onkin voitu luoda vasta avaruusgeodeettisten havaintojen myötä, kun Maan massakeskipisteen paikka pystyttiin määrittämään ja samalla voitiin luoda yhteys eri mantereilla olevien verkkojen välille.

Vanhoista koordinaatioista tärkein on meidän kannaltamme *ED50* (European Datum 1950), koska se oli pohjana siinä Suomen I luokan kolmioverkon tasoituslaskussa, jonka tuloksena Kartastokoordinaattijärjestelmä (KKJ) luotiin. ED50 perustuu Euroopan laajuiseen kolmioverkkojen yhteistasoitukseen joka tehtiin 1950-luvulla. Näin saatiin koko Länsi-Euroopan kattava yhtenäinen koordinaatio. ED50-referenssiellipsoidina käytettiin *Kansainvälistä ellipsoidia* (1924, Hayford), joka ei kuitenkaan ole geosentrinen vaan orientoitu niin että se kuvaa Maan muotoa parhaiten juuri Euroopan kohdalla. Ellipsoidin dimensiot ovat  $a = 6378388$  m ja  $f = 1/297$ . Jo valtakunnallisen *I luokan kolmioverkon* ensimmäisistä tasoituksista (20-luvulta lähtien) on Suomessa käytetty samaa vertausellipsoidia.

Suomen ED50-järjestelmä perustuu v. 1966 suoritettuun 291 ensimmäisen luokan kolmiopisteen kansalliseen tasoitukseen (Korhonen, 1967). Kiinteänä pi-



detyn lähtöpisteen (Simsiö) koordinaatit otettiin yhteiseurooppalaisesta tasoituksesta ja skaala 15:stä eri puolilla Suomea olevista *perusviivojen* suurennusverkkojen pääsivuista (kuva 2.21).

Itse perusviivat ovat keskimäärin muutaman kilometrin mittaisia ja niiden pituus on mitattu *invarlankojen* avulla. Ensimmäisen luokan kolmioverkon pisteiden väli on keskimäärin n. 35 km, joten niiden pituuden suora mittaaminen ennen elektronisten etäisyysmittareiden tuloa (1960-luvulla) oli käytännössä mahdotonta. Niinpä lyhyemmän perusviivan pituus siirrettiin kolmioverkon sivun pituudeksi erillisen suurennusverkon avulla.

Perusviivojen skaala puolestaan on johdettu *Nummelan normaaliperusviivan* pituudesta (864 m), joka on mitattu valon interferenssiin perustuvalla *Väisälä-komparaattorilla* (ks. esim. Väisälä, 1923; Kukkamäki, 1978; Poutanen ja Jokela, 1997). Nummelan normaaliperusviivalla on kalibroitu kaikki muiden perusviivojen mittauksessa käytetyt invarlangat. Myös 1960-luvulta lähtien käytettyjen elektronisten etäisyysmittareiden (mm. telluometrit, geodimetrit, mekometrit) skaala palautuu Nummelan viivan pituuteen.

Kolmioverkon orientointi tulee lukuisten *Laplace-pisteiden* kautta eli pisteillä on havaittu astronominen atsimuutti ja longitudi. Näitä pisteitä on kansallisessa tasoituksessa mukana huomattavasti runsaammin kuin mitä niitä käytettiin yhteiseurooppalaisessa tasoituksessa. Suomen ED50-järjestelmä poikkeaa sekä skaalaltaan että orientoinniltaan eurooppalaisesta kaimastaan.

Vuodesta 1970 lähtien Suomessa käytössä ollut Maanmittaushallituksen luoma Kartastokoordinaattijärjestelmä (*KKJ*) on suorakulmainen, kolmen asteen kaistoissa oleva tasokoordinaatisto. Kaistojen keskimeridiaanit ovat 18°, 21°, 24°, 27° ja 30°. Lisäksi on luotu koko maan peittävä yhtenäiskoordinaatisto (*YKJ*), jolloin keskimeridiaanina käytetään 27° ja koko maa on yhdessä kaistassa.

Tasolla olevaan *KKJ*:ään päästään ED50-koordinaateista suorittamalla ensiksi *Gauss-Krüger -projektiio* keskimeridiaanina 27° ja tämän jälkeen tekemällä *Helmert-muunnos* tasossa, ts. tasolle projisioinnin jälkeen koordinaatistoa vielä siirretään ja kierretään projektiotasolla.

Syynä *KKJ*:n outoon luontitapaan oli sitä edeltänyt *Helsingin järjestelmä*, joka nykyisin tunnetaan *vanhana valtion järjestelmänä* (vvj). Kansallisen ED50-tasoitukseen valmistuttua sen tuoma tarkkuusparannus haluttiin ottaa huomioon, mutta toisaalta olemassa olevia karttoja pyrittiin muuttamaan mahdollisimman vähän. Niinpä silloinen Maanmittaushallitus loi kartastokoordinaattijärjestelmän siirtämällä ja kiertämällä tasolle projisioitua I-luokan kolmioverkkoa siten, että se yhtyi mahdollisimman hyvin Helsingin järjestelmään. Muunnoksen siirtoparametrit ratkaistiin 202 yhteisen pisteen avulla.

---

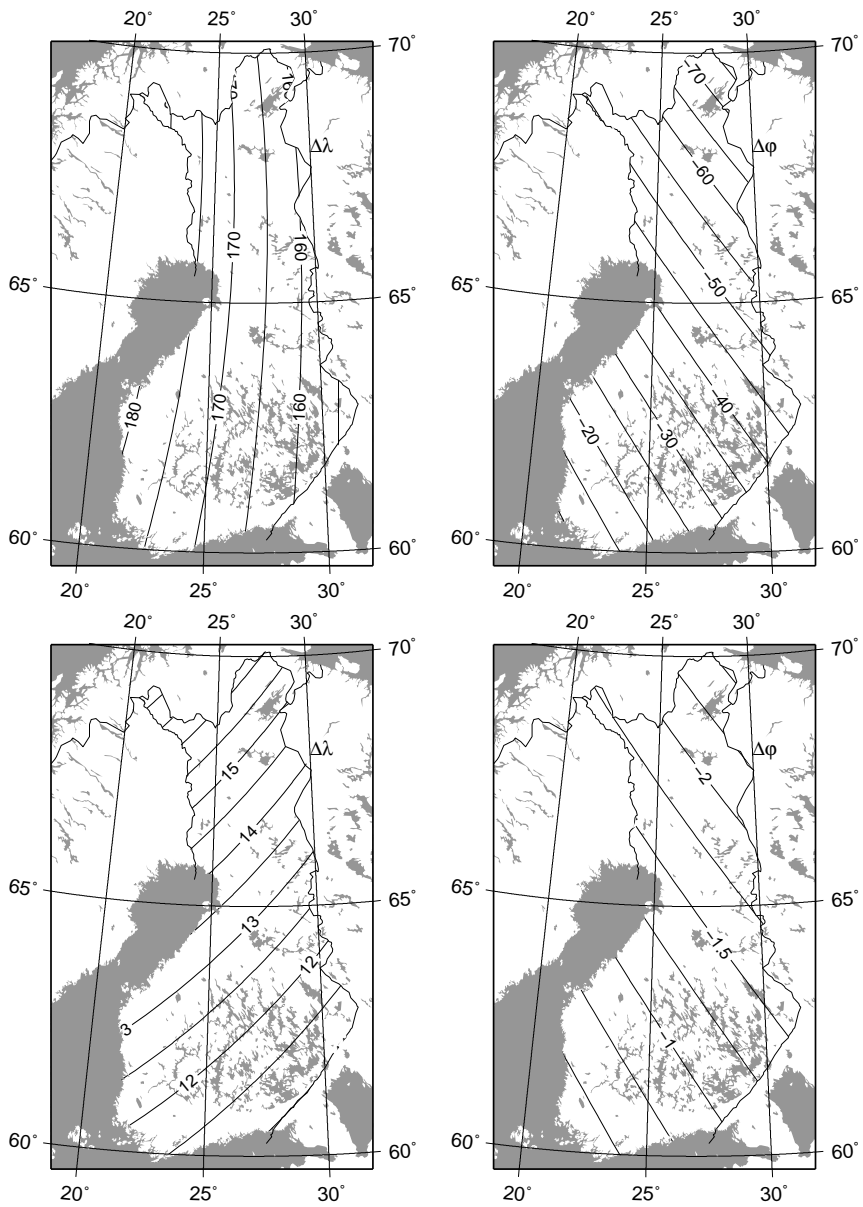
*perusviivat*

---

---

*vvj*

---



**Kuva 2.22:** WGS84 ja KKK:n välinen ero; yläkuvassa metreinä longitudin ja latitudin suunnassa, alakuvassa sama kaarisekunteinä. (Ollikainen, 1993)

Kartastokoordinaattijärjestelmä poikkeaa geosentrisestä koordinaatistosta siten yhtä paljon kuin Helsingin järjestelmäkin. Karttojen piirtotarkkuuteen tällä ei kuitenkaan ole vaikutusta. Vaikeudet alkoivat vasta GPS-laitteiden yleistymisen myötä, kun vastaanotinten tuottamat koordinaatit poikkesivat merkittävästi kartan ilmoittamasta paikasta. Ero on 160–180 m itä-länsisuunnassa ja 10–70 m pohjois-eteläsuunnassa (kuva 2.22).

ED79 ja ED87 ovat uudempia yleiseurooppalaisia koordinaattijärjestelmiä. Myös Suomen I luokan kolmioverkolle on laskettu ED87-koordinaatit vastaavalla tavalla kuin mitä kansallinen ED50 tasoitus tehtiin (Jokela 1994). Pisteiden ja havaintojen määrä oli suurempi kuin vuoden 1966 ED50-tasoituksessa. ED87-tasoituksen tuloksia ei kuitenkaan ole koskaan käytetty mittauksissa, koska GPS:ään perustuvat globaalit koordinaatistot tulivat käyttöön samanaikaisesti.

Monissa kunnissa ja kaupungeissa on käytössä *erillisjärjestelmiä*. Näille joudutaan luomaan GPS:n käyttöä varten omat paikalliset muunnokset. Osa kunnista on siirtymässä EUREF-FIN -koordinaatistoon, mutta huomattava osa pitäytyy edelleen vanhoissa järjestelmissä.

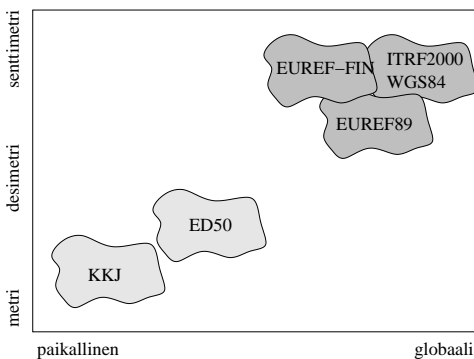
---

ED79 ED87

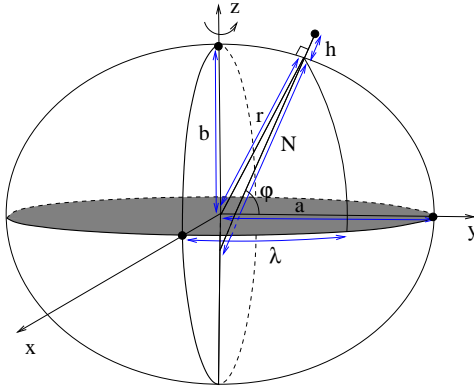
---

## 2.4 Siirtyminen koordinaatistosta toiseen

Kuten edellä on useaan kertaan todettu, koordinaatistoja on eri tarkoituksiin lukuista, ja väistämättä ennen pitkää tulee vastaan tilanne, jossa koordinaatit on saatava muunnetuiksi koordinaatistosta toiseen. Tavallisin on siirtyminen GPS-mittausten koordinaatistosta paikalliseen koordinaatistoon, esimerkiksi EUREF-FIN:stä KKJ:ään. Tutustumme seuraavassa joihinkin muunnoksiin ja muunnosmenetelmiin.



**Kuva 2.23:** Koordinaatistot voidaan jaotella sen mukaan kuinka paikallisia tai globaaleja ne ovat. Esimerkkinä paikallisista koordinaatistoista on *KKJ* ja globaaleista *ITRF*. Kuvan pystyakselilla on koordinaatiston tarkkuus (kuvitteelliseen ”absoluuttiseen referenssiin” nähden), sisältäen sekä sisäisen tarkkuuden että alueelliset deformaatiot ja erilaiset systemaattiset virheet. Asteikko on vain suuntaa antava.



**Kuva 2.24:** Suorakulmainen ja maantieteellinen koordinaatisto.

### 2.4.1 Suorakulmaiset ja maantieteelliset koordinaatit

Havaitsijan paikka voidaan ilmoittaa joko suorakulmaisina  $xyz$ -koordinaatteina tai maantieteellisinä koordinaatteina  $\varphi, \lambda$  sekä korkeutena ellipsoidista  $h$  (ks. kuva 2.24). Vaikka laskuissa suorakulmainen koordinaatisto on helpoin, se on kuitenkin käyttäjän kannalta epähavainnollinen. Siksi paikka ilmoitetaan tavallisimmin maantieteellisenä. Aiemmin laskut tehtiin ellipsoidilla, mutta nykyisin tähän ei pitäisi enää olla tarvetta, koska muunnokset suorakulmaisten ja maantieteellisten koordinaattien välillä voidaan tehdä helposti. Vielä vähemmän voidaan puollustella laskujen tekemistä karttaprojektiolla.

Laskennassa on käytettävä sitä ellipsoidia, joka liittyy kyseiseen koordinaatistoon. Muunnettaessa esimerkiksi suorakulmaisia EUREF-FIN -koordinaatteja maantieteellisiksi on ellipsoidina GRS80. Sen sijaan jos siirrymme suorakulmaisista KKJ-koordinaateista maantieteellisiin, on käytettävä Kansainvälistä ellipsoidia (1924). Väärän ellipsoidin käyttö johtaa erityisesti pohjois-eteläsuuntaiseen virheeseen; itä-länsisuunnassa virhe on tavallisesti pienempi.

Siirtyminen ellipsoidisista suorakulmaisiin käy yksinkertaisesti kaavoilla

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ ((1 - e^2)N + h) \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

missä  $\varphi$  on *leveys*,  $\lambda$  *pituus* ja  $h$  *korkeus ellipsoidista* ja  $e$  *1. eksentrisyys*

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}. \quad (2.33)$$

( $e$  näyttää hieman samannäköiseltä kuin Neperin luku  $e$ , johon sitä ei kuitenkaan tule sekoittaa!). Suure  $N$  on *poikittaiskaarevuussäde*,

$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (2.34)$$

missä  $a$  on ekvaattorin säde (= referenssiellipsoidin isoakselin puolikas) ja  $b$  napasäde (= pikkuakselin/pyörähdysakselin puolikas).

Geodesiassa *käänteistehtävällä* tarkoitetaan suorakulmaisten koordinaattien muuttamista maantieteellisiksi. Tämä on perinteisesti ollut se hankalampi lasku, koska sitä ei voi laskea suljetuilla kaavoilla. Laskentamenetelmiä on monia. Usein muunnos ratkaistaan iteratiivisesti, koska  $\varphi$ :n ja  $\lambda$ :n laskemisessa leveysaste  $\varphi$  täytyy tuntea, jotta voimme laskea  $N$ :n, jota tarvitaan  $\varphi$ :n laskemisessa.

*Iterointi* on nopea ja elegantti tapa käänteistehtävän laskemiseksi, koska Maan litistyneisyys on pieni. Ensimmäisessä vaiheessa saamme likiarvon havaitsejan leveysasteelle esimerkiksi kaavalla

$$\tan \varphi \approx \frac{z}{(1 - e^2) \sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (2.35)$$

**Taulukko 2.9:** Historiallisia ja käytössä olevia ellipsoideja. Walbeck on *Henrik Johan Walbeckin* Turussa v. 1819 laskema ellipsoidi. Hän käytti astemittausten analysoinnissa *Gaussin* muutamaa vuotta aiemmin kehittämää pienimmän neliösumman keinoa.

Ellipsoidi	$a$ [m]	$f$
Walbeck (1819)	6 376 896	1/302.8
Airy (1830)	6 377 563	1/299.32
Everest (1830)	6 377 276	1/300.80
Bessel (1841)	6 377 397	1/299.15
Struve (1860)	6 378 297	1/294.73
Clarke (1866)	6 378 206	1/294.98
Clarke (1880)	6 378 249	1/293.46
Kansainvälinen (1924)	6 378 388	1/297
Krassovski (1940)	6 378 245	1/298.3
GRS67 (1967)	6 378 160	1/298.247167427
WGS84 (1984)	6 378 137	1/298.257223563
GRS80 (1980)	6 378 137	1/298.257222101

Näin saatua leveysastetta käyttäen lasketaan poikittaiskaarevuussäde  $N$  kaavasta (2.34). Kaavan (2.32) kahdesta ensimmäisestä termistä saamme lausekkeen  $h$ :n laskemiseksi

$$h = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos \varphi} - N, \quad (2.36)$$

josta edelleen leveysasteen parannetuksi likiarvoksi

$$\tan \varphi = \frac{z}{\left(1 - e^2 \frac{N}{N+h}\right) \sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (2.37)$$

Tätä käyttäen lasketaan uusi  $N$ :n likiarvo. Iterointia jatketaan, kunnes leveysaste ei halutulla tarkkuudella enää muutu. Useimmiten jo pari kierrosta on riittävä määrä. Lopuksi lasketaan havaitsijan pituusaste  $\lambda$ ,

$$\lambda = \arctan \frac{y}{x}. \quad (2.38)$$

Kirjallisuudesta löytyy myös lukuisia sarjakehitelmiä tai likiarvokaavoja. Eräs suhteellisen yksinkertainen ja käytännössä riittävän tarkka likiarvokaava on (Hofmann-Wellenhof *et al.* 1994):

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctan \frac{z + e'^2 b \sin^3 \theta}{p - e'^2 a \cos^3 \theta} \\ \lambda &= \arctan \frac{y}{x} \\ h &= \frac{p}{\cos \varphi} - N \end{aligned} \quad (2.39)$$

jossa  $e$  on 1. eksentrisyys (kaava 2.33) ja

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan \frac{za}{pb} \\ p &= \sqrt{x^2 + y^2} = (N + h) \cos \varphi \\ e'^2 &= \frac{a^2 - b^2}{b^2} \end{aligned}$$

Joskus esimerkiksi epäkeskisissä mittauksissa tarvitaan *koordinaattieroja*. Olkoon kahden pisteen välinen koordinaattiero  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ . Paikallisessa koordinaatistossa, jossa koordinaattiakselit osoittavat pohjoiseen ( $N$ , Northing), itään

( $E$ , Easting) ja ellipsoidin normaalin suuntaan ( $U$ , Up) voidaan vastaaville koordinaattieroille kirjoittaa

$$\begin{aligned}\Delta N &= -\sin \varphi \cos \lambda \Delta x - \sin \varphi \sin \lambda \Delta y + \cos \varphi \Delta z \\ \Delta E &= -\sin \lambda \Delta x + \cos \lambda \Delta y \\ \Delta U &= \cos \varphi \cos \lambda \Delta x + \cos \varphi \sin \lambda \Delta y + \sin \varphi \Delta z\end{aligned}\tag{2.40}$$

Käänteismuunnos on

$$\begin{aligned}\Delta x &= -\sin \varphi \cos \lambda \Delta N - \sin \lambda \Delta E + \cos \varphi \cos \lambda \Delta U \\ \Delta y &= -\sin \varphi \sin \lambda \Delta N + \cos \lambda \Delta E + \cos \varphi \sin \lambda \Delta U \\ \Delta z &= \cos \varphi \Delta N + \sin \varphi \Delta U\end{aligned}\tag{2.41}$$

Näitä kehitelmiä voidaan käyttää pienissä paikallisissa mittauksissa, mutta pitemmillä etäisyyksillä (> muutama kilometri) virheet alkavat kasvaa voimakkaasti.

### **Esimerkki 2.7 Suorakulmaisten koordinaattien muuttaminen maantieteellisiksi**

ITRF-luettelosta saamme Metsähoville seuraavat koordinaatit:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2892571.089 \\ 1311843.212 \\ 5512633.973 \end{pmatrix}.$$

Lasketaan muunnos maantieteellisiin koordinaatteihin iteroimalla. Ensimmäisenä approksimaationa saamme havaitsejan leveysasteelle kaavalla (2.35)

$$\varphi = 60.217.$$

Tämän avulla saamme *poikittaiskaarevuussäteelle* likiarvon kaavasta (2.34) (käyttäen *GRS80*-ellipsoidin arvoja  $a = 6378137$  m,  $b = 6356752.314$  m)

$$N = 6394279.7$$

ja korkeudelle (2.36)

$$h = 95.5.$$

Uudeksi  $\varphi$ :n likiarvoksi tulee

$$\varphi = 60.217,$$

ts. kolmella desimaalilla ilmoitettuna arvo ei muutu. Kahden iterointikierroksen jälkeen saamme pisteen maantieteellisiksi koordinaateiksi

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \lambda \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60^{\text{h}} 13^{\text{m}} 02.8921^{\text{s}} \\ 24^{\circ} 23^{\text{m}} 43.1312^{\text{s}} \\ 94.56 \text{ m} \end{pmatrix},$$

jotka ovat jo senttimetriä tarkemmin oikeat.

### Esimerkki 2.8 Väärän ellipsoidin aiheuttama virhe

Olkoon pisteen  $(x, y, z)$  -koordinaatit ITRF-koordinaatistossa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2892571.089 \\ 1311843.212 \\ 5512633.973 \end{pmatrix}.$$

Kun koordinaatit muunnetaan maantieteellisiksi käyttäen GRS80-ellipsoidia, saadaan

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \lambda \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60^{\text{h}} 13^{\text{m}} 02.89218^{\text{s}} \\ 24^{\circ} 23^{\text{m}} 43.13124^{\text{s}} \\ 94.561 \text{ m} \end{pmatrix}.$$

Jos käytämme muunnoksessa virheellisesti *Kansainvälistä (1924) ellipsoidia* saamme

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \lambda \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60^{\text{h}} 13^{\text{m}} 05.44185^{\text{s}} \\ 24^{\circ} 23^{\text{m}} 43.13124^{\text{s}} \\ -87.670 \text{ m} \end{pmatrix}.$$

Huomaa, että pituuteen ei tule virhettä; sen sijaan leveys ja korkeus ovat väärin.

## 2.4.2 Terrestrisen ja inertiaalikoordinaatiston välinen yhteys

Luvussa 2.1.7 (s. 60) määrittelimme inertiaalikoordinaatiston, *ICRF*, jossa myös GNSS-satelliittien radat lasketaan. Jotta satelliittien paikka havaitsijan Maahan kiinnitettyssä koordinaatistossa voidaan ilmoittaa, tarvitsemme muunnoksen ICRF:n ja ITRF:n välille.



Kummankin koordinaatiston origo on Maan massakeskipisteessä, mutta koordinaattiakselien orientointi on erilainen. Muunnokseen riittää siis pelkästään muutama sopivasti valittu koordinaatiston kierto. ICRF on orientoitu siten että  $z$ -akseli osoittaa epookin J2000.0 Maan pyörimisakselin suuntaan ja  $x$ -akseli saman epookin keskimääräisen kevättasauspisteen suuntaan. Maahan sidotun ITRF-koordinaatiston  $z$ -akseli osoittaa Maan keskimääräisen pyörimisakselin suuntaan epookkina 1903 ja  $x$ -akseli Greenwichin keskimääräiseen meridiaaniin.

Pääsemme koordinaatistosta toiseen neljällä kierrolla:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{CTRF} = \mathbf{R}^M \mathbf{R}^S \mathbf{R}^N \mathbf{R}^P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{ICRF} \quad (2.42)$$

Ensimmäinen kiertomatriisi  $\mathbf{R}^P$  korjaa *prekession* ICRF:n standardiepookista havaintohetkeen ja toinen  $\mathbf{R}^N$  tekee *nutaatiokorjauksen* (kaavat (2.14) ja (2.18)). Kolmas kierto  $\mathbf{R}^S$  kääntää  $X$ -akselin kevättasauspisteen suunnasta Greenwichin meridiaaniin, ts. kierretään siis *tähtiajan* verran. Koska WGS84:n ja ITRF:n määrittelyssä käytettiin maapallon pyörimisnopeudelle kiinteää arvoa  $\omega_E$ , on tähtiajalle käytettävä keskimääräistä aikaa (2.6) eikä todellista näennäistä tähtiaikaa (2.20).

Viimeinen kierroista  $\mathbf{R}^M$  ottaa huomioon *napavariaation* (ks. kuva 2.17). Prekessio, nutaatio ja tähtiaika voidaan laskea tarkasti etukäteen, napavariaatiota sen sijaan ei. Napavariaatio saadaan vasta jälkikäteen havainnoista, joskin se voidaan ennustaa kohtuullisella tarkkuudella muutamia kuukausia eteenpäin. Arvot löytyvät esim. *IERS*:n tai *US Naval Observatory*n sivuilta <http://www.iers.org> tai <http://maia.usno.navy.mil>. Napavariaation komponenteista  $x_p$  ja  $y_p$  laskettuna muunnos on

---

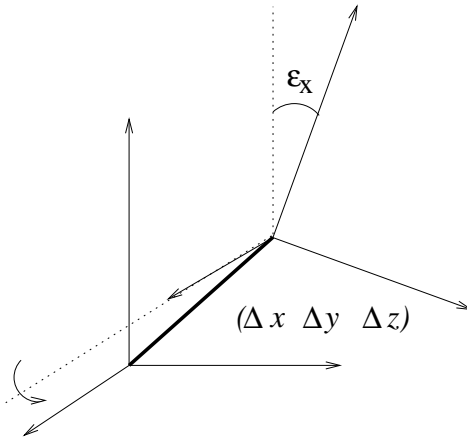
*napavariaation  
laskeminen*

---

$$\mathbf{R}^M = \mathbf{R}_2(-x_p) \mathbf{R}_1(-y_p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_p \\ 0 & 1 & -y_p \\ -x_p & y_p & 1 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Tässä  $x_p$  ja  $y_p$  ovat hetkellisen navan koordinaatit CIO:n suhteen. Koska kulmat ovat hyvin pieniä, on tässä approksimoitu  $\cos \alpha \approx 1$ ;  $\sin \alpha \approx \alpha$ .

Itse asiassa GNSS-järjestelmien koordinaatit ovat jo alun perin havaintohetkessä, koska satelliittien rataelementit annetaan havaintoepookille. Joudumme siis tekemään vain tähtiaika- ja napavariaatiokorjaukset. Palaamme tähän vielä satelliittien ratojen yhteydessä kunhan ensin olemme oppineet laskemaan satelliitin paikan radallaan.



**Kuva 2.25:** Siirtyminen koordinaattijärjestelmästä toiseen. Koordinaatistojen origojen ero on  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  ja toista koordinaatistoa on kierretty  $x$ -akselin ympäri kulman  $\epsilon_x$  verran.

### 2.4.3 Koordinaattimuunnokset

Siirtyminen *koordinaattijärjestelmästä* toiseen on triviaalia, koska tällöin tarvitaan vain järjestelmien origojen erot ja koordinaattiakselien väliset kierrot. Koska muunnos perustuu järjestelmien määrittelyyn, se on myös tarkka. Ikävä kyllä, reaali maailmassa joudumme tekemään muunnokset *koordinaatistojen* välillä, jolloin mukaan tulevat kiintopisteiden virheet. Tällöin koordinaattien kuvaaminen toisen koordinaatiston mukaisiksi ei enää olekaan virheetöntä, vaan tapauksesta riippuen jäännösvirheet saattavat muodostua hyvinkin merkittäviksi.

Karkeasti yleistäen voisikin sanoa, että koordinaattimuunnoksissa pyrimme kuvaamaan toisen koordinaatiston virheet toiseen koordinaatistoon mahdollisimman hyvin. Koska GNSS:llä määritettyjen modernien koordinaatistojen sisäiset tarkkuudet ovat jopa useita kertaluokkia parempia kuin vanhojen koordinaatistojen, kuvaavat jäännösvirheet käytännössä vanhojen koordinaatistojen virheitä.

Siirtyminen kahden eri koordinaatiston välillä suoritetaan usein yleisen *yhdenmuotoisuusmuunnoksen* (*Helmert-muunnoksen*) avulla, ts. käytämme kiertoja, origon siirtoa ja mittakaavan muutosta. Koordinaatiston mittakaavavirhe on siten yksi huomioon otettavista virhelähteistä. Nimensä mukaisesti muunnos ei muuta esim. kuvioiden muotoja ja kaikki suhteet säilyvät muunnoksessa muuttumattomina.

Helmert-muunnoksen yleinen muoto on

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \mu \mathbf{R} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

missä  $\mu = 1 + m$  on koordinaatistojen välinen mittakaavakerroin.  $m$  annetaan taulukoissa yleensä miljoonasosina (ppm,  $10^{-6}$ ), joskus myös miljardisosina (ppb,  $10^{-9}$ ).  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  ja  $\Delta z$  ovat origojen väliset koordinaattierot ja  $\mathbf{R}$  on *kiertomatriisi*

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & e_z & -e_y \\ -e_z & 1 & e_x \\ e_y & -e_x & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

missä  $e_x$ ,  $e_y$ ,  $e_z$  ovat  $x$ -,  $y$ - ja  $z$ -akselien väliset *kiertokulmat*. Laskuissa kulmat on oltava radiaaneina, vaikka taulukoissa ne yleensä annetaan kaarisekuntein! Kaavassa (2.45) on oletettu, että kiertokulmat ovat hyvin pieniä, ts.  $\cos \alpha \approx 1$ ;  $\sin \alpha \approx \alpha$ .

Toinen huomautus koskee jo tähtitieteellisten koordinaatistojen yhteydessä annettua varoitusta kiertokulmien merkistä. Koska joskus kiertokulmat määritellään kasvavaksi toiseen suuntaan, on kiertomatriisi (2.45) tällöin

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & -e_z & e_y \\ e_z & 1 & -e_x \\ -e_y & e_x & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Yhdenmuotoisuusmuunnoksesta on useita variaatioita. Joskus (2.44) kirjoitetaan eksplisiittisesti muodossa

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & e_z & -e_y \\ -e_z & m & e_x \\ e_y & -e_x & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

---

*Bursa-Wolf*  
*-muunnos*

---

Muunnoskaavaa (2.47) kutsutaan *Bursa-Wolf-muunnokseksi*. Siinä muunnos suoritetaan koordinaatiston origon suhteen, mutta toisinaan saattaa olla numeerisesti edullisempaa tehdä muunnos verkon painopisteen suhteen:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \mu \mathbf{R} \begin{pmatrix} x_1 - x_m \\ y_1 - y_m \\ z_1 - z_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

---

*Molodensky-*  
*Badekas*  
*-muunnos*

---

Muunnosta kutsutaan *Molodensky-Badekas -muunnokseksi*.  $x_m$ ,  $y_m$  ja  $z_m$  ovat järjestelmän painopisteen koordinaatit:

$$\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \sum_n x_{1i} \\ \sum_n y_{1i} \\ \sum_n z_{1i} \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Muunnosparametrit  $T$  voivat lisäksi olla ajasta riippuvia. Jos ne tunnetaan hetkelle  $t_0$ , saadaan parametrit hetkelle  $t$  kaavasta:

$$T(t) = T(t_0) + \dot{T}(t - t_0) \quad (2.50)$$

missä  $\dot{T}$  on ko. parametrin muutosnopeus.

Joskus yhdenmuotoisuusmuunnos ei anna riittävän hyvää tulosta. Tällöin on käytettävä monimutkaisempia muunnoksia, mutta samalla menetetään joitakin yhdenmuotoisuusmuunnoksen etuja. Esimerkiksi kuvioiden muodot tai kulmat eivät enää säily, mittakaava voi vaihdella eri osissa muunnosta tai eri koordinaattiakselien suunnassa.

*Affininen muunnos* ei säilytä kuvioiden muotoja ja siinä mittakaavan muutos koordinaattiakselien suunnassa on erilainen. Muunnos voidaan esittää muodossa

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 & e_z & -e_y \\ -e_z & m_2 & e_x \\ e_y & -e_x & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Jos muunnos tehdään tasossa, yksinkertaistuu (2.51) muotoon

*affininen  
muunnos*

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e_z \\ -e_z & 1 \end{pmatrix} \cdot ((1 + m_1) (1 + m_2)) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

missä  $\Delta x$  ja  $\Delta y$  ovat origojen väliset koordinaattierot,  $e_z$  kiertokulma tason normaalin ympäri, sekä  $m_1$  ja  $m_2$  mittakaavakertoimet koordinaattiakselien suunnassa.

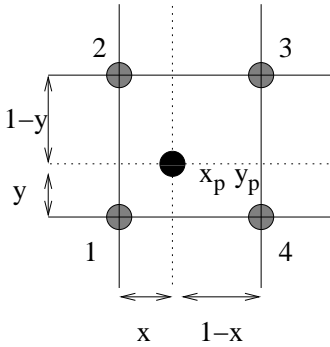
Affinista muunnosta on sovellettu esim. kuvassa 2.28 esitettyssä tapauksessa, jossa pisteistö on jaettu kolmioihin, ja jokaisen kolmioon on määritetty oma affiinin muunnoksensa. Muunnos on kolmiosta toiseen jatkuva ja muunnospisteissä (kolmioiden kärjissä) arvot eivät muutu. Tällä tavalla jäännösvirheet saadaan hyvin pieniksi eikä eri alueiden välillä ole hyppäyksiä, mutta kuvioiden muodot eivät säily, pinta-alat muuttuvat eri tavalla eri kolmiossa, eivätkä monet valmisohjelmat välttämättä ymmärrä tällaista muunnosta. Kolmiossa ei myöskään ole ylimäärittystä, jolloin pisteen arvossa olevat karkeatkin virheet jäävät huomaamatta.

*Polynomimuunnoksessa* uuden koordinaatiston koordinaatit saadaan esitettyä laskettujen koordinaattierojen avulla. Tasossa saamme

*polynomi-  
muunnos*

$$x_2 = x_1 + \Delta x \quad (2.53)$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y$$



**Kuva 2.26:** Bilineaarinen interpolointi tasavälisessä hilassa. Pisteiden 1, 2, 3, ja 4 avulla lasketaan muunnos pisteessä  $(x_p, y_p)$ .

missä

$$\Delta x = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i y^j \quad (2.54)$$

$$\Delta y = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n b_{ij} x^i y^j.$$

Polynomimuunnoksen ongelma on sen epästabiilisuus. Sitä ei saa koskaan käyttää muunnoksen määrittävän pisteistön ulkopuolella, sillä virheet kasvavat erittäin nopeasti, erityisesti jos asteluku  $n$  on korkea. Joskus tämä tapahtuu jopa alueen sisälläkin, jos pisteistö on jakautunut epätasaisesti. Toisaalta monissa sovelluksissa matala-asteinen ( $n = 2$  tai  $3$ ) polynomipinta on sopiva ja helppo vaihtoehto.

Joskus saattaa olla yksinkertaisinta muodostaa muunnoksesta tasavälinen hila, josta koordinaattierot pisteeseen  $p$  saadaan yksinkertaisesti *bilineaarilla interpoloinnilla*, joka tasossa on muotoa

$$\begin{aligned} \Delta x_p &= (1-x) \cdot (1-y) \cdot \Delta x_3 + (1-x) \cdot y \cdot \Delta x_4 \\ &\quad + x \cdot (1-y) \cdot \Delta x_2 + x \cdot y \cdot \Delta x_1 \\ \Delta y_p &= (1-x) \cdot (1-y) \cdot \Delta y_3 + (1-x) \cdot y \cdot \Delta y_4 \\ &\quad + x \cdot (1-y) \cdot \Delta y_2 + x \cdot y \cdot \Delta y_1. \end{aligned} \quad (2.55)$$

---

*interpolointi*

---

Menetelmä ”piilottaa” itse muunnoksen, joten se soveltuu minkä tahansa muunnoksen esittämiseen standardimuodossa. Itse interpolointimenetelmä on nopea suurillekin aineistoille ja tarkkuutta voidaan kontrolloida hilan tiheydellä.

#### 2.4.4 ITRF-koordinaatistojen väliset muunnokset

ITRF-koordinaatit ovat ajasta riippuvia. ITRF-ratkaisuissa annetut arvot päte-

vät koordinaatiston standardiepookille, esim. *ITRF2000:n* standardiepookki on 1997.0, ts. laattaliikkeet on ilmoitettu tuon ajanhetken mukaisina. Kun koordinaatteja tarvitaan havaintohetken  $t$  epookkiin, on ne laskettava käyttäen pisteelle annettuja nopeusvektorin arvoja:

$$x_i(t) = x_{i,0} + v_{i,0}(t - t_0) + \sum_i \Delta X_i(t). \quad (2.56)$$

Tässä  $x_{i,0}$  on koordinaatin  $x_i$  arvo epookin hetkellä  $t_0$ ,  $v_{i,0}$  sen muutosnopeus ja

**Taulukko 2.10:** *Helmert-muunnoksen* parametrit ITRF2000:n ja vanhempien ITRF-koordinaatistojen välillä. Epookki tarkoittaa ajanhetkeä, jolle muunnosparametrit on laskettu. Kunkin parametrin alla on sen muutosnopeus vuodessa. ppb = *parts per billion*,  $10^{-9}$ ; mas = millikaarisekunti, 0.001". (IERS Technical note 32)

	$\Delta x$ (cm)	$\Delta y$ (cm)	$\Delta z$ (cm)	$m$ (ppb)	$e_x$ (mas)	$e_y$ (mas)	$e_z$ (mas)	Epookki
ITRF97	0.67 0.00	0.61 -0.06	-1.85 -0.14	1.55 0.01	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.02	1997.0
ITRF96	0.67 0.00	0.61 -0.06	-1.85 -0.14	1.55 0.01	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.02	1997.0
ITRF94	0.67 0.00	0.61 -0.06	-1.85 -0.14	1.55 0.01	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.02	1997.0
ITRF93	1.27 -0.29	0.65 -0.02	-2.09 -0.06	1.95 0.01	-0.39 -0.11	0.80 -0.19	-1.14 0.07	1988.0
ITRF92	1.47 0.00	1.35 -0.06	-1.39 -0.14	0.75 0.01	0.0 0.00	0.0 0.00	-0.18 0.02	1988.0
ITRF91	2.67 0.00	2.75 -0.06	-1.99 -0.14	2.15 0.01	0.0 0.00	0.0 0.00	-0.18 0.02	1988.0
ITRF90	2.47 0.00	2.35 -0.06	-3.59 -0.14	2.45 0.01	0.0 0.00	0.0 0.00	-0.18 0.02	1988.0
ITRF89	2.97 0.00	4.75 -0.06	-7.39 -0.14	5.85 0.01	0.0 0.00	0.0 0.00	-0.18 0.02	1988.0

$\sum_i \Delta X_i(t)$ :t muita ajasta riippuvia muutoksia. Ellei havaintoasemien nopeusvektoreita tunneta, ne voidaan laskea esimerkiksi globaalia laattaliikemallia NNR-NUVEL-1A käyttäen. NUVEL-malli ei ota huomioon esim. maannousua tai laattojen reunoilla esiintyviä deformaatioita. Globaalisti ITRF2000:n mukaiset liikkeet ovat 1 mm/v samat kuin NUVEL-mallin antamat, mutta paikallisesti erot saattavat olla jopa 3 mm/v (McCarthy and Petit, 2004)

Koordinaattien siirtäminen ITRF-koordinaatistosta toiseen tehdään yleensä Helmert-muunnoksen (2.44) avulla. Taulukossa 2.10 ovat muunnosparametrit ITRF2000:n ja vanhempien ITRF-koordinaatistojen välillä. Kiertokulmat on annettu kaavan (2.46) mukaisina. Ennen muunnosta koordinaatit on siirrettävä taulukossa annettuun standardiepookkiin.

Uusimmat WGS84-realisaatiot (versiot G730 tai G873) ovat yhteneviä ITRF:n kanssa desimetritarkkuudella. Niiden välillä ei ole olemassa mitään virallisia muunnoskaavoja, vaan ne voidaan katsoa samoiksi ITRF:n kanssa. Kääntäen: ITRF-koordinaatit esittävät WGS84-koordinaatteja desimetritarkkuudella, eikä WGS84:lle ole tätä parempaa realisaatiota.

---

*ITRF ja  
WGS84*

---

GLONASSin käyttämän *PZ-90:n* ja ITRF96:n välisen yhdenmuotoisuusmuunnoksen parametrit ovat taulukossa 2.11. Parametrien epävarmuus on kuitenkin varsin suuri, koska muunnoksen määrittäviä yhteisiä pisteitä on hyvin vähän; ks. luku 2.3.5. (Habrich, 1999).

**Taulukko 2.11:** Helmert-muunnoksen parametrit GLONASSin käyttämästä PZ-90:stä ITRF96:een. Kiertokulmat ovat kaavan (2.45) mukaisia. Kunkin parametrin alla on sen keskivirhe. (Habrich, 1999)

$\Delta x$ (m)	$\Delta y$ (m)	$\Delta z$ (m)	$m$ (ppb)	$e_x$ (mas)	$e_y$ (mas)	$e_z$ (mas)
0.06	0.07	-0.57	10	35	-21	-358
$\pm 0.38$	$\pm 0.32$	$\pm 0.62$	$\pm 6$	$\pm 9$	$\pm 16$	$\pm 29$

### Esimerkki 2.9 Metsähovin ITRF-koordinaatit

Metsähovin  $X, Y, Z$ -koordinaatit ja koordinaattien muutosnopeudet [m/v] ITRF2000:ssa epookkina 1997.0 ovat

$$\begin{bmatrix} X = 2892570.923 & \Delta X = -.0160 \\ Y = 1311843.330 & \Delta Y = .0149 \\ Z = 5512634.057 & \Delta Z = .0088 \end{bmatrix}$$

Laske Metsähovin ITRF2000-koordinaatit epookkina 2005.0.

Koska GPS-havaintoihin perustuvat muutosnopeudet on annettu ITRF-luettelossa, riittää yksinkertaisesti laskea paljonko ne vaikuttavat koordinaatteihin 8.5 vuodessa. Saamme

$$\begin{bmatrix} X = 2892570.787 \\ Y = 1311843.457 \\ Z = 5512634.132 \end{bmatrix}$$

### 2.4.5 EUREF-FIN:n ja KKJ:n väliset muunnokset

ETRF89-koordinaatiston ja kartastokoordinaattijärjestelmän (KKJ) välinen yhteys on johdettu 90 vastinpisteen avulla. Niiden ETRF89-koordinaatit saatiin EUREF-FIN-realisaation tuloksista (Ollikainen *et al.*, 2000) ja KKJ-koordinaatit Maanmittauslaitoksen pisterekisteristä. Koordinaattimuunnos ratkaistiin yhdenmuotoismuunnoksella (kaavat (2.44) ja (2.45) sekä taulukko 2.12).

Muunnos antaa tulokseksi koordinaatteja, joiden poikkeamat mitatuista koordinaateista ovat maan raja-alueilla jopa yli 2 m suuruisia (ks. kuva 2.27). Tästä syystä muunnettuja koordinaatteja ei tule käyttää muuhun tarkoitukseen kuin likiarvoiksi pisteille, joille metrin kertaluokkaa oleva tarkkuus on riittävä.

Vaikka jäännösvirheet ovat metriluokkaa, eivät lähekkäisten pisteiden jäännösvirheet poikkea toisistaan. Lähekkäisten pisteiden *koordinaattierot* eivät siis muutu muunnoksen seurauksena.

Moniin käytännön tarpeisiin halutaan pienempiä jäännösvirheitä kuin mitä yhdenmuotoisuusmuunnos antaa. Tätä varten on laadittu kuvassa 2.28 oleva affiinen muunnos, jossa tasolle projisioidun EUREF-FIN-koordinaatiston ja KKJ:n välille johdettiin muunnoskertoimet 624:n pisteen avulla. Menetelmä, muunnospisteistö ja muunnosparametrit on kuvattu Julkisen hallinnon suosituksessa 154.

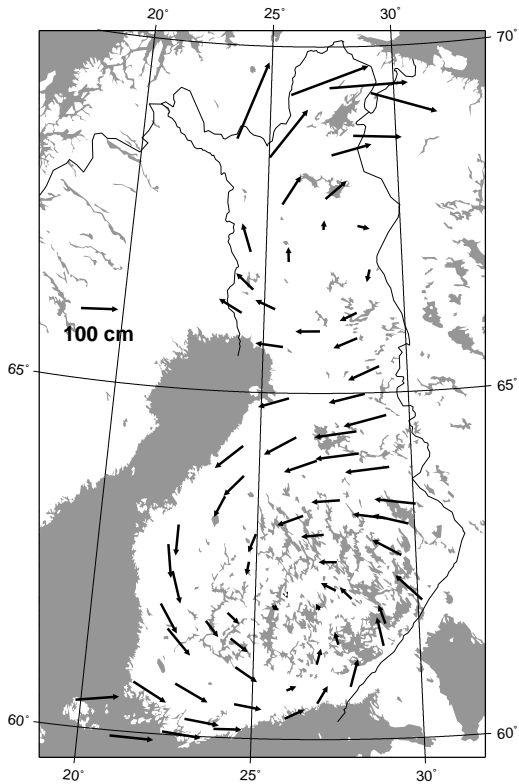
Koska kolmioittain tehtävä affiinen muunnos ei sisällä ylimääritystä, on pisteiden koordinaateissa olevien karkeiden virheiden varalta koko verkko laskettu läpi niin, että kukin piste vuorollaan on jätetty pois muunnoksesta, ja ratkaistu

---

JHS153

JHS154





**Kuva 2.27:** KKJ:n ja EUREF-FIN:n välisen yhdenmuotoisuusmuunnoksen jäännösvirheet. (Julkisen hallinnon suositus 153 / Matti Ollikainen, Geodeettinen laitos.)

**Taulukko 2.12:** Suomen ETRF89-koordinaatiston ja KKJ-koordinaatiston välisen yhdenmuotoisuusmuunnoksen (kaavat (2.44) ja (2.45)) muunnoskerroimet. (Julkisen hallinnon suositus 153)

	ETRF89 → KKJ	KKJ → ETRF89	Keskivirhe	Yksikkö
$\Delta x$	96.0610	-96.0617	1.614	m
$\Delta y$	82.4298	-82.4278	3.111	m
$\Delta z$	121.7485	-121.7535	1.141	m
$e_x$	4.80109	-4.80107	0.093	kaarisek.
$e_y$	0.34546	-0.34543	0.049	kaarisek.
$e_z$	-1.37645	1.37646	0.056	kaarisek.
$m$	-1.49651	1.49640	0.176	ppm

sen koordinaatit muiden pisteiden avulla. Tällä tavalla löydetään pisteiden arvois-  
sa olevat karkeat virheet, koska ylimäärityksen puuttuessa itse muunnos ei anna  
mitään indikaatiota mahdollisesta virheestä.

Kolmioittain tehdyn affinisen muunnoksen tuloksena koko maan alueella  
jäännösvirheet ovat alle desimetrin (kuva 2.28). Näin JHS154:ssä esitetty muun-  
nos sopii KKJ:n ja EUREF-FIN välisen muunnoksen laskemiseen myös kaikissa  
sellaisissa sovelluksissa, joissa jäännösvirheiden halutaan olevan alle metrin. Ha-  
luttu piste muunnetaan koordinaatistosta toiseen määrittämällä aluksi kolmio, jon-  
ka sisälle piste kuuluu. Tämän jälkeen käytetään tälle kolmiolle laskettuja muun-  
noskertoimia, jotka sijoitetaan kaavaan (2.52). Tarvittavat ohjelmat on saatavissa  
Maanmittauslaitoksesta tai Geodeettisesta laitoksesta.

---

*muunnosten  
käyttö*

---

Muunnoksella ei voi koskaan korvata mittaamalla saatavaa koordinaattiarvoa,  
eikä muunnosta saa käyttää tilanteissa, joissa luodaan esimerkiksi lähtöpisteitä  
tihennysmittauksiin. Tietokannoissa on syytä säilyttää paitsi alkuperäiset arvot,  
myös tieto siitä, ovatko uudet koordinaatit saatu muunnoksella vai mittauksella.

#### 2.4.6 Koordinaatiston vaikutus GNSS-mittausten virheisiin

*Suhteellisissa mittauksissa* täytyy olla vähintään yksi piste jonka koordinaatit tun-  
netaan. Täydellisen kontrollin saamiseksi pisteitä olisi kuitenkin hyvä olla vähin-  
tään kolme, ja kunnollisen virhearvion saamiseksi huomattavasti tätäkin enem-  
män. Geometrian tulisi olla samanlainen kuin perinteisessä takymetrein tehtäväs-  
sä tihennysmittauksessakin, ts. tunnettujen pisteiden sijaita mitattavan alueen ym-  
päriällä. Lähtöpisteiden koordinaattien on oltava samassa koordinaatistossa kuin  
missä satelliittien rataelementit on annettu. Ellei näin ole, on suoritettava *koordi-  
naattimuunnos*, kuten edellisissä luvuissa kerrottiin.

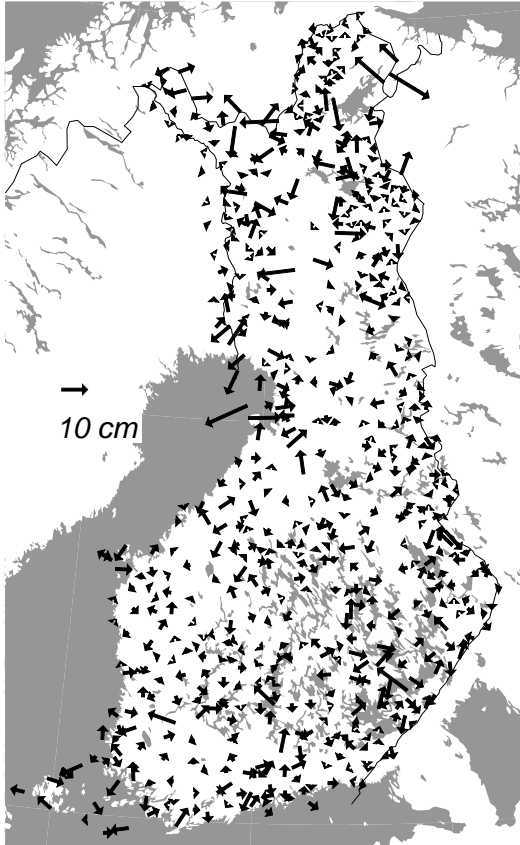
---

*lähtöpisteet*

---

Käytännön töitä varten joudumme yleensä tekemään joukon koordinaatti-  
muunnoksia päästäksemme GNSS:n avulla mitatusta järjestelmästä johonkin pai-  
kalliseen koordinaatistoon tai saadaksemme lähtöpisteiden koordinaatit paikallisesta  
globaaliin koordinaatistoon. Tarkkuusvaatimuksesta ja mitattavan verkon koos-  
ta riippuu kuinka paljon töitä joudumme muunnosten kanssa tekemään, sillä vää-  
rän koordinaatiston käyttö aiheuttaa lopputuloksiin virheen, joka pahimmassa ta-  
pauksessa voi olla hyvinkin merkittävä.

Väärin valitusta koordinaatistosta aiheutuva virhe voi olla ylivoimaisesti suu-  
rin yksittäinen virhelähde. Jos lähtöpisteitä on vain yksi, ei virhe välttämättä tule  
esiin edes tasoituslaskennan yhteydessä. Useamman kiinteänä pidettävän lähtöpis-  
teen tapauksessa virhe tasoittuu verkon pisteille verkon geometrian määräämällä  
tavalla.



**Kuva 2.28:** KKJ:n ja EUREF-FIN:n välisen kolmioittain tehdyn affiinisen muunnoksen jäännösvirheet. Muunnospisteistö käsittää yhteensä 624 sekä kartastokoordinaattijärjestelmässä että ETRS-GK27 -koordinaatistossa tunnettua yhteistä pistettä. (Julkisen hallinnon suositus 154 / Matti Ollikainen, Geodeettinen laitos.)

Mittausverkon laajuudesta ja sen sisältämistä pisteistä riippuu, mitä lähtöpisteistön valinnassa ja laskennassa on otettava huomioon. Käytännössä eteen tulevat useimmiten seuraavantyyppiset tapaukset:

- 1 Paikallinen mittaus, jossa tunnetut pisteet ovat KKJ:ssä.
- 2 Alueellinen mittaus, jossa mukana EUREF-FIN-koordinaatiston pisteitä.
- 3 Valtakunnan laajuinen tai laajempi mittaus, jossa on mukana IGS-verkon pisteitä, joiden koordinaatit ovat ITRF-nn:ssä.

---

*mittausverkon  
laajuus*

---

Paikallisissa mittauksissa riittää usein lähtökoordinaatin saamiseksi laskentakoordinaatistoon muunnoksen katsominen esim. kuvan 2.22 tapaisesta kartasta tai sen laskeminen yksinkertaisesta polynomikaavasta. Useimmissa tapauksissa, jos lähtöpiste on esim. KKJ:ssä, riittää laskentaa varten suhteellisen karkea (0.1'') muunnos EUREF-FIN-koordinaatistoon. Tärkeintä on, että laskennan jälkeen muunnos

### Laatikko 2.5 ED50:n ja KKJ:n välinen muunnos

Vaikka ED50 ja KKJ ovat vähitellen poistuvia järjestelmiä, on niiden mukaisia koordinaatteja kuitenkin runsaasti käytössä. KKJ:n määrittelystä johtuu, että muunnos on monimutkaisempi kuin pelkkä ED50:n projisiointi tasolle.

Aluksi projisoidaan maantieteelliset ED50-koordinaatit tasolle *Gauss-Krüger -projektiota* käyttäen. ED50:n ja KKJ:n välisessä muunnoksessa ellipsoidina on käytettävä *Kansainvälistä (1924) ellipsoidia*. Tasolle projisioituista ED50-koordinaateista pääsemme KKJ:ään tekemällä *Helmert-muunnoksen* tasossa:

$$\begin{pmatrix} x_{KKJ} \\ y_{KKJ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{ED50} \\ y_{ED50} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}, \quad (2.57)$$

missä muunnosparametrit ovat (Ollikainen 1993):

$$a = 1.00000075150$$

$$b = -0.00000439333$$

$$\Delta x = -61.5805$$

$$\Delta y = 95.6691.$$

Käänteisen muunnoksen KKJ  $\rightarrow$  ED50 kertoimet ovat

$$a = 0.99999924848$$

$$b = -0.00000439332$$

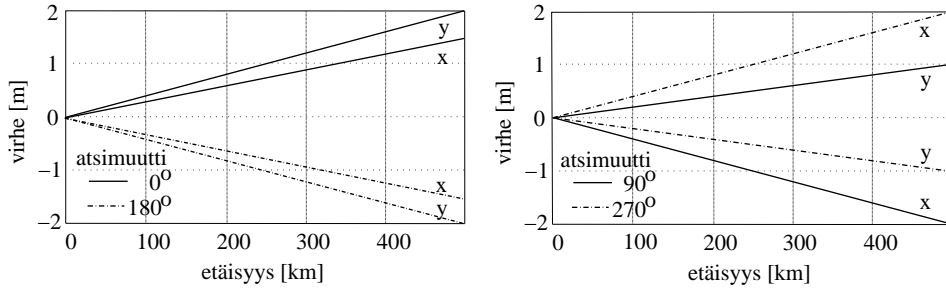
$$\Delta x = 61.5800$$

$$\Delta y = -95.6693.$$

Muunnoksen siirtoparametrit takaavat millimetritarkkuuden koko valtakunnan alueella. Juuri tämä tasossa tehtävä Helmert-muunnos on se ”epästandardi” asia, joka varsinkin GPS:n alkuvuosina tuntui tuottavan vaikeuksia monille kaupallisille ohjelmille. Sen pois jättäminen johtaa virheeseen, jonka suuruusluokka on sama kuin kuvassa 2.22. Uudemmat GPS-vastaanottimet ja -ohjelmistot osaavat muunnoksen ongelmitta.

takaisinpäin tehdään samoja parametreja käyttäen. Sen sijaan, jos lähtöpisteet ovat alunperin esim. EUREF-FIN-koordinaatistossa, mutta haluamme laskun lopputuloksen KKJ:ään, on muunnoksen tarkkuuteen kiinnitettävä huomiota.

Joskus tällaisissa mittauksissa lähtökoordinaatin arvoksi otetaan sellaisenaan pisteen KKJ-koordinaatit. GNSS-mittauksen antama vektori lisätään sitten suoraan tähän. Saadun uuden pisteen koordinaatit eivät kuitenkaan ole enää lähtöpisteen määrittävässä järjestelmässä ja tehty virhe voi olla hämmästyttävän suuri. Jo muutaman kilometrin vektoreilla virhettä saattaa kertyä senttimetrejä ja pitemmillä matkoilla desimetrejä (kuva 2.29). Virhe ei välttämättä poistu edes jälkikäteen



**Kuva 2.29:** KKJ:n käyttäminen lähtökoordinaatteina aiheuttaa suunnasta ja etäisyydestä riippuvan virheen.  $x$ :t kuvaavat  $x$ -koordinaattiin tulevaa virhettä,  $y$ :t  $y$ -koordinaatin virhettä (skaala metreinä). Vaaka-akselilla on pisteiden välinen etäisyys kilometreinä. Atsimuutti tarkoittaa pisteiden välisen vektorin atsimuuttia. (Ollikainen 1993)

tehtävässä tasoituksessa, sillä se voi riippua atsimuutista. Siksi KKJ:ää (tai mitään muitakaan paikallisia koordinaatistoja) ei pidä käyttää GNSS-mittausten lakenta-koordinaatistona.

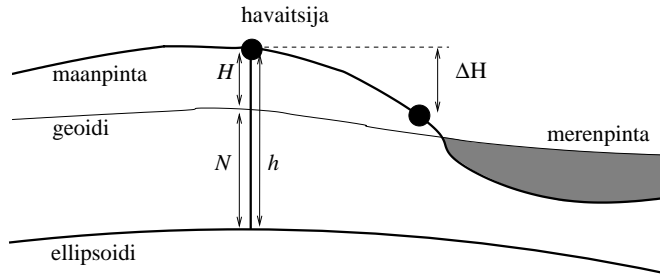
Valtakunnan tai maanosan laajuisessa mittauksessa, kun tarkkuusvaatimus on  $10^{-7}$  tai parempi, on lähtöpisteiden koordinaatit muunnettava ensin havaintohetken epookkiin ottamalla huomioon *mannerlaattojen liike* ja mahdollinen *maanousu*. Tämän jälkeen siirrytään laskuissa käytettävään ITRF-koordinaatistoon ja laskujen jälkeen tehdään koko ruljanssi vielä toiseen suuntaan, jotta päästään takaisin lähtöpisteiden koordinaatistoon.

## 2.5 GNSS ja korkeus

Satelliittimittauksista saadaan havaitsijan kolmiulotteiset  $x$ ,  $y$ ,  $z$ -koordinaatit. Nämä voidaan muuttaa maantieteellisiksi koordinaateiksi esim. kaavoilla (2.35)–(2.38). Kaava (2.36) antaa korkeuden  $h$  vertausellipsoidista (kuva 2.30). *Korkeus ellipsoidista*,  $h$ , on siis puhtaasti geometrinen suure.

*Vaaitus* puolestaan perustuu *geopotentialierojen* mittaamiseen. Vapaa nestepinta asettuu geopotentialipinnan mukaisesti ja virtaa aina korkeammasta potentiaalista alempaan (”alamäkeen”). Vanhemmissa vaaituskoneissa vesivaaka ja nykyisissä digitaalivaaituskoneissa elektroniset tasaimet asettuvat *geopotentialin* suuntaisesti.

Kun vaaitsija siirtyy pisteestä A pisteeseen B (kuva 2.31), on geopotentiali muuttunut määrällä  $\Delta W$  ja korkeusero on  $\Delta W/\bar{g}$ , missä  $\bar{g}$  on keskimääräinen



**Kuva 2.30:** Perinteisellä vaaituksella saadaan korkeuseroja  $\Delta H$ , jossa vertauspintana on geopotentialin tasa-arvopinta, *geoidi*. GNSS:llä sen sijaan saadaan korkeuksia  $h$  vertausellipsoidista. Jotta ellipsoidista mitatut korkeudet voidaan muuttaa korkeuksiksi geoidista, on *geoidinkorkeus*  $N$  tunnettava mittauspisteessä.

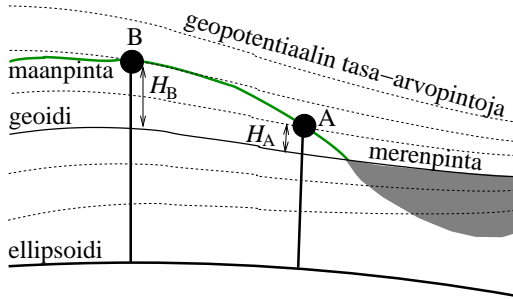
painovoima. Maan painovoimakentän potentiaali (yksikkö  $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$ ) annetaan joskus *geopotentialiyksikkönä* (gpu),  $1 \text{ gpu} = 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ . Potentiaalın arvo geoidilla on  $W_0 = (62\,636\,856.13 \pm 0.5) \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} = 62\,636\,85.6 \text{ gpu}$ .

Alemman luokan vaaituksissa ei yleensä käytetä geopotentialilukuja, vaan suoraan vaaituslattojen lukemista saatavia metrisiä korkeuseroja. Kun mitattavat matkat ovat lyhyitä, muutamasta muutamaan kymmeneen kilometriin, syntyvä virhe on pienempi kuin muut vaaituksen virheet. *Tarkkavaaituksessa* lattalukemista saadut metriset korkeuserot muutetaan geopotentialieroiksi kertomalla ne välin keskimääräisellä painovoimalla  $\bar{g}$ . Tasoitukset tehdään geopotentialiluvuilta, ja lopuksi suoritetaan reduktio takaisin metrisiin yksiköihin.

Painovoimareduktiosta riippuen vaaituksin määritettyjä korkeuksia on kahta eri päätyyppiä: *ortometrisiä* ja *normaalikorkeuksia*. Korkeuksien määritelmistä kerrotaan tarkemmin laatikossa 2.6. Yleistäen voi sanoa, että GNSS:llä määritetty korkeus  $h$  on geometrinen suure, jolla ei ole fyysikaalista merkitystä. Vaaituksella määritetty geopotentialiero  $\Delta W$  puolestaan on fyysikaalinen suure, jolla ei ole geometrista merkitystä. Geometrinen merkitys saadaan kun geopotentialiluku muutetaan metriseksi suureeksi  $H$ .

Kuvasta 2.33 korkeuskäsitteiden ero käy selvästi esille. Esimerkiksi Haminassa geoidi on n. kolme metriä lähempänä ellipsoidia kuin Helsingissä<sup>1</sup>. Jos kor-

<sup>1</sup>Itäisellä Suomenlahdella ja etelärannikolla oleva geoidikuoppa johtuu Viipurinlahden rapakivialueesta. Rapakivigraniitin tiheys on alhaisempi kuin ympäröivän kallion. Niinpä tämän alhaisemman tiheyden kohdalla meidän täytyy mennä lähemmäs Maan keskipistettä, jotta olisimme samassa potentiaalissa kuin ympäröivällä alueella. Globaalissa skaalassa (ks. kuva 2.32) vaihtelut ovat paljon suurempia, noin  $\pm 100 \text{ m}$ . Globaalit vaihtelut heijastavat *litosfäärin* alapuolisen *vaipan* tiheysvaihteluita.



**Kuva 2.31:** Pisteiden A ja B ortometrinen korkeus on  $\Delta H = H_B - H_A$ , mutta geopotentialien ero  $\Delta W = W_B - W_A$ , missä  $W_A$  ja  $W_B$  ovat geopotentialin arvot pisteissä A ja B.

keusero mitattaisiin pelkästään GNSS:llä, saisimme tulokseksi, että Haminassa merenpinta on kolme metriä alempana kuin Helsingissä. Suomenlahden veden mielestä näin ei ilmiselvästikään ole.

### 2.5.1 Geoidi ja geoidimallit

Jotta GNSS:llä ja vaaituksella mitatut korkeudet saadaan yhteismitallisiksi, tarvitaan *geoidi* ja *geoidinkorkeus*, joiden avulla nämä kaksi eri korkeutta voidaan muuntaa toisikseen. Geoidiksi kutsutaan sitä Maan painovoiman potentiaalinen tasa-arvopintaa, joka parhaiten approksimoi valtamerten keskivedenpintaa. Mannerten kohdalla kuvitteellinen merenpinta voidaan laskea painovoimahavainnoista. Geoidia ei voida esittää millään yksinkertaisella matemaattisella pinnalla ja sen muoto heijastelee Maan sisäistä tiheysjakautumaa. *Geoidinkorkeus*  $N$  mitataan vertausellipsoidin pinnasta ja se on positiivinen ellipsoidin yläpuolella ja negatiivinen sen alapuolella.

GNSS-havainnoista saatava korkeus  $h$  muunnetaan ortometriseksi korkeudeksi  $H$  (tai normaalikorkeudeksi  $H^*$ , laatikko 2.6) yksinkertaisella vähennyslaskulla (ks. kuva 2.30)

$$H = h - N. \quad (2.58)$$

Geoidimallista ja sen tarkkuudesta riippuu, kuinka tarkka muunnos (2.58) on.

Geoidia kuvataan geoidimalleilla, joiden tarkkuudet saattavat olla hyvinkin erilaisia. *Globaalit geoidimallit* annetaan yleensä sarjakehitelminä, joilla voidaan parhaimmillaan esittää n. 100 km suuruisia yksityiskohtia (ks. laatikko 2.4, s. 75). Sarjakehitelmä on tavallisimmin muotoa

$$N(\varphi, \lambda) = R \sum_{\ell=2}^{\ell_{\max}} \sum_{m=0}^{\ell} \bar{P}_{\ell m}(\sin \varphi) [\bar{C}_{\ell m} \cos m\lambda + \bar{S}_{\ell m} \sin m\lambda], \quad (2.59)$$

### Laatikko 2.6 Vaaitus ja korkeuden määritelmät

Kuvassa 2.31 pisteiden A ja B välinen vaaituksella määritetty geopotentialiero on  $\Delta W = W_B - W_A$ . Jakamalla potentiaaliero (yksikkö  $[\text{m}^2/\text{s}^2]$ ) putoamiskiihtyvyydellä  $g$  (yksikkö  $[\text{m}/\text{s}^2]$ ), saadaan korkeusero metreinä. Potentiaalilin tasa-arvopinnat eivät kuitenkaan ole yhdensuuntaiset (kuvassa huomattavasti liioiteltu), joten keskimääräisellä  $g$ :llä ( $\approx 9.81 \text{ m/s}^2$ ) jakaminen ei anna oikeaa metrissä korkeuseroa. Geopotentialierojen muuttaminen metrisiksi voi tapahtua eri tavoin; näin päädyimme *ortometrisiin* ja *normaalikorkeuksiin*.

Määritellään pisteen A *geopotentialiluku*  $C = W_0 - W_A$ , missä  $W_0$  on referenssipinnaksi valitun geopotentialin arvo. Tätä pintaa kutsutaan *geoidiksi*, ja se on valittu niin, että se likimain yhtyy vapaaseen valtameren pintaan. Jos pisteen A ja geoidin välillä (pitkin luotiviivaa mitattu) keskimääräinen putoamiskiihtyvyys on  $\bar{g}$ , saamme A:n *ortometriseksi korkeudeksi*  $H_A = C/\bar{g}$ .  $\bar{g}$ :n laskemiseksi on tunnettava painovoima pisteessä A sekä A:n ja geoidin välinen tiheys ja A:n korkeuden likiarvo. Todellista tiheysjakautumaa ei useinkaan tunneta, jolloin se joudutaan arvioimaan tai käyttämään keskimääräistä tiheyttä. Tästä ei kuitenkaan aiheudu suurta virhettä. Ortometrinen korkeus vastaa parhaiten intuitiota ”korkeus merenpinnasta”.

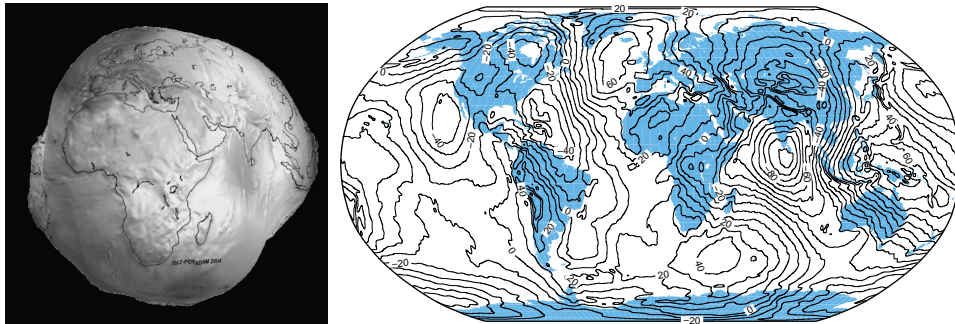
*Normaalikorkeus* määritellään  $H_A^* = C/\bar{\gamma}$ , missä  $\bar{\gamma}$  on pisteen A ja geoidin välillä laskettu keskimääräinen *normaalipainovoima*. Normaalipainovoiman laskemiseksi ei todellista painovoimaa tai tiheysjakautumaa tarvitse tuntea, vaan se lasketaan vertausellipsoidin teoreettisen painovoiman avulla. Normaalikorkeus poikkeaa hieman ortometrisestä korkeudesta, eikä se kuvaa tarkasti ”korkeutta merenpinnasta”. Normaalikorkeudella ei ole samanlaista fysikaalista tulkintaa kuin ortometrisellä korkeudella.

Geoidilla ortometrinen ja normaalikorkeus ovat samoja, mutta geoidin yläpuolella ne eroavat verrannollisena korkeuteen  $H$ ,

$$H - H^* = \frac{\bar{\gamma} - \bar{g}}{\bar{g}} H^*.$$

Korkeuksien tarkat arvot voi laskea suoraan määritelmistä jos geopotentialiluvut ovat käytettävissä. Ellei geopotentialilukuja ole saatavissa, voi eron arvioida kaavalla  $H^* - H = (\Delta g_B / 982000 [\text{mgal}]) H$ , jossa  $\Delta g_B$  on painovoima-anomalia (Bouguer-anomalia) mittauspisteessä. Suomessa ero on aina pieni, mutta vuoristossa ero voi olla jo merkittävä, suuruusluokkaa 10 cm/km. (Kaavojen johto ja määritelmät, ks. Heiskanen ja Moritz, 1967.)





**Kuva 2.32:** Globaali geoidimalli EIGEN-CG01C, joka on laskettu CHAMP- ja GRACE-satelliittien painovoimahavainnoista. Vasemmanpuoleisessa kuvassa geoidin korkeussuhteita on huomattavasti liioiteltu. Oikealla sama korkeuskäyrin esitettyä. Geoidinkorkeudet  $N$  ovat GRS80-ellipsoidista. Kuva ja datat GFZ, Potsdam.

missä  $R$  on Maan säde,  $\bar{P}_{\ell m}(\sin \varphi)$  on Legendren funktio,  $\varphi$  leveysaste,  $\lambda$  pituusaste sekä  $\bar{C}_{\ell m}$  ja  $\bar{S}_{\ell m}$  mallin määrittävät kertoimet. Kertoimia voi olla melkoinen määrä. Jos mallin erotuskyky on  $1^\circ \times 1^\circ$  (n.  $110 \text{ km} \times 110 \text{ km}$ ), on maksimiasteluku  $\ell_{\max} = 360$ . Kertoimia on tällöin yli 250 000.

Globaaleita geoidimalleja ovat esim. OSU91A (vanhentunut), EGM96 tai EIGEN (CHAMP ja GRACE-satelliittien havaintojen avulla luotu, kuva 2.32). Uudet globaalit mallit lasketaan pääasiassa satelliittien tuottaman aineiston perusteella. Globaalit geoidimallit löytyvät mm. ICGEM-palvelun sivuilta (<http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/ICGEM.html>, International Centre for Global Earth Models).

---

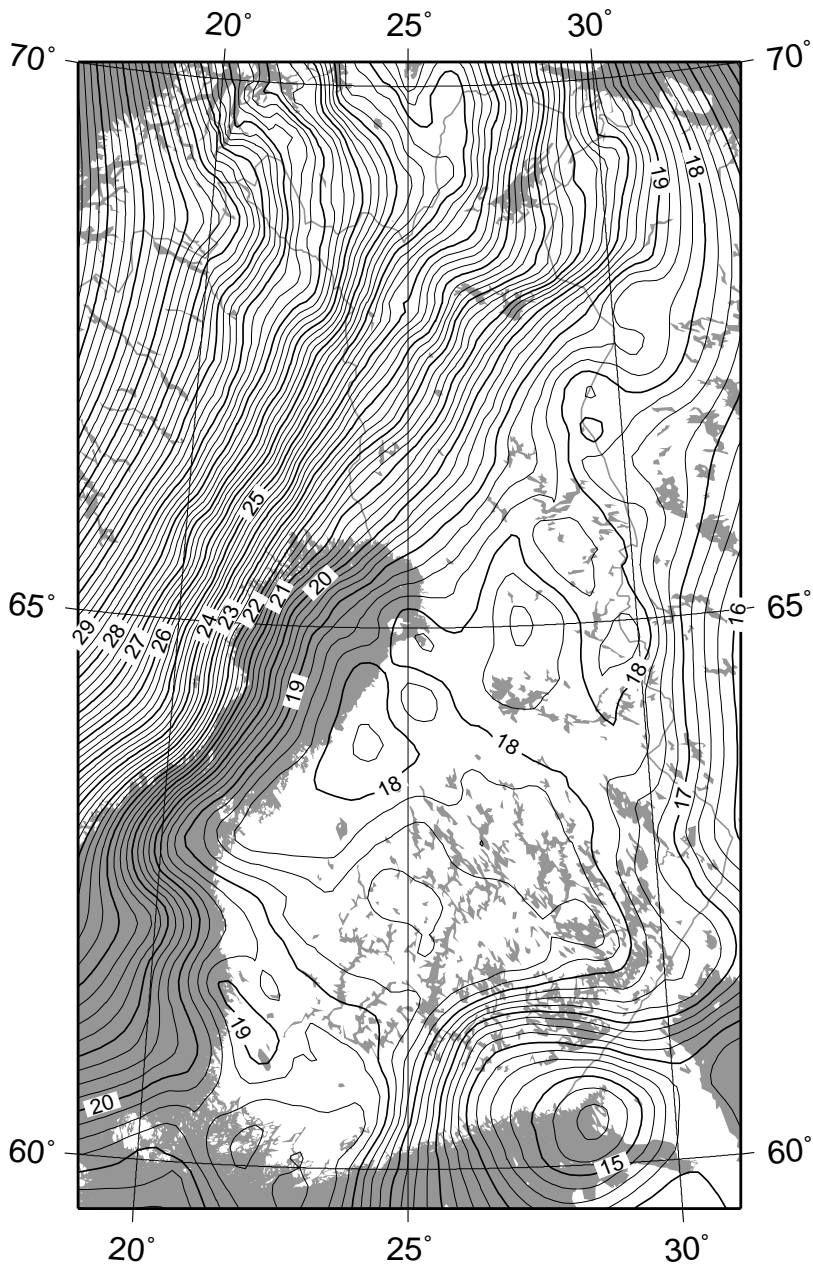
*geoidimallit*

---

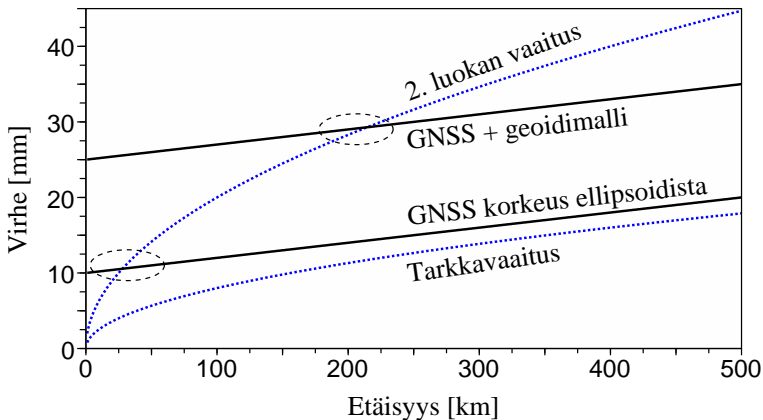
Alueellisiin geoidimalleihin sarjakehitelmän muotoinen esitystapa ei sovellu ja siksi alueelliset mallit annetaan usein tasavälisenä hilapisteistönä. Hilaa tihentämällä voidaan kuvata hyvinkin pieniä yksityiskohtia ja geoidinkorkeus saadaan helposti interpoloitua haluttuun pisteeseen esimerkiksi kaavan (2.55) avulla.

Alueellisiin geoidimalleihin käytetään lisäksi maan pinnalla tehtyjä painovoimahavaintoja, vaikka taustalla onkin jokin globaali malli. Esimerkkinä alueellisesta geoidimallista on *NKG2004* (tai vanhempi versio *NKG96*), joka käsittää Pohjoismaat, Baltian maat, sekä Pohjois-Puolan ja Pohjois-Saksan. Mallissa on mukana mm. Suomen 35 000 painovoimapistettä.

Uusien globaalien geoidimallien virheet ovat alle puolen metrin, mutta saattaa kilometriä pienempiä yksityiskohtia ne eivät pysty kuvaamaan. Alueelliset mallit ovat tarkempia, koska niissä on käytetty paikallista painovoimadataa huo-



**Kuva 2.33:** FIN2000-geoidimalli. Geoidinkorkeudet  $N$  ovat metreinä GRS80-ellipsoidista. FIN2000-mallia käyttäen GNSS:llä mitatut korkeudet ellipsoidista voidaan muuntaa suoraan Suomen N60-korkeusjärjestelmään. (Ollikainen, 2002)



**Kuva 2.34:** Vaaituksen ja GNSS-korkeudenmäärityksen muodolliset virheet. Tarkkavaaituksen virheeksi on oletettu  $0.8 \text{ mm}/\sqrt{\text{km}}$ , 2. luokan vaaitukselle  $2 \text{ mm}/\sqrt{\text{km}}$  ja GNSS-korkeudenmääritykselle  $10 \text{ mm} + 0.02 \text{ ppm}$ . Kun GNSS-mittauksista halutaan päästä ortometriseen korkeuteen, tulee mukaan myös geoidimallin virhe. Tässä GNSS-mittauksen ja geoidimallin yhteisvirheeksi on oletettu  $25 \text{ mm}$ . Ellipsit osoittavat, millä etäisyydellä GNSS-korkeusmäärityksen tarkkuus ylittää 2. luokan vaaituksen tarkkuuden. Todellisuudessa GNSS:llä päästään lähemmäisten pisteiden välisiä korkeuseroja mittaamalla tässä esitettyä parempaan tarkkuuteen.

mattavasti enemmän. Tarkkuus on parhaimmillaan muutamia senttimetrejä (esim. NKG2004). Myös globaalien mallien odotetaan tarkentuvan muutama senttimetriin GRACE- ja erityisesti GOCE-satelliitin havaintojen avulla. GRACE-satelliittipari on kiertänyt Maata vuodesta 2004 lähtien ja GOCE on suunniteltu laukaistavaksi v. 2006.

Alueellisista geoidimalleista voidaan tehdä myös sovitettuja versioita. Tällainen on esim. *FIN2000* (kuva 2.33), joka on sovitettu Suomen N60-korkeusjärjestelmään. Sovitus on tehty kallistamalla ja siirtämällä pystysuunnassa NKG96-geoidimallia 156 GPS:llä mitatun vaaituspisteen avulla ja minimoimalla suure  $\sum_n [N_{\text{malli}} - (h - H_{N60})]^2$ . Sovituksen keskivirhe oli  $\pm 29 \text{ mm}$  (Ollikainen, 2002).

*FIN2000* antaa suoraan N60:n mukaisia ortometrisia korkeuksia paremmalla kuin  $10 \text{ cm}$  tarkkuudella kaikkialla Suomessa, kun mallista saatava geoidinkorkeus  $N$  sijoitetaan kaavaan (2.58). Tällaisten mallien yhteydessä olisi oikeampaa puhua *muunnospinnasta* kuin geoidimallista, sillä ne eivät enää kuvaa geopotentiaalin tasa-arvopintoja, vaan muuntavat ellipsoidista mitattuja korkeuksia kansalliseen korkeusjärjestelmään.

Joskus geoidimallia ei tarvita lainkaan. Jos alue on pieni (muutamia kilomet-

reja), riittää että havaitaan GNSS:llä muutamilla sellaisilla pisteillä, joille ortometrinen korkeus tunnetaan. Koska  $h$  ja  $H$  tunnetaan kullekin pisteelle, saadaan kaavasta (2.58) lasketuksi vastaavat geoidinkorkeudet  $N$ . Näiden kautta voidaan sovittaa taso (tai joskus toisen asteen pinta), ja tätä käyttäen geoidinkorkeudet voidaan interpoloida niille pisteille, joille ortometrista korkeutta  $H$  ei tunneta. Virheet kasvavat alueen koon suurentuessa, samoin jos mennään määrityspisteistön ulkopuolelle. Tarkkuutta on syytä testata jokaisessa tapauksessa erikseen.

GNSS-korkeudenmääritystarkkuus riippuu monesta seikasta, mutta yleisesti ottaen lyhyillä matkoilla vaaituksen muodolliset virheet ovat GNSS-määritystä pienemmät. Tosin kuva 2.34 antaa asiasta hieman liian pessimistisen kuvan. Todellisuudessa GNSS-määrityskin tapahtuu yleensä kahden suhteellisen lähekkäin olevan pisteen välillä, jolloin erityisesti geoidimallin virheet jäävät kuvassa esitetyä pienemmäksi. Samoin pysyvien GNSS-asemien avulla *korkeudenmuutoksia* voidaan seurata vaaitusta tarkemmin. GNSS-mittaus ei kuitenkaan korvaa vaaitusta kaikissa tapauksissa.

### Esimerkki 2.10 GNSS-havainnoista saatavat ortometriset korkeudet

Metsähovin GPS-pisteen korkeus ellipsoidista on  $h = 94.561$  m ja vaaituksella saatu N60-korkeus  $H = 75.655$  m. Oheisessa taulukossa on laskettu geoidinkorkeudet  $N$  kolmella eri mallilla ja näistä kaavalla (2.58) ortometriset korkeudet  $H_{\text{GPS}}$ . Viimeisessä sarakkeessa on GPS-määrityksellä saadun ortometrisen korkeuden ja N60-korkeuden ero. Kaikkien suureiden yksiköt ovat metrejä.

Malli	$N$	$h$	$H_{\text{GPS}}$	$H_{\text{N60}}$	ero
EGM96	18.766	94.561	75.795	75.655	0.140
NKG96	18.669	94.561	75.892	75.655	0.237
FIN2000	18.902	94.561	75.659	75.655	0.004

Taulukosta nähdään, kuinka N60-järjestelmään sovitettu FIN2000-malli antaa selvästi parhaan tuloksen. Uusimmatkaan globaalit mallit eivät välttämättä anna EGM96:ttä pienempää eroa, koska niitä ei ole sovitettu Suomen korkeusjärjestelmään. Vanhempien globaalien geoidimallien virheet saattavat olla jopa metrejä ja taso poiketa selvästi nykyisten mallien tasosta, eikä niitä kannata enää käyttää.

### Esimerkki 2.11 Ortometrinen korkeus ilman geoidimallia

Pisteen  $A$  korkeus ellipsoidista  $h = 85.34$  m ja ortometrinen N60-korkeus  $H = 67.92$  m. Noin kilometrin päässä olevalle pisteelle  $B$  saatiin GNSS-mittauksella korkeudeksi ellipsoidista  $h = 90.12$  m. Laske  $B$ :n ortometrinen korkeus.

Kaavalla (2.58) geoidinkorkeudeksi pisteellä  $A$  saadaan

$$N = h - H = 17.42 \text{ m.}$$

Koska piste  $B$  on varsin lähellä, ei geoidinkorkeus poikkea paljon  $A$ :n korkeudesta. Saamme

$$H_B = 90.12 - 17.42 = 72.70 \text{ m.}$$

Kovin pitkiä matkoja ei tällä tavoin voi mitata, koska geoidinkorkeus muuttuu, eikä virhearvion tekeminen ole mahdollista. Useamman pisteen avulla tehty tasosovitus mahdollistaa myös virhearvion tekemisen, mutta tälläkään keinolla ei ilman geoidimallia voi mitata kuin ehkä 10–20 km läpimittaisia alueita.

## 2.5.2 Suomen korkeusjärjestelmät

Suomessa on käytössä virallisen *N60-järjestelmän* lisäksi aikaisemmat korkeusjärjestelmät NN, N43 ja LN. Uusi korkeusjärjestelmä, *N2000* otetaan käyttöön lähivuosina. Edellisten lisäksi kunnilla ja kaupungeilla on omia paikallisia erillisjärjestelmiä, joista osa säilyy myös tulevaisuudessa.

Suomen ensimmäiseen tarkkavaaitukseen (1892 – 1910) perustuva korkeusjärjestelmä *NN* ("normaali nolla") ulottui Kajaani–Oulu -linjalle saakka. Lähtötona oli Helsingin Katajanokan siltaan kiinnitetyn vesiesteikon nollapiste. Kiintopisteiden väliset korkeuserot vastaavat tilannetta noin vuonna 1900, mikä oli vaaituksen keskimääräinen mittausajankohta. NN on käytössä esimerkiksi vanhoissa, mutta voimassa olevissa vesioikeuden päätöksissä ja myös sisävesiväylät ja syvyystiedot ovat sidoksissa NN-korkeusjärjestelmään. NN:n mukaiset korkeudet poikkeavat merkittävästi tämän hetkisistä todellisista korkeuksista, mikä aiheuttaa käytännön ongelmia.

Toinen tarkkavaaitus mitattiin useassa vaiheessa. Vuosina 1935 – 1955 mitattiin verkko Aavasaksa-Rovaniemi-Kemijärvi -linjalle saakka. Tänä aikana maahan luotiin tilapäiseksi tarkoitettu *N43* korkeusjärjestelmä. Järjestelmän korkeuserot vastasivat tilannetta likimäärin vaaituksen keskihetkellä.

Lapin tarkkavaaitus tehtiin kahdesti, vuosina 1953 – 1962 ja 1971 – 1975, jotta myös tälle alueelle voitiin laskea maannousu. Lapin mittausten korkeudet julkaistiin ennen lopullista laskua LN (Lapin nolla) -järjestelmässä. Arvot ovat lähellä lopullisia N60-korkeuksia. Ahvenanmaa vaaittiin vuosina 1962 – 1972.

N60

Nykyinen valtakunnallinen N60-korkeusjärjestelmä luotiin tasoittamalla vaaitusverkko geopotentialilukuja käyttäen. Tasoituksen tuloksena saatiin *maannousu* (ks. seuraava luku) niillä alueilla, jotka olivat yhteisiä ensimmäisessä ja toisessa vaaituksessa. Saatuja maannousulukuja käyttäen kiintopisteiden korkeuserot redukoitiin vuoteen 1960. Lähtökorkeudeksi otettiin Helsingin mareografin vuosien 1935 – 1954 havainnoista vuoteen 1960 ekstrapoloitu keskivedenpinta.

N2000

Suomen kolmas tarkkavaaitus tehtiin vuosina 1978 – 2004. Linjojen yhteispituus on noin 9000 km ja kiintopisteitä yli 6000. Suomen uusi korkeusjärjestelmä, N2000 perustuu kolmanteen tarkkavaaitukseen. N2000 otetaan vähitellen käyttöön vuoden 2006 jälkeen. Järjestelmä poikkeaa monilta osin N60:stä (taulukko 2.13). Vuonna 2004 istunut työryhmä suositti uuden valtakunnallisen korkeusjärjestelmän luomista, jonka periaatteet ovat:

- Korkeuksien lähtötaso on eurooppalaisen korkeusjärjestelmän lähtötaso
- Järjestelmän korkeudet ovat normaalikorkeuksia
- Käytettävä vuoksikorjaus on nollavuoksikorjaus
- Maannousun osalta korkeudet vastaavat tilannetta vuoden 2000 alussa

Kullakin maalla on perinteisesti ollut oma korkeusjärjestelmänsä. Eurooppalaisten vaaitusverkkojen yhteistasoituksia (UELN, United European Levelling Net) on tähän saakka käytetty lähinnä tieteellisiin tarkoituksiin. Niiden lähtötasona on *NAP* (Normaal Amsterdams Peil), joka on Amsterdamissa vuonna 1684 vallinneen tulvavuoksen huippu. NAP:lla ei siten ole suoraa yhteyttä keskimerenpintaan tai geoidiin, ja NAP on realisoitu yksittäisten kiintopisteiden kautta. NAP on noin 11 cm globaalia geoidia alempana.

**Taulukko 2.13:** N60 ja N2000 korkeusjärjestelmien ominaisuuksia

	N2000	N60
Havainnot	3. valtakunnallinen tarkkavaaitus	2. valtakunnallinen tarkkavaaitus
Epookka	2000	1960
Keskivirhe	0.8 mm / $\sqrt{\text{km}}$	0.7 mm / $\sqrt{\text{km}}$
Nollataso	NAP <sup>‡</sup> tai globaalinen geoidin $W_0$	Helsingin keskiveden taso 1960
Tasoitus	geopotentialiluvut	geopotentialiluvut
Vuoksikorjaus	nollavuoksi	keskivuoksi
Korkeus	normaalikorkeus	ortometrinen korkeus

<sup>‡</sup>Toistaiseksi määrittelemättä. Riippuu eurooppalaisesta korkeusjärjestelmästä.

Eurooppalaisen paikkatiedon yhteiskäyttö on tullut yhä tärkeämmäksi. Pyrkimyksenä on siksi mm. yhteinen eurooppalainen korkeusjärjestelmä. EUREF-komission Tromssan kokouksessa vuonna 2000 hyväksyttiin *EVRS*-korkeusjärjestelmän (European Vertical Reference System) periaatteet ja sen ensimmäinen realisaatio *EVRF2000* (European Vertical Reference Frame), joka pohjautuu UELN-95/98 -tasoitukseen. Uusien UELN-tasoitusten myötä realisaatio paranee, mutta lopullinen lähtötason valinta NAP:n ja  $W_0$ :n välillä on vielä päättämättä.

N2000 on EVRS:n mukainen kansallinen realisaatio. Se on sidottu Itämeren ympäri tehdyn vaaitustasoituksen tuloksiin ja tätä kautta eurooppalaiseen järjestelmään. Pohjoismaisen geodeettisen komission (*NKG*) korkeustyöryhmässä on sovittu Pohjoismaiden yhteiseksi epookiksi vuosi 2000. Yhteisellä epookilla on merkitystä erityisesti Fennoskandian alueella, jossa *maannousu* muuttaa korkeuksia. N60:n ja N2000:n nollahetkien välillä maannousu on muuttanut korkeuksia 10 – 40 cm (ks. seuraava luku).

N2000 käyttää normaalikorkeuksia. Normaalikorkeuden ero ortometrisestä korkeudesta ei ole Suomessa merkittävä. Ero on lähes koko maan alueella alle 2 cm. Suurimmillaan se on Haltilla, noin 8 cm.

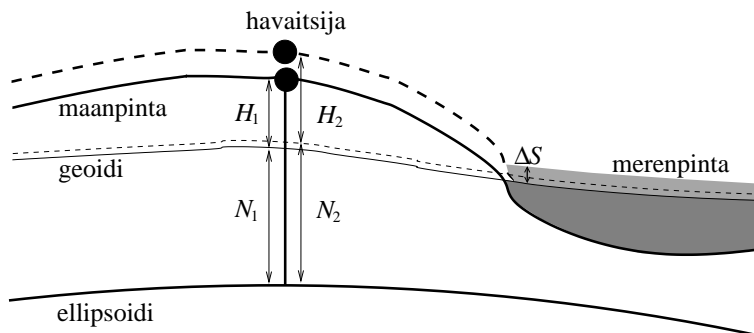
Kuun ja Auringon vetovoimien vaikutus otetaan huomioon IAG:n suosituksen mukaisesti liittämällä havaintoihin nollavuoksikorjaus. N60-järjestelmässä käytetään keskimääräistä vuoksea. Vuoksikorjauksesta aiheutuvat erot Suomen alueella etelästä pohjoiseen ovat 4 cm (ks. seuraava luku).

Uusi korkeusjärjestelmä yksinkertaistaa GNSS-havaintajien töitä, mikäli mittaukset ulottuvat maan rajojen ulkopuolelle tai jos tietoja joudutaan lähettämään muualle. Kansalliset realisaatiot tulevat olemaan riittävän lähellä toisiaan, niin että käytännössä niiden välisiä eroja ei tarvitse ottaa huomioon kuin kaikkein tarkimmissa töissä. Tilanne on samanlainen kuin ETRF-realisaatioilla, jotka myös ovat keskenään yhteensopivia.

FIN2000-geoidimallin tilalle luodaan uusi geoidimalli, jonka avulla korkeusmuunnos GNSS-havainnoista N2000:een voidaan tehdä. Näin käyttäjän ei tarvitse huolehtia N60:n ja N2000 välisistä eroista, vaan oikeaa muunnospintaa käyttäen havainnot saadaan suoraan oikeaan korkeusjärjestelmään. Suurin ero N2000:n ja N60:n välillä aiheutuu maannoususta. Kaikki muut korjaukset ovat paljon pienempiä.

### 2.5.3 Korkeuksien ajalliset muutokset

*Maannousu* on Fennoskandian alueelle tyypillinen ilmiö. Viime jääkauden painaman maankuoren palautuminen jatkuu edelleenkin. Pohjanlahden perukassa on



**Kuva 2.35:** Maannousu vaikuttaa korkeuksiin. Ajanhetkellä  $t_1$  pisteen ortometrinen korkeus on  $H_1$  ja geoidinkorkeus  $N_1$ . Hetkellä  $t_2$  maa on kohonnut katkoviivalla merkittyyn korkeuteen. Massamuutos vaikuttaa geoidiin, joka myös on noussut hieman. Korkeudet ovat nyt  $H_2$  ja  $N_2$ . Samaan aikaan meren eustaattinen nousu on nostanut merenpintaa määrällä  $\Delta S$ .

maannousun maksimi; maa kohoaa merenpintaan nähden yli 8 mm vuodessa (kuva 2.36). Noustavaa on vielä 50 – 100 metriä, mutta maankuori tuskin ehtii täysin palautua ennen seuraavaa jääkautta.

---

maannousu

---

Näennäiseksi maannousuksi kutsutaan nousua suhteessa merenpintaan. Absoluuttinen maannousu, ts. nousu suhteessa ellipsoidiin (tai Maan keskipisteeseen nähden) saadaan GNSS-mittauksista. Myös merenpinta ja geoidi muuttuvat. Merenpinnan eustaattinen nousu on noin 1.5 mm vuodessa, mutta on viitteitä, että nousu olisi nopeutunut. Maannousun vuoksi myös geoidi muuttuu, koska geoidiin vaikuttaa maannousun takia muuttuva massajakautuma. Geoidin nousu on 5 – 7 % maannousun suuruudesta.

Mittausmenetelmästä ja korkeusjärjestelmän määritelmästä riippuu, mikä suure mittauksista saadaan. Absoluuttinen maannousu on (kuva 2.35)

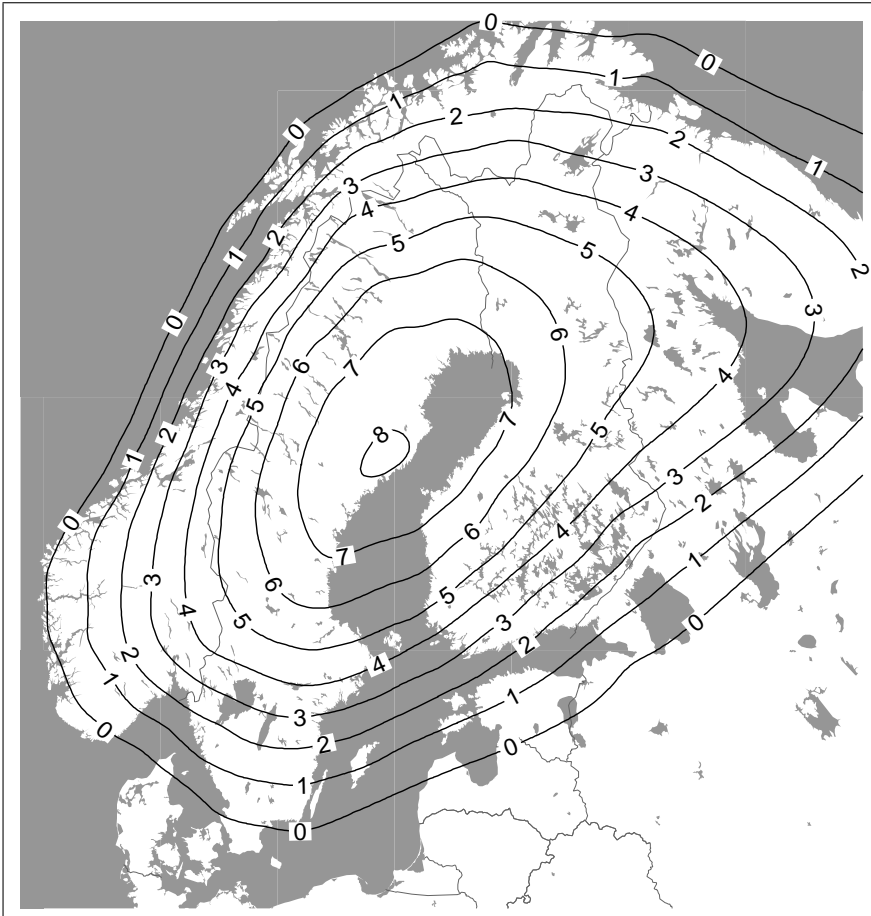
$$\Delta h = h_2 - h_1 = (H_2 + N_2) - (H_1 + N_1) = \Delta H + \Delta N, \quad (2.60)$$

missä indeksit 1 ja 2 viittaavat ajanhetkiin  $t_1$  ja  $t_2$ .  $\Delta N$  on geoidin nousu ja  $\Delta H$  pisteen ortometrisen korkeuden muutos. Tätä ei kuitenkaan havaita vaaituksella, koska ”absoluuttinen” kiintopiste puuttuu. Sen sijaan havaitsemme näennäisen maannousun

$$\Delta H' = \Delta h - \Delta S - \Delta N, \quad (2.61)$$

kun vaaitusverkko on sidottu rannikolla oleviin mareografeihin.



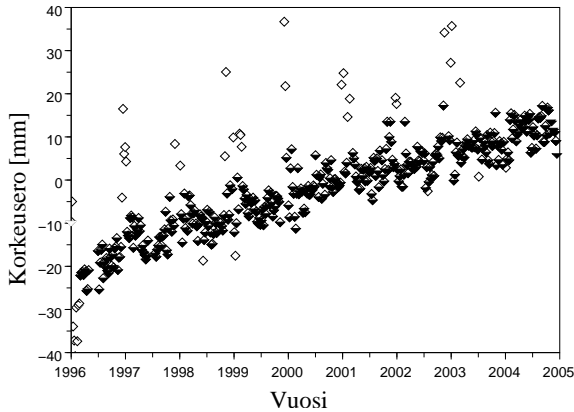


**Kuva 2.36:** Fennoskandian maannousu. Käyrät kuvaavat maannousua merenpinnan suhteen. Yksikkö on millimetriä vuodessa. Malli on koottu Lambeckin teoreettisesta mallista, mareografihavainnoista ja vaaituksesta. Mallia on käytetty mm. N2000-järjestelmän luomisessa. (Vestøl, Ågren, 2005)

Jos epookkina  $t_2$  määritellään uusi korkeusjärjestelmä, jonka lähtötaso on hetken  $t_2$  keskimerenpinta, on pisteen uusi ortometrinen korkeus

$$H_2 = H_1 + \Delta H - \Delta S + \Delta N = H_1 + \Delta h - \Delta S. \quad (2.62)$$

Suomen N60-järjestelmän korkeudet ovat epookissa 1960.0. Nykyhetken mennessä maa on ehtinyt kohota tästä desimetrejä (kuva 2.36). Perinteisessä vaaituksessa tästä ei ole haittaa, sillä mitattavat matkat ovat yleensä lyhyitä, jolloin



**Kuva 2.37:** Finnref-verkkoon kuuluvien Metsähovin ja Vaasan pysyvien GPS-asemien välisen korkeuseron muuttuminen vuosina 1996–2004. Avoimilla symboleilla merkityt havainnot johtuvat antennin päälle kertyneen lumen aiheuttamasta virheestä GPS-signaalin kulkumatkaan. (Data: Hannu Koivula, Geodeettinen laitos)

pisteiden väliset korkeuserot eivät juurikaan muutu.

GNSS-mittauksessa tilanne on toinen. Jos *maannousunopeuksien ero* mitattavalla alueella on merkittävä, on pisteiden ortometriset ja ellipsoidikorkeudet on redukoitava yhteiseen epookkiin esim. kuvan 2.36 avulla. Jos GNSS-verkko ulottuu usean kymmenen kilometrin alueelle, ovat pisteiden väliset *korkeuserot* ehtineet muuttua merkittävästi.

Pienellä alueella tätä korjausta ei tarvita, koska kaikki pisteet kohoavat likimain samalla nopeudella, eikä pisteiden välinen korkeusero muutu. Tällöin GNSS-havaintojen ja geoidimallin avulla voidaan laskea pisteiden N60-korkeudet tunnetun referenssipisteen suhteen kaavalla (2.58). Tarvittaessa voidaan tehdä pieni vakiokorjaus, niin että kaava antaa referenssipisteellä oikean N60-korkeuden.

Uusi N2000-järjestelmä helpottaa tilannetta hieman, mutta maannousu vaikuttaa ajan myötä vääjäämättä näihinkin korkeuksiin. Myös korkeusjärjestelmään sovitettu *geoidimalli* vanhenee, sillä se on sovitettu senhetkisen maankuoren korkeuden mukaisesti jona sovitukseen tarvittavat GNSS-havainnot on tehty. Esimerkiksi FIN2000-mallin sovitus perustuu GPS-havaintoihin, jotka on tehty keskimäärin ajanhetkellä 1997.0 (havainnot on tehty vuosina 1996 ja 1997). Havaintopisteiden korkeus FIN2000 pinnasta vuonna 1997.0 on siis sama kuin niiden korkeus N60-järjestelmän geoidista vuonna 1960.0 (ks. esimerkin kuva).

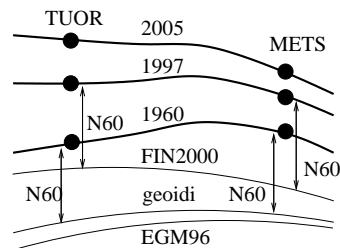
Vaikka emme edes olisi kiinnostuneita pisteiden korkeuksista, vaikuttaa maannousu referenssipisteiden kautta koko verkon koordinaatteihin. Kaikkein tarkimmissa töissä joudummekin redukoimaan tunnettujen pisteiden koordinaatit havaintohetken myös maannousun osalta, mikäli koordinaattiepookki poikkeaa merkittävästi havaintohetken epookista.

### Esimerkki 2.12 Maannousun vaikutus GNSS-korkeudenmääritykseen

Pisteet METS ja TUOR ovat melkoisen matkan päässä toisistaan, niin että niiden välinen maannousuero on merkittävä. Lasketaan ajanhetkenä 2005.5 tehdyn METS – TUOR GPS-mittauksen avulla pisteen TUOR N60-korkeus, kun pisteen METS N60-korkeus tunnetaan.

Oheisessa taulukossa on GPS:llä saatu korkeus ellipsoidista, FIN2000-geoidinkorkeus, EGM96-geoidinkorkeus, näennäinen maannousu (kuvasta 2.36) ja absoluuttinen maannousu (= näenn. maannousu + 1.5 mm). Lasketaan ortometriset korkeudet kaavan (2.58) avulla.

	METS	TUOR
$h$ [m]	94.598	60.588
$N_{\text{FIN2000}}$ [m]	18.902	19.705
$N_{\text{EGM96}}$ [m]	18.766	19.284
näenn. maannousu [mm/v]	2.8	4.0
abs. maannousu [mm/v]	4.3	5.5
$H_{\text{N60}}$ [m]	75.655	?



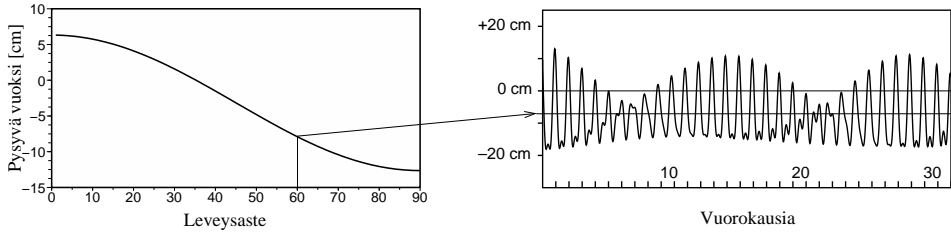
Ortometriset korkeudet  $H_{2005}$  ovat vuoden 2005.5 korkeuksien mukaisia. Kuvassa maankuoren korkeudet on piirretty vuosina 1960, 1997 ja 2005. Teemme kaksi korjausta,  $H_{\text{korj.}} = H_{2005} - \text{maannousukorjaus} - \text{tasonkorjaus}$ .

Pisteiden korkeus FIN2000-pinnasta v. 1997 on sama kuin pisteiden korkeus N60:n käyttämästä geoidista vuonna 1960, joten tässä tapauksessa vähennämme 8.5 vuoden maannousun. EGM96-malliin vastaavaa sovitusta ei ole tehty. Sen vuoksi siirrämme maankuoren korkeuden 45.5 vuotta taaksepäin vuoteen 1960.0. Lisäksi teemme tason korjauksen, jotta saamme N60-korkeuden pisteellä METS oikein.

		$h$ [m]	$N$ [m]	$H_{2005}$ [m]	maannousu- korjaus [m]	tason- korjaus	$H_{\text{korj.}}$ [m]
FIN2000	METS	94.598	18.902	75.696	$0.0043 \times 8.5$	0.004	75.655
	TUOR	60.588	19.705	40.883	$0.0055 \times 8.5$	0.004	40.831
EGM96	METS	94.598	18.766	75.831	$0.0043 \times 45.5$	-0.020	75.655
	TUOR	60.588	19.284	41.304	$0.0055 \times 45.5$	-0.020	41.074

Pisteelle TUOR on saatu vaaituksella N60-korkeudeksi 40.825 m. Globaali EGM96-malli antaa jonkin verran huonomman tuloksen kuin FIN2000. Geoidinnousun ja muiden suhteellisen vähäisten korjausten vaikutusta ei ole niiden pienuuden takia ( $< 1$  cm) otettu tässä huomioon.

EGM96-mallin laskuri löytyy mm. osoitteesta <http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm96/intpt.htm>.



**Kuva 2.38:** Vasemmalla pysyvän vuoksen vaikutus Maan muotoon leveysasteen funktiona. Maa on hieman litistyneempi kuin mitä se olisi ilman Kuun ja Auringon vuoksivoimien vaikutusta. Oikealla maankuoren pystysuora liike Helsingissä kuukauden aikana. y-akselin nollakohta kuvaa tilannetta, jossa vuoksen vaikutus on kokonaan poistettu. Ero aikakeskiarvoon nähden (ohut nuolen osoittama vaakasuora viiva) on pysyvän vuoksen osuus.

Auringon ja Kuun *vetovoimat* aiheuttavat maapallolla vuorovesi-ilmiön. Usein ajatellaan vain valtamerten vuoksea, mutta myös kiinteä maanpinta liikkuu; pystysuoran liikkeen suuruus on luokkaa 30 cm vuorokaudessa (kuva 2.38). Kuun ja Auringon aiheuttamaa maankuoren pystysuoraa liikettä voidaan approksimoida kaavalla

$$\Delta h = hW_2/g, \quad (2.63)$$

missä  $W_2$  on Kuun ja Auringon yhteenlaskettu vuoksipotentiali (ks. oheinen laatikko),  $g$  painovoiman kiihtyvyyden ja  $h$  Maan elastisuutta kuvaava *Loven luku* (älä sekoita symbolia  $h$  ellipsoidiseen korkeuteen  $h$  tai tuntikulmaan  $h$  jotka kaikki esiintyvät kaavassa (2.63)). Dimensiottoman Loven luvun  $h$  arvo puolivuorokautisen ja vuorokautisen vuoksen tapauksessa on  $h = 0.61$ .

Vuoksivoimien vaikutuksesta maankuoren korkeus muuttuu jatkuvasti. GNSS-havainnot on sen vuoksi laskettava jollekin sellaiselle maankuoren korkeudelle, josta vuoksen vaikutus on poistettu. Nykyiset GNSS-laskentaohjelmat poistavat vuoksen vaikutuksen havainnoista kokonaan, ts. korkeudet redukoidaan vuoksikorjatulle maankuorelle (ks. oheinen laatikko).

Olkoot kaksi havaintopaikkaa  $S$  ja  $N$ , joiden leveysasteet ovat  $\varphi_S$  ja  $\varphi_N$ . Muunnokset korkeuksista toiseen voidaan laskea seuraavilla kaavoilla (Ekman, 1989):

$$\Delta H_m = \Delta H_n + 0.296\gamma(\sin^2 \varphi_N - \sin^2 \varphi_S) \quad (2.64)$$

$$\Delta h_m = \Delta h_n - 0.296h(\sin^2 \varphi_N - \sin^2 \varphi_S) \quad (2.65)$$

$$N_m = N_n + (1 - k)(0.099 - 0.296 \sin^2 \varphi). \quad (2.66)$$

### Laatikko 2.7 Vuokspotentiaali

Auringon tai Kuun synnyttämä vuokspotentiaali voidaan esittää kaavalla:

$$\begin{aligned} W_2 &= D (\cos^2 \varphi \cos^2 \delta \cos 2h + \sin 2\varphi \sin 2\delta \cos h + \\ &\quad 3(\sin^2 \varphi - \frac{1}{3})(\sin^2 \delta - \frac{1}{3})) \\ &\equiv D(S + T + Z) \end{aligned}$$

missä  $D$  on Doodsonin vakio,  $D = 3GMr^2/(4d^3)$ ,  $\varphi$  havaitsijan leveysaste,  $\delta$  Kuun tai Auringon deklinaatio ja  $h$  ko. kappaleen tuntikulma.  $M$  on Auringon tai Kuun massa,  $r$  etäisyys,  $d$  havaitsijan etäisyys Maan keskipisteestä ja  $G$  vetovoimavakio. Kaava tunnetaan *Laplacen vuoksikaavana*.

Termi  $S$  kuvaa puolivuorokautista vuoksea ( $\cos 2h$ ),  $T$  vuorokautista vuoksea ( $\cos h$ ) ja  $Z$  vuoksen pitkäperiodista osaa, joka ei riipu Auringon tai Kuun tuntikulmasta.  $S$ :n ja  $T$ :n aikakeskiarvot ovat nolliä, mutta  $Z$ :n aikakeskiarvo poikkeaa nollasta. Tätä kutsutaan *pysyväksi vuokseksi*.  $S$ :n ja  $T$ :n synnyttämä vuoksi voidaan määrittää havainnoista, mutta pysyvän vuoksen suuruutta ei. Tämä johtuu siitä, että *Maa pyörimisestä* aiheutuva litistyminen on samaa muotoa kuin pysyvän vuoksen osuus, emmekä voi erottaa litistyneisyyksiä toisistaan. Pysyvän vuoksen suuruus voidaan arvioida Maan elastisuusmallien avulla (ks. kuva 2.38).

GNSS-havainnot kohdistuvat havaintohetken todelliseen maankuoren korkeuteen. Jotta eri aikoina tehtyjä mittauksia voisi verrata keskenään, on korkeudet redukoitava johonkin vuoksen vaihtelusta vapaaseen korkeuteen. Termit  $S$  ja  $T$  poistetaan, mutta  $Z$ :n suhteen on useampia vaihtoehtoja.

Jos pysyvän vuoksen vaikutus poistetaan, puhutaan vuoksikorjatusta maanpinnasta (*non-tidal crust*). Jos sitä ei poisteta, on kyse keskivuokseen korjatusta maanpinnasta (*mean crust*). Tämä vastaa maankuoren korkeuden aikakeskiarvoa. Sama pätee geoidiin, jolle on myös kolmas vaihtoehto, nollegeoidi (*zero geoid*). Siinä Auringon ja Kuun aiheuttama potentiaali on poistettu, mutta Maan deformaation aiheuttama muodon muutos geoidiin on säilytetty.

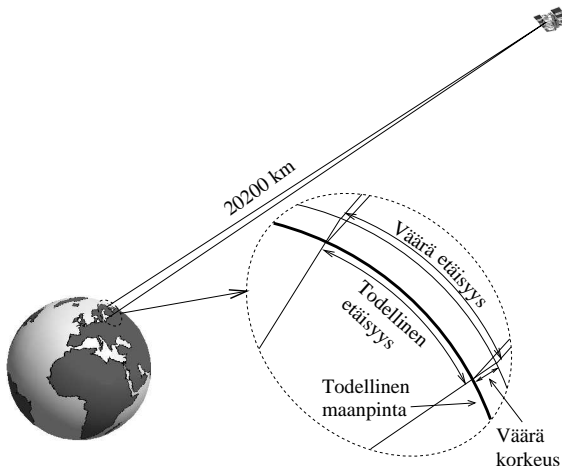
Vapaan merenpinnan aikakeskiarvo noudattaa keskimääräistä geoidia, GNSS-havainnot on redukoitu vuoksikorjatulle maanpinnalle, globaalit geoidimallit on laskettu vuoksikorjatulle geoidille, IAG:n suositus on käyttää nollegeoidia ja keskimääräistä maankuorta. Siis melkoinen sekamelska. Korjaukset voidaan laskea kaavoilla (2.64) – (2.65). Vuoksen käsittelystä GPS-havainnoissa, ks. esim. Poutanen *et al.*, 1996.

Kaava (2.64) antaa asemien  $N$  ja  $S$  ortometrinen korkeuserojen muutoksen kun siirrytään vuoksikorjatulta kuorelta ( $n$ ) ja vuoksikorjattulta geoidilta keskimääräiselle kuorelle ( $m$ ) ja keskimääräiseen geoidiin. Kaava (2.65) muuntaa vuoksikorjatun kuoren korkeuserot ellipsoidista keskimääräisen kuoren korkeuseroiksi. Kolmas kaava (2.66) muuntaa vuoksikorjatun geoidin korkeuden ellipsoidista keskimääräisen geoidin korkeudeksi leveysasteella  $\varphi$ . Suureet  $\gamma$ ,  $k$  ja  $h$  ovat eri Loven lukuja,  $\gamma = 0.8$ ,  $k = 0.3$  ja  $h = 0.61$ .  $\varphi$  on havaittajan leveysaste,  $\varphi_N$  ja  $\varphi_S$  ovat pohjoisemman ja eteläisemmän pisteen leveysasteet.

GNSS-laskut antavat siis tulokset vuoksikorjatulle maankuorelle. N60-korkeusjärjestelmä käyttää keskimääräistä geoidia ja uusi N2000-järjestelmä puolestaan nollageoidia. Useimmiten tämä ei aiheuta sen kummempia toimenpiteitä, sillä pienellä alueella eroilla ei ole merkitystä. Vasta maanlaajuisessa verkossa virhettä voi kertyä pahimmillaan muutamia senttimetrejä, ellei vuoksikorjausta tehdä samalla tavalla maankuorelle ja geoidille. Myös ITRF- ja EUREF-FIN-koordinaatit on laskettu vuoksikorjatun kuoren mukaan, joten niitä voi useimmissa tapauksissa käyttää sellaisenaan. Sen sijaan, jos tarkoitus on tutkia esim. merenpinnan korkeutta, on siirryttävä keskimääräiselle geoidille/kuorelle, koska merenpinta asettuu keskimääräisen geoidin mukaisesti.

Maanlaajuisissa mittauksissa myös maankuoren kuormitusvaihtelut tulevat näkyviin. Muuttuva ilmanpaine, merenkorkeuden vaihtelut, sekä lumen ja pohjaveden vaihtelut muuttavat maankuoren korkeutta jopa useilla senttimetreillä. Osa muutoksista on jaksollisia; esimerkiksi kuvasta 2.37 näkyy maannousun lisäksi myös pieni vuotuinen vaihtelu. Samantyyppinen ilmiö näkyy lähes kaikkien pysyvien GNSS-asemien aikasarjoissa. Valtamerten vuoksen aiheuttama kuormitusvaihtelu voidaan poistaa mallien avulla, mutta muita vaihteluita ei toistaiseksi voida poistaa kuin empiirisesti analysoimalla aikasarjoja jälkikäteen. Useimpien mitausten kannalta vaihteluilla ei ole merkitystä.

Luvun lopuksi annamme vielä esimerkin siitä, ettei suinkaan ole yhdentekevää mitä korkeutta tunnetun pisteen korkeutena käytetään. Jos ellipsoidikorkeuden sijasta käytetään pisteen N60-korkeutta, saamme aikaan melkoisen skaalavirheen. Kaikki vektorit tulevat n. 0.5 ppm liian pitkiksi, koska N60-korkeuksien mukaan laskettu verkko on noin 20 metriä väärällä korkeudella. Kun saatu avaruusvektori projisoidaan takaisin ellipsoidille, tehdään uusi, edellistä 4-5 kertaa suurempi virhe, koska edelleenkin olemme väärällä korkeudella. Lopputuloksena on peräti n. 3 ppm:n skaalavirhe. Tarkkuutta myös korkeuksien käytössä!



**Kuva 2.39:** Väärän korkeuden vaikutus verkon mittakaavaan. Väärällä korkeudella olevan vektorin redukointi ellipsoidille aiheuttaa moninkertaisen mittakaavavirheen GNSS-määrittämisestä tulevaan virheeseen verrattuna.

### Esimerkki 2.13 Väärän lähtökorkeuden vaikutus verkon mittakaavaan

Tarkastellaan tilannetta, jossa pisteen todellisen ellipsoidikorkeuden sijasta GNSS-laskuissa käytetäänkin N60-korkeutta. Olkoon korkeuksien ero 20 m, joka kuvaa tilannetta Suomen alueella varsin hyvin. Lasketaan vektori Helsinki – Kemi siten, että kiinteän pisteen (tässä Helsinki) korkeus on toisessa laskussa pantu 20 m todellista pienemmäksi, ts. vastaamaan tilannetta, jossa lähtökorkeutena käytetään N60-korkeutta ellipsoidikorkeuden sijasta. Muutoin täysin identtisistä laskuista saadaan Kemin koordinaateiksi:

	Helsinki	Kemi	Helsinki	Kemi
	N60-korkeus		ellipsoidikorkeus	
$\varphi$	60 09 13.2389	65 40 27.7675	60 09 13.2389	65 40 27.6962
$\lambda$	24 57 24.2399	24 31 05.6583	24 57 24.2399	24 31 05.6703
$H/h$	4.878	6.842	24.878	26.816
$X$	2885128.734	2397062.735	2885137.758	2397071.987
$Y$	1342706.120	1093326.064	1342710.320	1093330.453
$Z$	5509022.349	5789091.707	5509039.697	5789108.998
$dX$	-488065.999		-488065.771	
$dY$	-249380.056		-249379.867	
$dZ$	280069.357		280069.301	
etäisyys	615497.909		615497.626	

Helsinki-Kemi -vektorin komponenteille saamme eroksi

$$\Delta(\Delta X)(1-2) = 0.23 \text{ m}$$

$$\Delta(\Delta Y)(1-2) = 0.19 \text{ m}$$

$$\Delta(\Delta Z)(1-2) = 0.06 \text{ m}$$

$$\Delta(\text{etäisyys}) = 0.28 \text{ m.}$$

Vektori on siis pidentynyt  $0.28 \text{ m} / 615497 \text{ m} = 0.45 \times 10^{-6} = 0.45 \text{ ppm}$ . Jos tyydymme pelkkiin avaruusvektoreihin, on verkon skaalaan aiheutettu vain vajaan 0.5 ppm:n virhe. Vektori myös kääntyy hieman.

Jos kuitenkin siirrymme maantieteellisiin koordinaatteihin, huomaamme Kemin latitudin muuttuneen peräti 2 m:

$$\Delta\varphi(1-2) = 0.071'' = 2.1 \text{ m}$$

$$\Delta\lambda(1-2) = -0.012'' = -0.2 \text{ m}$$

Suhteellisena virheenä tämä on  $2 \text{ m} / 615497 \text{ m} = 3.2 \times 10^{-6} = 3.2 \text{ ppm}$ . Longitudiin vaikutus on paljon vähäisempi, koska Helsinki ja Kemi sijaitsevat lähes samalla pituusasteella. Verkon skaala on siis yli 3 ppm virheellinen.

Vaikka vektori onkin tässä varsin pitkä, ei tilanne muutu mihinkään lyhyilläkin vektoreilla; skaalavirhe on tuon runsaat 3 ppm, ts. 3 cm kymmenen kilometrin vektorilla. Tämä on paljon enemmän kuin GNSS-määrittelyn tarkkuus. Lasentaohjelma ei luonnollisestikaan havaitse tällaista systemaattista virhettä, vaan se menee suoraan pisteiden koordinaatteihin. Jotta skaalan oikeellisuus taattaisiin millimetritasolla, on lähtökoordinaatin ellipsoidikorkeus tunnettava senttimetrin tarkkuudella. Useimmissa tapauksissa mittakaavavirhe korjautuu tasoituksessa, jos mukana on riittävä määrä kiinteänä pidettäviä pisteitä.



## Luku 3

# Satelliittien radat

*Kun seestyi avaruus ja kehä häipyi  
ei paluu ollut enää mahdollinen.  
Olemme kärki suoraan kohti Lyyraa  
ja suunnanmuutosta ei voitu tehdä*

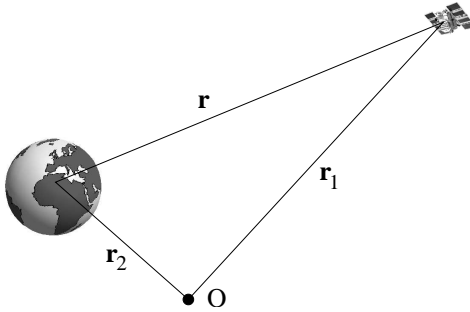
— Harry Martinson: *Aniara* (suom. Aila Meriluoto)

*Aniara* ei ehkä sovellu taivaanmekaniikan oppikirjaksi, mutta se suotakoon taiteilijan vapaudella Harry Martinsonille. Tässä luvussa tutustumme satelliittien rata-  
liikkeiden perusteisiin. Käymme aluksi läpi kahden kappaleen liikeyhtälöt ja määrittelemme *ellipsirataan* liittyvän käsitteistön. Tarkempi kuvaus kaavojen johtoneen on esim. julkaisussa (Karttunen *et al.*, 2003). Yksinkertaisten taivaanmekaniikan lakien perusteella pystymme laskemaan koska ja missä satelliitit taivaalla näkyvät, mutta varsinaiseen paikanmääritykseen tarkkuus ei vielä riitä.

Satelliittien todelliset radat ovat paljon mutkikkaampia. Ne poikkeavat ellipsistä, sillä satelliitteihin vaikuttaa häiriöitä, kuten Auringon säteilypaine ja Maan pallomaisesta poikkeava muoto. Ne muuttavat rataa, mutta radan tarkkaa muotoa ei pystytä laskemaan analyttisesti, vaan sitä varten on kehitetty numeerisia menetelmiä.

Lopuksi käymme läpi satelliittien lähettämät ratatiedot ja radassa olevien virheiden vaikutuksen paikanmäärityksen tarkkuuteen. Nykyisin GNSS-satelliittien ratavirheet ovat käytännössä merkityksettömiä, sillä radat kyetään laskemaan muutaman senttimetrin tarkkuudella.

Kaikkien GNSS-satelliittien radat ovat hyvin paljon toistensa kaltaisia. Voimme siis mainiosti käsitellä niitä yhdessä.



**Kuva 3.1:** Maapallon ja satelliitin paikat mielivaltaisessa koordinaatistossa. Koordinaatiston origo on pisteessä  $O$ ; satelliitin ja Maan paikkavektorit ovat  $\mathbf{r}_1$  ja  $\mathbf{r}_2$ . Satelliitin paikkavektori Maan keskipisteen suhteen on  $\mathbf{r}$ .

### 3.1 Kahden kappaleen rata

Tarkastellaan suoraan kaikkein monimutkaisinta systeemiä, jonka liikeyhtälöt pystytään ratkaisemaan suljetussa muodossa täydellisesti. Kyseessä on *kahden kappaleen järjestelmä*, esimerkiksi maapallo ja sitä kiertävä satelliitti. Uskotellaan toistaiseksi, ettei maailmankaikkeudessa muita kappaleita olekaan ja että nämä kaksi kappaletta ovat kutakuinkin pistemäisiä tai ainakin massajakautumaltaan pallosymmetrisiä ja homogeenisia. Vaikka oletukset voivat tuntua hyvinkin rajoittavilta ja todellisuuden vastaisilta, osoittautuu, että ne ovat kuitenkin varsin käyttökelpoisia.

Olkoot kappalten massat  $m_1$  ja  $m_2$  ja *paikkavektorit* jossain kiinteässä koordinaatistossa  $\mathbf{r}_1$  ja  $\mathbf{r}_2$ . Merkitään  $\mathbf{r}$ :llä satelliitin paikkaa Maan suhteen, ts.  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ . *Newtonin vetovoimalain* mukaan satelliittiin kohdistuu *vetovoima*, joka on verrannollinen massoihin  $m_1$  ja  $m_2$  ja kääntäen verrannollinen etäisyyden  $\mathbf{r}$  neliöön. Koska vetovoima on suunnattu kohti Maata, se voidaan lausua muodossa

$$\mathbf{F} = -G m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (3.1)$$

missä  $G$  on *gravitaatiovakio*.  $G$ :n numeerinen arvo riippuu valitusta yksikköjärjestelmästä: *SI-järjestelmässä* se on  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ . Tässä oikean puolen nimittäjässä on tutun  $r^2$ :n tilalla  $r^3$ , koska osoittajassa on  $\mathbf{r}$  kertomassa vektorin  $\mathbf{F}$  suunnan. Toinen vaihtoehto olisi käyttää  $\mathbf{r}$ :n suuntaista yksikkövektoria  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ .

Newtonin II lain mukaan kappaleen kiihtyvyys riippuu siihen vaikuttavasta voimasta:

$$\mathbf{F} = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2. \quad (3.2)$$

### Laatikko 3.1 Yksiköiden valinta

SI-yksiköt eivät aina ole kaikkein järkevin valinta. Kun on kyse Maata kiertävästä satelliitista, yksiköt on parempi valita niin, että massan yksikkönä on maapallon massa. Esimerkiksi *WGS84:n* määritelmässä  $G$ :n numeerinen arvo on  $GM_{\oplus} = 3986005 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ . Syy moiseen on se, että tulo  $GM$  saadaan hyvinkin tarkasti havainnoista, mutta meillä ei juuri ole konsteja erottaa tarkasti mikä osa on  $G$ :tä mikä  $M$ :ää; syyn näemme *Keplerin III laista*.

Kun on kyse Aurinkoa kiertävästä planeetasta, käytetään yleensä massan yksikkönä *Auringon massa*, etäisyyden yksikkönä *tähtitieteellistä yksikköä* (likimain sama kuin Maan radan isoakselin puolikas) ja ajan yksikkönä vuotta. Tässä yksikköjärjestelmässä  $G$ :n arvo on tasan  $4\pi^2$ , mikä *Keplerin III lain* kanssa on ylen kätevää.

Edellä esiintyvä otus  $\ddot{\mathbf{r}}$  on paikkavektorin  $\mathbf{r}$  toinen aikaderivaatta<sup>1</sup>,  $d^2\mathbf{r}/dt^2$ .

Merkitsemällä yhtälöiden (3.1) ja (3.2) voimain lausekkeet yhtäsuuriksi saadaan satelliitin liikeyhtälö:

$$m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = -Gm_1m_2\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (3.3)$$

Koska maapalloon kohdistuu yhtä suuri mutta vastakkaisuuntainen voima (Newtonin III laki), on maapallon liikeyhtälö

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = Gm_1m_2\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (3.4)$$

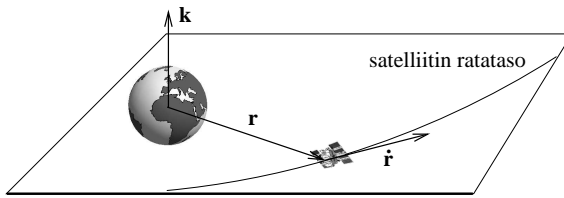
Suhteellisen liikkeen yhtälö saadaan vähentämällä (3.4) (3.3):sta ja supistamalla tarpeettomat massat pois:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (3.5)$$

missä on merkitty  $\mu = G(m_1 + m_2)$ . Jos (3.5) onnistutaan ratkaisemaan, voidaan satelliitin paikka laskea mille tahansa ajanhetkelle.

*Likeyhtälö* (3.5) kuvaa satelliitin liikettä maapallon suhteen ja sen ratkaisuna saadaan *satelliitin rata* maapallon ympäri. Kaavasta (3.5) nähdään, että kyseessä

<sup>1</sup>Merkintätapa on peräisin Newtonilta ja taivaanmekaniikan aikaderivaatat ovat lähes ainoa paikka jossa notaatiota käytetään. Nykyisin käytetään useimmin *Newtonin* aikalaisen ja differentiaali-laskennan riippumattomasti keksineen *Leibnitzin* merkintätapaa.



**Kuva 3.2:** Impulssimomentti-vektori  $\mathbf{k}$  on kohtisuorassa satelliitin ratatasossa olevia paikka- ja nopeusvektoreita vastaan. Koska  $\mathbf{k}$  on vakiovektori, täytyy satelliitin liikkua koko ajan samassa tasossa.

on toisen kertaluvun vektoriarvoinen differentiaaliyhtälö, jossa esiintyy vain *paikkavektori*  $\mathbf{r}$  ja sen toinen aikaderivaatta, joten ratkaisuna pitäisi tulla paikkavektori ajan funktiona. Käytännössä asia ei ole aivan näin yksinkertainen, sillä osoittautuu, ettei paikkavektoria voi lausua ajan funktiona suljetussa muodossa.

Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön ratkaisuun tarvitaan kaksi vakiota. Koska kyseessä on vektoriyhtälö, tarvitaan joko kaksi vektoria tai kuusi skalaaria. Käyttötarkoituksesta riippuen vakiot voidaan valita eri tavoilla. Vakiot määräävät yksikäsitteisesti radan asennon, muodon ja satelliitin paikan radallaan.

Sopivia vakioita ovat esimerkiksi paikka- ja nopeusvektori, jotka jollekin ajanhetkelle annettuina määräävät paikka- ja nopeusvektorin mille tahansa muulle ajanhetkelle. Ikävä kyllä, ne eivät kerro mitään radan yleisistä ominaisuuksista, eikä niistä suoraan näe millainen rata on, mutta toisaalta ne sopivat mainiosti tietokonein tapahtuvaan numeeriseen laskentaan.

Toinen mahdollisuus on määritellä rataan liittyvät fysikaaliset suureet, *impulssimomentti*  $\mathbf{k} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$  ja *eksentrisyys*  $\mathbf{e}$ . Niiden avulla voimme suhteellisen yksinkertaisesti johtaa monia rataan liittyviä ominaisuuksia. Kirjassa (Karttunen *et al.*, 2003) on näitä suureita käyttäen johdettu jäljempänä tulevat kaavat.

Kolmas, havaitsijan kannalta havainnollisin tapa on antaa kuusi radan geometriaa kuvaavaa suurta, *rataelementit*. Seuraavassa tutustumme tarkemmin rataelementteihin ja niiden tulkintaan.

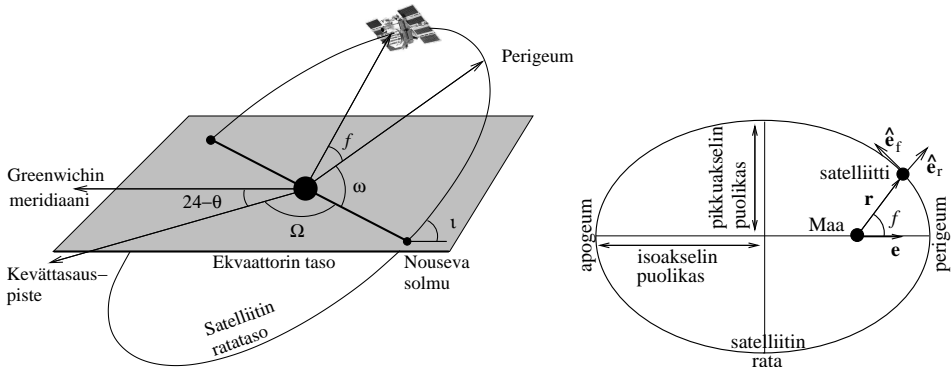
### Esimerkki 3.1 Radan vakioasento

Impulssimomentti-vektorin  $\mathbf{k}$  avulla on helppo osoittaa, että radan asento on vakio. Riittää osoittaa, että  $\mathbf{k}$  on vakiovektori, ts. sen aikaderivaatta on nolla. Kirjoitetaan  $\mathbf{k}$ :n määritelmä:

$$\mathbf{k} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$

ja lasketaan tämän aikaderivaatta  $\dot{\mathbf{k}}$ :

$$\dot{\mathbf{k}} = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$$



**Kuva 3.3:** Vasemmanpuoleisessa kuvassa satelliitin rataelementit  $\Omega$ ,  $\omega$  ja  $\iota$ . Kuvaan merkitty myös *kevättasauspisteen* ja *Greenwichin meridiaanin* suunnat. Tähtiaika  $\theta$  on näiden suuntien välinen kulma. *Perigeumin* ja satelliitin suunnan välinen kulma on *luonnollinen anomalia*  $f$ . Oikeanpuoleisesta kuvasta näkyy perigeum, apogeeum ja isoakselin puolikas  $a$  sekä luonnollisen anomalian  $f$  määritelmä. Vektori  $\mathbf{e}$  osoittaa *perigeumin* suuntaan.  $\hat{\mathbf{e}}_r$  ja  $\hat{\mathbf{e}}_f$  ovat säteen  $r$  suuntaan ja sitä vastaan kohtisuoraan olevat yksikkövektorit.

$$= 0 \quad - \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \times \mathbf{r}$$

$$= 0$$

Derivaatan ensimmäinen termi on nolla, koska vektorin ristitulo itsensä kanssa on nolla. Jälkimmäisessä termissä  $\ddot{\mathbf{r}}$  lausutaan kaavan (3.5) avulla. Koska  $\mathbf{k}$  ei muutu ajan mukana, ei myöskään ratatason asento muutu.

### 3.1.1 Rataelementit

$\mathbf{k}$  ja  $\mathbf{e}$ -vektoreista lähtien voidaan johtaa satelliitin radalle lauseke (ks. Karttunen *et al.*, 2003)

$$r = \frac{k^2/\mu}{1 + e \cos f}, \quad (3.6)$$

joka on kartioleikkauksen yleinen yhtälö napakoordinaateissa. Tämä on *Keplerin I laki* yleisessä muodossaan: Kappaleen rata on kartioleikkaus (ellipsi, paraabeli tai hyperbeli), jonka polttopisteessä on se toinen kappale (maapallo). Tarkastellaan seuraavaksi vain ellipsiratoja, jollaisia GNSS-satelliittien radat ovat.

Kaavassa (3.6) esiintyvä suure  $f$  on nimeltään *luonnollinen anomalia*; sen määritelmä käy parhaiten ilmi kuvasta 3.3. Kulma  $f$  osoittaa suunnan, jossa satelliitti hetkellä  $t$  on perigeumin suunnasta vastapäivään pitkin ratatasoa mitattuna.

Satelliitin etäisyys maapallosta on  $r$ . Kun  $f = 0$  on etäisyys  $r$  pienimmillään; satelliitti on silloin *perigeumissa*. Vastakkaisella puolella rataa on kauimmainen piste, *apogeum*<sup>2</sup>.

Satelliitin rataa voidaan kuvata kuudella *rataelementiksi* kutsutulla geometrisellä suureella<sup>3</sup>:

$$\begin{cases} a & \text{isoakselin puolikas} \\ e & \text{eksentrisyys} \\ \iota & \text{inklinaatio} \\ \Omega & \text{nousevan solmun rektaskensio} \\ \omega & \text{perigeumin argumentti} \\ \tau & \text{perigeumaika.} \end{cases}$$

Valitaan aluksi perustaso ja -suunta, joiden suhteen asioita tarkastellaan. Maata kiertävän satelliitin tapauksessa perustasoksi valitaan *Maan ekvaattoritaso*, Aurinkoa kiertäville kappaleille perustasona käytetään Maan ratatasoa eli *ekliptikaa*. Tapauksesta riippuen perussuunnaksi valitaan joko kevättasauspisteen suunta tai *Greenwichin meridiaani*.

Isoakselin puolikas kiinnittää radan koon (ks. kuva 3.3). GPS-satelliittien radan isoakselin puolikas on n. 26560 km, Galileon 29994 km ja GLONASSin 25510 km. Isoakselin puolikas  $a$  (siis radan koko) ja satelliitin kokonaisenergia  $h$  liittyvät toisiinsa:

$$\begin{cases} a = -\mu/2h & \text{ellipsirata} \\ a = \mu/2h & \text{hyperbelirata} \end{cases} \quad (3.7)$$

$h$  on satelliitin kineettisen ja potentiaalienergian summa;  $h = 1/2v^2 - \mu/r$ ; tässä  $v$  on satelliitin nopeus ja satelliitin massa on laitettu ykköseksi. Kokonaisenergia  $h$  on ajan suhteen vakio, ts.  $\dot{h} = 0$ , joten satelliitin isoakselin puolikkaan täytyy myös olla vakio.

<sup>2</sup>Aurinkoa kiertävän kappaleen tapauksessa puhutaan perihelistä ja aphelistä. Sanan jälkimmäinen osa viittaa aina keskuskappaleeseen. Yleinen termi, joka ei liity keskuskappaleeseen on perisentri ja aposentri.

<sup>3</sup>Kun on kyse Maata kiertävistä satelliiteista, käytetään  $\Omega$ :sta nimitystä rektaskensio, koska kulma mitataan pitkin ekvaattoritasoa. Aurinkokunnan planeettojen yhteydessä puhutaan nousevan solmun pituudesta, koska kyseinen kulma mitataan pitkin ekliptikaa eli Maan ratatasoa.

Seuraava suure on eksentrisyys  $e$ , joka kuvaa radan litistyneisyyttä. Vektori  $e$  osoittaa perigeumin suunnan ja sen itseisarvo  $e$  on radan eksentrisyys.

$$\begin{cases} e = 0 & \text{ympyrärata} \\ 0 < e < 1 & \text{ellipsirata} \\ e = 1 & \text{paraabelirata} \\ e > 1 & \text{hyperbelirata} \end{cases}$$

Tyypillinen eksentrisyyden arvo GPS-satelliittien radoille on pienempi kuin 0.01, ts. rata on hyvin lähellä ympyrää. Mitä lähempänä ykköstä ellipsiradan eksentrisyys on, sitä litistyneempi rata. Jos radan pikkuakselin puolikas on  $b$ , on eksentrisyys

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (3.8)$$

Isoakselin puolikkaan ja eksentrisyyden avulla voidaan laskea satelliitin perigeumetäisyys

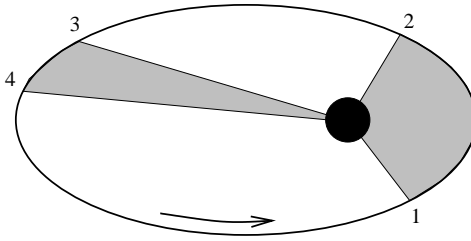
$$r_0 = a(1 - e). \quad (3.9)$$

Seuraavat kolme suuretta kiinnittävät radan asennon avaruudessa. Koska asennon kertova impulssimomenttivektori  $\mathbf{k}$  oli vakio, eivät myöskään seuraavat suuheet muutu ajan mukana. *Inkлинаatio*,  $\iota$ , on ratatason kaltevuus perustason suhteen. Maata kiertäville satelliiteille perustasona käytetään yleensä maapallon ekvaattoritasoa.  $\iota$  on välillä  $[0^\circ, 90^\circ]$  jos satelliitti liikkuu Maan pyörimisen suuntaan,  $(90^\circ, 180^\circ)$ , jos liike on vastakkaista l. *retrogradista*. GPS-satelliittien radan inkлинаatio on  $55^\circ$ , Galileon  $56^\circ$  ja GLONASSin  $64.8^\circ$ .

*Nousevan solmun rektaskensio*,  $\Omega$ , on kulma joka mitataan pitkin perustasoa sovitusta kiinteästä suunnasta, esimerkiksi kevättasauspisteen suunnasta vastapäivään. Kulma ilmoittaa missä suunnassa satelliitti nousee ekvaattorin pohjoispuolelle.

Kolmas asentoa kuvaava suure on *perigeumin argumentti*  $\omega$ . Se mitataan pitkin ratatasoa, nousevan solmun suunnasta vastapäivään perigeumiin.

Edellä olleet viisi rataelementtiä kiinnittävät satelliitin radan koon, muodon ja asennon täydellisesti. Kuudetta elementtiä tarvitaan kertomaan satelliitin paikka radallaan. Tämä voidaan valita eri tavoin, mutta tavallisinta on antaa *perigeumai-ka*,  $\tau$ , ajanhetki jolloin satelliitti on perigeumissa. Näiden kuuden rataelementin avulla satelliitin paikka voidaan laskea kuten seuraavassa luvussa kerrotaan.



**Kuva 3.4:** Keplerin II laki. Varjostettujen osien pinta-alat ovat yhtä suuret ja satelliitti kulkee pisteestä 1 pisteeseen 2 samassa ajassa kuin pisteestä 3 pisteeseen 4.

### 3.1.2 Satelliitin paikka

Vaikka saimmekin satelliitin radan yhtälön (3.6), emme vielä tiedä missä satelliitti milloinkin on, ts. tarvitsisimme luonnollisen anomalian  $f$  lausekkeen ajan funktiona. Niinpä joudumme määrittelemään vielä muutamia uusia suureita ja samalla saamme Keplerin kaksi muuta liikelakia.

Satelliitin *pintanopeudella* tarkoitetaan paikkavektorin aikayksikössä pyyhkäisemää pinta-alaa, joka etäisyyden ja luonnollisen anomalian avulla lausuttuna on

$$\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{f} = \frac{1}{2}k. \quad (3.10)$$

Koska  $k$  on ajan suhteen vakio, täytyy myös  $\dot{A}$ :n olla vakio. Näin olemme saaneet *Keplerin II lain: Satelliitin paikkavektori pyyhkii yhtä pitkinä aikaväleinä yhtä suuret pinta-alat.*

Sama asia voidaan ilmaista myös sanomalla että satelliitin pintanopeus on vakio. Koska satelliitin etäisyys maapallosta vaihtelee, täytyy myös sen ratanopeuden vaihdella; ollessaan lähinnä Maata on nopeuden oltava suurimmillaan. Mitä suurempi on radan eksentrisyys, sitä suurempi on myös ratanopeuden vaihtelu. GNSS-satelliittien radat ovat lähes ympyröitä, joten niiden nopeus vaihtelee vain hyvin vähän.

Integroimalla pintanopeuden lauseke (3.10) yhden kierroksen yli, päädyimme *Keplerin III lakiin:*

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)}. \quad (3.11)$$

Tämä Keplerin III lain yleinen muoto pätee kaikille kahden kappaleen systeemeille. (Keplerin itsensä johtama III lain formulointi *planeettojen kiertoaikojen neliöt suhtautuvat kuten niiden Auringosta laskettujen keskietäisyyksien kuutiot* saadaan



kaavasta (3.11) kun käytetään yksikköjärjestelmää, jossa massat lausutaan Auringon massoina, pituudet astronomisina yksikköinä ja ajat vuosina. Tällöin gravitaatiovakion  $G$  numeerinen arvo on  $4\pi^2$  ja kun planeetan massa  $m_2$  on häviävän pieni Auringon massa  $m_1$  verrattuna, supistuu kaava (3.11) muotoon  $P^2 = a^3$ .)

Apusuuretta  $E$  käyttäen (kuva 3.6) voidaan paikkavektori  $\mathbf{r}$  lausua

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} a(\cos E - e) \\ b \sin E \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

ja sen pituus, ts. *satelliitin etäisyys maapallon keskipisteestä* on

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (3.13)$$

Suure  $E$  on nimeltään *eksentrinen anomalia* ja sitä voi käyttää laskuissa esimerkiksi hankalan ajan asemesta.  $E$ :n voisi tulkita vaikkapa satelliitin paikan projektioksi ympyrällä.

Määritellään vielä suure

$$M = 2\pi \frac{t - \tau}{P}, \quad (3.14)$$

jota kutsutaan *keskianomaliaksi*. Se voidaan laskea kun kiertoaika  $P$  ja perigeumhetkestä kulunut aika  $t - \tau$  tunnetaan. Keskianomalia kasvaa tasaisesti ajan mukana ja se ilmoittaa suunnan missä satelliitti olisi jos se liikkuisi tasaisella nopeudella. Ympyräradalle kaikki edellä määritellyt kolme anomaliakulmaa ovat samoja, ts.  $M = E = f$ . Mitä soikeampi (elliptisempi) rata on, sitä enemmän kulmat voivat poiketa toisistaan, koska satelliitin ratanopeus vaihtelee eri osissa rataa Keplerin II lain mukaisesti.

Keskianomalian  $M$  ja eksentrisen anomalian  $E$  välillä on *Keplerin yhtälö*:

$$E - e \sin E = M. \quad (3.15)$$

Keplerin yhtälö on eräs taivaanmekaniikan peruskaavoja, sillä se antaa yhteyden ajan ja satelliitin paikan välille. Valitettavasti  $E$  ei ratkea Keplerin yhtälöstä suljetussa muodossa. Se voidaan laskea iteroimalla tai lukuisista erilaisista sarjakehitelmistä. (Eli tässä nyt lopulta on se syy miksi liikeyhtälöä (3.5) ei voi ratkaista suljetussa muodossa!)

Keplerin yhtälön iterointi sujuu parhaiten kirjoittamalla (3.15) muotoon

$$E = M + e \sin E. \quad (3.16)$$

Arvataan aluksi  $E$ :n ensimmäinen likiarvo. Koska GNSS-satelliiteille  $e$  on hyvin pieni, on  $E \approx M$ . Sijoitetaan tämä  $E$ :n paikalle yhtälön oikealle puolelle ja lasketaan seuraava  $E$ :n arvo. Sijoitetaan tämä puolestaan yhtälön oikealle puolelle. Iterointia jatketaan, kunnes  $E$ :n arvot eivät halutulla tarkkuudella enää muutu. Kun  $e$  on pieni, suppenee iterointi jo parilla kierroksella. Laskennan aikana kulmat on oltava radiaaneina.

Satelliitin paikan laskeminen sujuu siis seuraavan reseptin mukaan: Kun tunnetaan perigeumin ohituksesta kulunut aika  $t - \tau$  ja satelliitin kiertoaika  $P$  (kaavasta (3.11)), saadaan keskianomalia  $M$  (3.14). Sijoitetaan se yhtälöön (3.16) ja ratkaistaan  $E$ . Tämän jälkeen saadaan yhtälöstä (3.12) vektorin  $\mathbf{r}$  komponentit. Koska ne luonnollisen anomalian avulla lausuttuina ovat  $r \cos f$  ja  $r \sin f$ , on

$$\mathbf{r} = a \begin{pmatrix} \cos E - e \\ \sqrt{1 - e^2} \sin E \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos f \\ \sin f \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Satelliitin nopeuden laskemiseksi derivoidaan  $\mathbf{r}$ :n lauseke ajan suhteen:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{na^2}{r} \begin{pmatrix} -\sin E \\ \sqrt{1 - e^2} \cos E \end{pmatrix} \\ \dot{r} &= \frac{na^2}{r} \sqrt{1 - (e \cos E)^2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Derivoinnissa vastaan tuleva  $\dot{E}$  saadaan differentioimalla Keplerin yhtälö, josta  $\dot{E} = na/r$ , missä satelliitin keskiliiken  $= 2\pi/P$ .

# Liite A

## Vektori- ja matriisilaskentaa

Tässä kirjassa on merkintöjen yksinkertaistamiseksi käytetty monin paikoin vektoreita ja matriiseita. Seuraavassa listataan joitakin tärkeimpiä määritelmiä ja laskusääntöjä. Esittelemme myös yhden matriisilaskennan käyttökohteen, kiertomatriisit.

Tässä kirjassa matriiseja merkitään isoilla lihavoiduilla kirjaimilla ja vektoreita pienillä. Niinpä  $\mathbf{A}$  on matriisi,  $\mathbf{a}$  vektori ja  $a$  skalaari. Joissakin lähteissä vektorien päälle saatetaan piirtää nuoli,  $\vec{x}$ , matriisien alle viiva,  $\underline{\mathbf{A}}$ .

### A.1 Vektorit

*Vektori* on olio, jolla on sekä pituus että suunta. Vektori voidaan esittää komponenttiensa avulla, esimerkiksi 3-ulotteisen vektorin  $\mathbf{x}$  komponentit ovat

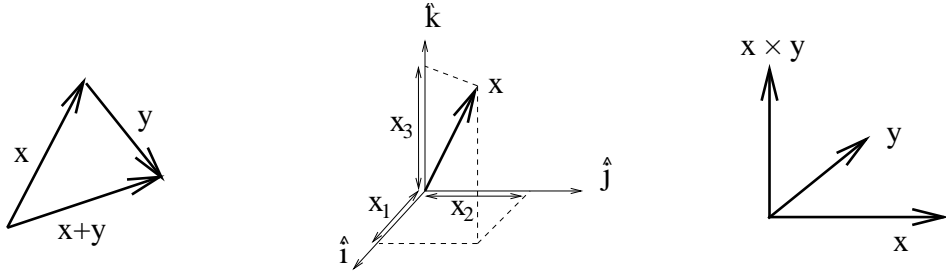
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Vektoreiden *yhteenlasku* tapahtuu laskemalla yhteen vastaavat komponentit

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$

ja skalaarikertolasku kertomalla komponentit yksittäin skalaarilla

$$a\mathbf{x} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ ax_3 \end{pmatrix}$$



**Kuva A.1:** Vektorien  $\mathbf{x}$  ja  $\mathbf{y}$  summa (vasemmalla), kolmiulotteisen avaruuden vektori  $\mathbf{x}$  ja sen komponentit  $x_1, x_2, x_3$  yksikkövektorien  $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$  virittämässä ortonormaalissa koordinaatistossa (keskellä) ja vektorien  $\mathbf{x}$  ja  $\mathbf{y}$  ristitulo (oikealla;  $\mathbf{x}$  ja  $\mathbf{y}$  ovat samassa tasossa ja  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  on tason normaalin suuntainen).

Vektoreiden yhteenlasku toteuttaa normaalit, skalaareiden laskennasta tutut säännöt,

$$\begin{aligned}\mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{y} + \mathbf{x} \\ \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}.\end{aligned}$$

Vektorin normi (pituus) on Euklidisessa (laakeassa) avaruudessa tuttu

$$x = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Vektoreiden *pistetulo* (sisätulo) on skalaari, joka saadaan kertomalla vektoreiden vastaavat elementit keskenään ja laskemalla ne yhteen

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = xy \cos(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

missä  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  on vektoreiden välinen kulma. Ortogonaalisten (toisiaan vastaan kohtisuorien) vektoreiden pistetulo on nolla ja vektorin pistetulo itsensä kanssa antaa vektorin pituuden,  $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$ .

Vektoreiden  $\mathbf{x}$  ja  $\mathbf{y}$  vektoritulo (ristitulo)  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  sen sijaan on vektori, joka on kohtisuorassa sekä  $\mathbf{x}$ :ää että  $\mathbf{y}$ :tä vastaan. Laskusäännön muistaa parhaiten kirjoittamalla vektorin komponentit determinantin muotoon (tässä  $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$  ja  $\hat{\mathbf{k}}$  ovat  $x$ -,  $y$ - ja  $z$ -akselien suuntaan olevat yksikkövektorit)

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \times \mathbf{y} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= (x_2y_3 - x_3y_2)\hat{\mathbf{i}} + (x_3y_1 - x_1y_3)\hat{\mathbf{j}} + (x_1y_2 - x_2y_1)\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

Vektoritulo on antikommutatiivinen, ts.  $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$ . Yhdensuuntaisten vektorien ristitulo on 0.

## A.2 Matriisit

*Matriisilaskenta* on usein hyvä tapa esittää laskutoimitukset kompaktissa muodossa. Koska matriisit soveltuvat hyvin myös tietokoneella laskettaviksi on niiden käyttökin yksinkertaista ja helppoa verrattuna siihen että kaavoja käsiteltäisiin aukikirjoitettuna. Matemaattisessa mielessä matriisi voidaan käsittää lineaarikuvaukseksi, joka kuvaa vektorin  $\mathbf{x}$  vektoriksi  $\mathbf{x}'$ . Matriisin ja vektorin tulo on siis vektori, jonka dimensio on sama kuin alkuperäisenkin vektorin.

Matriisi voi sisältää mielivaltaisen määrän vaaka- ja pystyrivejä, mutta tässä kirjassa käsittelemme useimmin  $3 \times 3$ -matriiseja (paitsi pienimmän neliösumman laskuissa, joissa matriisit saattavat olla hyvinkin isoja),

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Matriisin  $\mathbf{A}$  alkioihin  $a_{ij}$  viitataan kahdella alaindeksillä, joista ensimmäinen ilmoittaa *rivin* ja toinen *sarakkeen*. *Yksikkömatriisi* on muotoa:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seuraava yksinkertainen esimerkki selvittää matriisinotaation etuja. Operoidaan matriisilla  $\mathbf{A}$  vektoriin  $\mathbf{x}$ , jolloin saamme uuden vektorin  $\mathbf{x}'$ :

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

eli

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

eli

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{cases}$$

Edellinen esimerkki selvittää myös kuinka matriisin ja vektorin kertolasku tapahtuu. Identtisesti edellisen kanssa saadaan kahden matriisin kertolaskussa tulomatriisin komponentit

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \sum_k a_{1k}b_{k1} & \sum_k a_{1k}b_{k2} & \cdots \\ \sum_k a_{2k}b_{k1} & \sum_k a_{2k}b_{k2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

ts. matriisin  $\mathbf{C}$  alkio on

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}.$$

Matriisin kertolasku ei ole kommutatiivinen, ts.  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ . Niinpä matriiseja kerrottaessa on pidettävä huolta siitä missä järjestyksessä laskutoimitukset suoritetaan.

Yksikkömatriisin avulla voidaan määrittellä *käänteismatriisi*  $\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

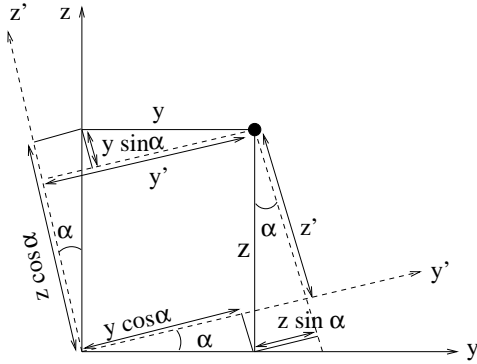
Matriisi on *singulaarinen*, ts. sillä ei ole käänteismatriisia, jos jokin sen lävistäjän alkiosta tai sen *determinantti* on nolla. Determinantti määritellään  $2 \times 2$  matriisille

$$\text{Det}\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Useampiulotteisille matriiseille determinantti voidaan laskea alideterminanttien avulla;  $3 \times 3$  matriisin determinantti on jo kirjoitettu edellä vektoritulon yhteydessä. *Matriisin jälki* on sen lävistäjän alkioden summa,  $\text{tr}\mathbf{A} = \sum_i a_{ii}$ . *Matriisin transpoosi*  $\mathbf{A}^T$  saadaan kirjoittamalla alkuperäisen matriisin rivit sarakkeiksi:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

*Matriisin ominaisarvot*  $\lambda$  saadaan yhtälön  $\text{Det}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$  ratkaisuna.



**Kuva A.2:** Pistein paikka  $yz$ -tasossa sekä kierretyssä koordinaatistossa  $y'z'$ .

### A.3 Kiertomatriisit

Tarkastellaan aluksi kuvan A.2 tilannetta, jossa piste on  $yz$ -tasossa. Koordinaatistoa voidaan kiertää  $x$ -akselin ympäri ilman, että pisteen  $x$ -koordinaatti muuttuu. Pistein koordinaatit ovat kulman  $\alpha$  verran kierretyssä koordinaatistossa

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \cos \alpha + z \sin \alpha \\ z' = -y \sin \alpha + z \cos \alpha \end{cases}$$

Matriisimuodossa sama voidaan kirjoittaa

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \mathbf{R}_1(\alpha) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Matriisia  $\mathbf{R}_1(\alpha)$  kututaan *kierromatriisiksi*. Se kuvaa koordinaatistossa  $A$  olevan pisteen koordinaatistoon  $B$ , jota on kierretty kulman  $\alpha$  verran  $x$ -akselin ympäri. Kierrot  $y$ - tai  $z$ -akselin ympäri voidaan kirjoittaa samalla tavalla kiertomatriisin avulla.

$$\mathbf{R}_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_2(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_3(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Edellinen voidaan yleistää kahteen mielivaltaiseen koordinaatistoon. Oletetaan, että meillä on kaksi karteesisista koordinaatistoa  $A$  ja  $B$ , joiden origot poikkeavat toisistaan vektorin  $\mathbf{p}$  verran ja koordinaatistot ovat myös kiertyneet toistensa suhteen. Koordinaatistossa  $A$  esitetty vektori  $\mathbf{r}$  voidaan muuntaa koordinaatistoon  $B$  vektoriksi  $\mathbf{r}'$  operoimalla siihen *kiertomatriisilla*  $\mathbf{R}$  ja siirtämällä vektorin  $\mathbf{p}$  verran:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma)\mathbf{r} + \mathbf{p}$$

Kiertomatriisien järjestys riippuu siitä, missä järjestyksessä kierrot suoritetaan, sillä matriisitulo ei ole vaihdannainen,

$$\mathbf{R}_1(\alpha)\mathbf{R}_2(\beta) \neq \mathbf{R}_2(\beta)\mathbf{R}_1(\alpha).$$

Kierrot on siis suoritettava oikeassa järjestyksessä. Jokainen voi todeta tämän helposti pyörittelemällä hetken Rubikin kuutiota. Samoin on huomattava, mikä on positiivinen kiertosuunta, koska eri maissa käytäntö vaihtelee sen suhteen mihin suuntaan kulma kasvaa.

Kiertomatriisin käänteismatriisi suorittaa kierron vastakkaiseen suuntaan. Se saadaan yksinkertaisesti vaihtamalla kiertokulman etumerkki. Kuten matriiseista nähdään, ainoa vaikutus on että sinien etumerkit vaihtuvat ( $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ,  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ ).

## Harjoituksia

1. Osoita, että vaihtamalla kiertokulman etumerkki kiertomatriisissa, siitä tulee alkuperäisen matriisin käänteismatriisi.
2. Olkoon vektori

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Koordinaatistoa kierretään  $x$ -akselin ympäri  $20^\circ$  ja  $y$ -akselin ympäri  $5^\circ$ . Laske  $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\mathbf{r}$  ja  $\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1\mathbf{r}$



## **Liite B**

# **Karttaprojektiot**

tänne karttaprojektiot



# Liite C

## Lähdekirjallisuutta

Bagley, L. C., and Lamons, J. W. (1992): Navstar joint program office and a status report on the GPS program. *Proceedings of the sixth international geodetic symposium on satellite positioning, Columbus, Ohio*, 21 – 30.

Beutler, G., and Rothacher, M. (1997): The role of GPS in the study of global change. *European Geophysical Society, XXII General Assembly, Vienna, April 22, 1997*.

Bomford, G. (1980): *Geodesy*, 4th edition, Oxford University Press.

Boucher, C. and Altamimi, Z. (1992): The EUREF Terrestrial Reference System and its First Realizations. *Report on the Symposium of the IAG Subcommission for the European Reference Frame (EUREF) held in Florence 28 - 31 May 1990*. Veröffentlichung der Bayerischen Kommission für die Internationale Erdmessung bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Heft **52**, München, 205 - 209.

### **Boucher, C. and Z. Altamimi (2001):**

Brettenbauer, K. (1995): Die Gauss-Krüger Abbildung einfach dargestellt. *Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation*, Heft **3/1995**, 146-150.

Ekman, M. (1989): Impacts of Geodynamic Phenomena on Systems for Height and Gravity. *Bulletin Géodésique*, **63**, 281-296.

**Ekman M. (1993):** Postglacial rebound and sea level phenomena, with special reference to Fennoscandia and the Baltic Sea. In *Geodesy and Geophysics. Lecture notes, NKG Autumn School 1992 organized by Nordiska Kommissionen för Geodesi, Korpilampi, Finland*. (Ed. J. Kakkuri). Publications of the Finnish Geodetic Institute **115**, 7-70.

Forsberg, R.,(1989): NKG Nordic Standard Geoid 1989. *Proceedings of the 11th General Meeting of the Nordic Geodetic Commission, Copenhagen 7. - 11. May, 1990*. (Ed. Andersen, O.B., and Engsager, K.) Kort- og Matrikelstyrelsen, Copenhagen.

- Forssell, B. (1997): Technical comparison between the GLONASS and GPS concepts. *Geodetic applications of GPS. Nordisk forskarkurs i geodesi. NKG summerschool, Båstad, 26.8. – 1.9.1996.* (Ed. Bo Jonsson) Reports in Geodesy and Geographical Information Systems. LMV Rapport **1997:16**. Gävle.
- Habrich, H. (1999):** Geodetic Applications of the Global Navigation Satellite System (GLONASS) and of GLONASS/GPS Combinations. *Inauguraldissertation der Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bern.* University of Bern, 137 p.
- Heiskanen, V. A. (1948): *Tähtitiede*, I osa, WSOY, Porvoo.
- Heiskanen, W. A. and Moritz, H. (1967):** *Physical Geodesy.* Freeman.
- Hiller, W., Lautenbach, P., Wlaka, M. (1997): Seeking Sovereignty: A European Navigation Satellite System. *GPS World*, Sept. -97, 56 – 60.
- Hirvonen, R. A. (1949): Die Gauss-Krügersche Projektion für breite Meridianstreifen auf dem Internationalen Ellipsoide. *Veröffentlichungen des Finnischen Geodätischen Institutes*, **36**. Helsinki.
- Hirvonen, R.A. (1970): The use of subroutines in geodetic computations. *Maanmittaus* **1-2/1970**, 44-50. Helsinki.
- Hofmann-Wellenhopf, B., Lichtenegger, H., Collins, J. (1994): *GPS. Theory and Practice.* 3rd edition. Springer-Verlag, Wien.
- Hooijberg, M. (1997): *Practical Geodesy using computers.* Springer-Verlag Berlin, Heidelberg.
- GLONASS (2004): GLONASS:n kotisivut, <http://www.glonass-center.ru/>
- IAG (2004): IAG:n kotisivut, <http://www.iag-aig.org/>
- IGS (2004): International GPS Servicen kotisivut, <http://igsceb.jpl.nasa.gov/>
- ILRS (2004): International Satellite Laser Ranging Servicen kotisivut, <http://ilrs.gsfc.nasa.gov/>
- IVS (2004): International VLBI Servicen kotisivut, <http://ivscc.gsfc.nasa.gov/>
- Jokela, J. (1994):** The 1993 Adjustment of the Finnish First-Order Terrestrial Triangulation. *Publications of the Finnish Geodetic Institute*, **119**. Helsinki.
- Kakkuri, J. (1973):** Stellar triangulation with balloon-borne beacons. *Publications of the Finnish Geodetic Institute*, No. **76**.
- Kakkuri, J. (Ed.) (1995): *Geodetic operations in Finland 1992-1995.* Helsinki.
- Kakkuri, J. and Poutanen, M. (1997): Geodetic determination of the surface topography of the Baltic Sea. *Marine Geodesy*, **20**, no 4.

- Karttunen, H., Donner, K. J., Kröger, P., Oja, H., Poutanen, M. (2003):** *Tähtitieteen perusteet*, Ursa, Helsinki.
- Kelsey, J., and Ashkenazi, V. (1979):** Contribution of Space Techniques to National and Continental Geodetic Networks. *Publications of the Finnish Geodetic Institute*, No. **89**, 88 – 97.
- Korhonen, J. (1967):** Coordinates of the stations in the first order triangulation of Finland. *Publications of the Finnish Geodetic Institute*, **64**. Helsinki.
- Kukkamäki T. J., 1978:** Väisälä interference comparator. *Publications of the Finnish Geodetic Institute*, **87**. Helsinki.
- Kukkamäki, T. J., and Hirvonen, R. A. (1954):** The Finnish Solar Expeditions to the Gold Coast and Brazil 1947. *Publications of the Finnish Geodetic Institute*, No. **44**. Helsinki.
- Lamons, J. W. (1990): A Program Status Report on the Navstar Global Positioning System (GPS). *Proceedings of the Second International Symposium on Precise Positioning with the Global Positioning System*, Ottawa, 3 – 8.
- Langley R. B. (1992): Basic Geodesy for GPS, *GPS World*, February 1992, 44 – 49.
- Langley R. B. (1997): GLONASS – Review and Update. *GPS World*, July 1997, p.46.
- Lantmäteriverket (1993): *Handbok till mätningsskuggörelsen. Geodesi, GPS*. Lantmäteriverket, Gävle.
- Leick, A., 1990: *GPS Satellite Surveying*. John Wiley & Sons, New York
- Liikenne- ja viestintäministeriö (2003): Liikenneväyläpalvelut vuosina 2004–2007.
- Markkanen, T. (2003):** Maantieteellinen pituus – paikanmäärityksen vuosituhantinen haaste, kirjassa Poutanen M. (toim.) *Maan muoto*. Ursa, Helsinki.
- McCarthy, D.D. and G. Petit (Ed.) (2004):** IERS Conventions (2003). *IERS technical note 32*. Central Bureau of IERS - Observatoire de Paris. <http://www.iers.org>
- McDonald, K.D. (2002):** The modernization of GPS: Plans, new capabilities and the future relationship to Galileo. *Journal of Global Positioning Systems*, **1**, No. 1: 1–17.
- Milbert D. G. (1992): GPS and Geoid90 - the new level rod. *GPS World*, February 1992, 38-43.
- Mueller, I.I. (1990): Satellite positioning and the IAG. Keynote Address, *Proceedings of the Second International Symposium on Precise Positioning with the Global Positioning System*, Ottawa, xlviii – lxvi.
- NIMA (2000):** Department of Defence World Geodetic System 1984, Its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems. *Technical Report*, NI-MA TR8350.2. Third Edition, Amendment 1, 3 Jan. 2000. [http://earth-info.nga.mil/GandG/tr8350\\_2.html](http://earth-info.nga.mil/GandG/tr8350_2.html)

- Ollikainen, M. (1993):** GPS-koordinaattien muuttaminen Kartastokoordinaateiksi. *Geodeettinen Laitos, tiedote* **8**. Helsinki.
- Ollikainen, M. (1994a): WGS-84 systeemin ja Kartastokoordinaattijärjestelmän (KKJ) välinen muunnos 2. asteen polynomien avulla. *Geodeettinen laitos, sisäinen tiedote*.
- Ollikainen, M. (1994b): Geometrinen geodesia. Geofysiikan cum laude -kurssi. Luentomoniste.
- Ollikainen, M. (1995): The Finnish Geodetic Coordinate Systems and Realisation of the EUREF-89 in Finland. *Coordinate systems, GPS and Geoid* (Ed. M. Vermeer). *Reports of the Finnish Geodetic Institute*, **95:4**, 151-166. Helsinki.
- Ollikainen, M. (2002):** The Finnish geoid model FIN2000. *Proceedings of the XIV General Meeting of the Nordic Geodetic Commission* (Ed. M. Poutanen, H. Suurmäki).
- Ollikainen M., H. Koivula and M. Poutanen (2000):** The densification of the EUREF network in Finland. *Publications of the Finnish Geodetic Institute*, **129**, 61 pp. Kirkkonummi.
- Parm, T. (1988): Kansallisen koordinaattijärjestelmän luominen Suomessa. *Maanmittaus* **1/1988**, 11-17. Helsinki.
- Poutanen, M. (1995): Some practical aspects of high-precision GPS. *Coordinate systems, GPS and Geoid* (Ed. M. Vermeer). *Reports of the Finnish Geodetic Institute*, **95:4**, 113-123. Helsinki.
- Poutanen M. (toim.) (2003):** *Maan muoto*. Ursa, Helsinki.
- Poutanen, M. ja Jokela, J. (1997):** Mittakaavojen äiti täyttää 50. *Tiede* **2000** **6/97**, 38-40.
- Poutanen, M., Vermeer, M., Mäkinen, J. (1996): The permanent tide in GPS positioning. *Journal of Geodesy* **70**, 499-504.
- Seeber G. (2003):** *Satellite Geodesy*. de Gruyter, Berlin, New York. 2nd Edition
- Vanicek, P. and Krakiwsky, E. (1986): *Geodesy. The Concepts*. Elsevier.
- Vermeer, M. (1995): Two new geoids determined at the FGI. *Reports of the Finnish Geodetic Institute*, **95:5**. Helsinki
- Väisälä, Y. (1923):** Die Anwendung der Lichtinterferenz zu Längenmessungen auf größeren Distanzen. *Veröffentlichungen des Finnischen Geodätischen Institutes*, **2**. Helsinki.
- Wells, D. et al. (1987): *Guide to GPS Positioning*, Canadian GPS Associates, Fredericton, N.B., Canada.

# Hakemisto

- 1. eksentrisyys, 92, 94
- aberraatio, 57
- affiininen muunnos, 100, 104
- aika, 62
- aikavyöhyke, 67
- ajan mittaaminen, 62
- ajantasaus, 64
- Aleksandria, 12
- Aleksanteri Suuri, 12
- altimetri, 37
- alueellinen koordinaatisto, 83
- Aniara, 129
- apogeum, 134
- Apollo-lennot, 32
- astemittaus, 13
- Astronomical Almanac, 55
- atsimuutti, 44, 51, 109
- Auringon massaa, 131
- auringonpimennyskeino, 13, 14
- Aurinko, 11, 131
  - säteilypaino, 31
- aurinkokunta
  - barysentri, 61
- aurinkovuorokausi, 47
- barysentriäinen dynaaminen aika, 67
- barysentriäinen koordinaattiaika, 67
- BIH, 81
- bilineaarinen interpolointi, 101
- Blokki I, 17
- Blokki II, 18
- Blokki III, 19
- Brahe, T., 12
- broadcast ephemeris, 82
- Bureau International de l'Heure, 67
- Bursa-Wolf -muunnos, 99
- C/A-koodi, 19
- CHAMP, 113
- Champ, 32
- Chandlerin jakso, 78
- CIO, 78, 97
- CNES, 36, 37
- Condamine, C.-M. de la, 13
- Conventional International Origin, 78
- Crace, 31
- CTRS, 73, 74, 79, 81, 82
- CTS, *katso* CTRS
- Dareios III, 12
- deformaatiomittaukset, 19
- dekliinaatio, 42, 45, 46, 51, 53, 55, 61, 125
- DGPS, 8, 27
- differentiaalinen paikannus, *katso* DGPS
- DMA, 17, 81
- DoD, 80
- DoD, Department of Defence, 16
- Doodsonin vakio, 125
- Doppler, 36
- Doppler-paikannus, 15
- Doppler-satelliitti, 16
- DORIS, 28, 36, 78, 79
  - sovellukset, 36
  - verkko, 37
- DOT, Department of Transport, 16
- DOY, 69
- dynaaminen järjestelmä, 61

- ED50, 88, 108  
 ED79, 91  
 ED87, 91  
 efemeridiaika, 65, 67  
 efemeridisekunti, 65  
 EGM96, 113, 123  
 EGNOS, 27  
 EIGEN, 113  
 ekliptika, 46, 53, 61, 134  
 ekliptikan kaltevuus, 54, 55  
 eksentrisen anomalia, 137  
 eksentrisyys, 132, 134  
 ekvaattori, 46, 53  
 Ekvaattorijärjestelmä, 46  
 ekvaattoritaso, 45  
 ellipsirata, 129  
 ellipsoidi, 92, 93  
     GRS80, 74, 93  
     Krassovski, 23, 93  
     WGS84, 23, 93  
 Envisat, 32, 36  
 EOP, 62  
 EPN, 84, 86  
 epookki, 53  
 eranto, 45  
 Eratosthenes, 11, 12  
 erillisjärjestelmät, 91  
 erotuskyky, 32  
 ESA, 27  
 etelämeridiaani, 47  
 ETRF, 84  
 ETRF89, 83, 104  
 ETRS, 82  
 ETRS-TM35FIN, 87  
 ETRS89, 83–86  
 Euler, L. , 13  
 EUREF, 83, 119  
 EUREF-FIN, 72, 82, 85, 86, 91, 104, 107  
 EUREF89, 84  
 Eurocontrol, 27  
 Eurogeographics, 84  
 Euroopan komissio, 27, 83  
 eustaattinen nousu, 120  
 EVRF2000, 119  
 EVRS, 119  
 FIN2000, 114, 115, 119, 122, 123  
 FinnRef, 80, 85, 86  
 FK5-tähtiluettelo, 60  
 foinikialaiset, 39  
 GAIA, 62  
 Galileo, 5, 21, 24, 28, 82  
     aikataulu, 25  
     inklinaatio, 135  
     kiertoaika, 26  
     kustannukset, 25  
     ominaisuudet, 10  
     radat, 10, 26  
     signaali, 24, 27  
 Galileo System Time, *katso* GST  
 Galileo Terrestrial Reference Frame, *katso*  
     GTRF  
 Gaugamelan taistelu, 12  
 Gauss, K.F., 93  
 Gauss-Krüger -projektio, 87, 89, 108  
 Gemma Frisius, 12  
 Geodeettinen laitos, 80, 86, 106  
 geodeettinen verkko, 13  
 geodesia, 19, 32  
 geodynamiikka, 36  
 geoidi, 40, 65, 73, 110–112  
 geoidimalli, 111, 115, 122  
 geoidin nousu, 120  
 geoidinkorkeus, 110, 111, 114, 115  
 geopotentiaali, 109  
 geopotentiaaliero, 109  
 geopotentiaaliluku, 112  
 geopotentiaaliyksikkö, 110  
 geosentrinen, 42, 56  
 geosentrinen koordinaattiaika, 67  
 globaali koordinaatisto, 31, 106  
 Global Navigation Satellite System, *katso*  
     GNSS  
 GLONASS, 5, 20, 28, 103  
     aika, 24



- inklinaatio, 135
- koodi, 22
- massa, 21
- ominaisuudet, 10
- radat, 10, 20, 22, 24
- ratatiedot, 23
- satelliitti, 20, 21
- signaali, 22, 23
- taajuus, 21
- uudistaminen, 24
- GNSS, 5, 40
  - tarkkuus, 8
- GOCE, 115
- GPS, 5, 16, 21, 28, 78
  - aika, 24
  - broadcast radat, 82
  - inklinaatio, 135
  - käyttäjät, 16
  - kiertoaika, 17
  - kontrolliverkko, 16
  - koodi, 19
  - ominaisuudet, 10
  - radat, 10, 17, 20
  - satelliitit, 16
  - taajuudet, 19
  - tarkat radat, 80
  - tarkkuus, 9
  - vastaanotin, 91
- GPS Galileo Time Offset, 71
- GPS-aika, 69
- GPS-ohjelmat, 79
- GPS-satelliitit, 17, 32
  - lukumäärä, 17
- GPS-satelliitti, 7, 69
- GPS-signaali, 8, 58
- GPS-vastaanotin, 32, 69
- GPS-vastaanottimet, 108
- GPS-verkko, 79
- GPS-viikko, 69
- GPST, 69
- GRACE, 113
- Grace, 32
- gravitaatiovakio, 31, 130
- Greenwichin meridiaani, 73, 78, 97, 133, 134
- GRGS, 36
- GRS80, 74, 79, 81, 95, 96, 113, 114
- GST, 71
- GTRF, 82
- Hamina, 111
- havaintoyhtälö, 28
- Helmert-muunnos, 44, 89, 98, 102, 108
- Helsingin järjestelmä, 89
- Helsinki, 111
- Herakleen patsaat, 39
- Herodotos, 39
- Hipparcos-satelliitti, 60
- Hirvonen, R.A., 13
- horisontti, 44
- horisonttijärjestelmä, 44
- horisonttikoordinaatisto, 44
- I luokan kolmioverkko, 86, 88
- IAG, 32, 36, 74, 79, 119
- IAU, 55, 60
- ICRF, 60, 65, 96
- ICRS, 60
- IDS, 38
- IERS, 62, 67, 79, 97
- IERS:n referenssimeridiaani, 79
- IERS:n referenssinapa, 79
- IGLOS, 24, 83
- IGN, 36
- IGS, 17, 80, 82, 83
- ilmakehä
  - viive, 28
- ILRS, 32
- impulssimomentti, 132
- inertiaalikoordinaatisto, 60, 63, 67
- inklinaatio, 17, 134, 135
- Inmarsat, 27
- International Astronomical Union, *katso* IAU
- International DORIS service, *katso* IDS

- International Earth Rotation and Reference Systems Service, *katso* IERS
- International GNSS Service, *katso* IGS, *katso* IGS
- International GPS Service, *katso* IGS
- International Laser Ranging Service, *katso* ILRS
- International VLBI Service for geodesy and astrometry, *katso* IVS
- interpolointi, 101
- invarlanka, 89
- ionosfääri, 36, 58
- ISO19111, 41
- isoakselin puolikas, 131, 134
- isoympyrä, 42
- iterointi, 93
- ITRF, 37, 62, 79, 81, 83–85, 91, 95–97, 101, 109
- ITRF-2000, 80, 85
- ITRF2000, 79, 102, 104
- ITRS, 79, 82
- IUGG, 79
- IVS, 36
- jääkausi, 119
- jäännösvirhe, 104
- jälkilaskenta, 11
- Jason, 36
- JHS153, 41, 86, 105
- JHS154, 86, 87, 104, 107
- JPO, Navstar GPS Joint Program Office, 16
- juliaaninen kalenteri, 48
- juliaaninen päivä, 48, 50, 70
- juliaaninen vuosisata, 48, 54
- Julkisen hallinnon suositus, *katso* JHS
- käänteismatriisi, 142
- käänteistehtävä, 93
- kahden kappaleen järjestelmä, 130
- Kakkuri, J., 14
- Kansainvälinen (1924) ellipsoidi, 108
- kansainvälinen atomiaika, 24, 65
- Kansainvälinen ellipsoidi, 96
- kansainvälinen ellipsoidi 1924, 88
- Kansainvälinen geodeettinen assosiaatio, *katso* IAG
- Kansainvälinen Geodeettis-Geofysikaalinen Unioni, *katso* IUGG
- Kansainvälinen tähtitieteen unioni, *katso* IAU
- kantaaallon vaihe, 9
- karkaussekunti, 24, 66, 69
- Kartastokoordinaattijärjestelmä, *katso* KKJ
- Karthago, 12
- karttaprojektio, 40, 72, 92
- kaukoputki, 28
- kellovirhe, 69
- Keplerin I laki, 133
- Keplerin II laki, 136
- Keplerin III laki, 131, 136
- Keplerin yhtälö:, 137
- keskianomalia, 137
- keskiaurinko, 64
- keskiaurinkoaika, 64
- keskiaurinkovuorokausi, 64
- keskiliike, 138
- keskimeridiaani, 87
- kevättasauspäivä, 49
- kevättasauspiste, 45, 46, 48, 53, 55, 61, 64, 97, 133, 134
- kiertoaika, 17
- kiertokulma, 99
- kiertomatriisi, 51, 97, 99, 143, 144
- kiinteän maan vuoksi, 78, 81
- kinemaattinen järjestelmä, 60
- KKJ, 72, 86, 88, 89, 91, 104, 107–109
- kolmiomittaus, 12
- Kolumbus, K., 12
- konventionaalinen terrestrinen järjestelmä, *katso* CTRS
- konventionaalinen terrestrinen koordinaatisto, 64
- koordinaatisto, 31, 35, 39, 76
- alueellinen, 76
- globaali, 72, 76

- Maahan kiinnitetty, 63, 72
  - origo, 31, 36
  - paikallinen, 72
  - tähtitieteellinen, 60, 63
- koordinaatistomuunnos, 92
- koordinaatistot, 32
- koordinaatti, 39, 72
- koordinaattiero, 94
- koordinaattijärjestelmä, 35, 39
- koordinaattimuunnos, 72, 106
- koordinaattimuunnos, 40
- koordinoitu yleisaika, 66
- korkeudenmuutos, 116
- korkeus
  - ellipsoidinen, 40
  - ortometrinen, 40
- korkeus ellipsoidista, 92, 109
- korkeuskulma, 11, 44
- korrelaattori, 34
- Kukkamäki, T.J., 13
- kulkuaika, 28
- kulminaatio, 44, 47
- kulminaation, 64
- Kuu, 11, 32
- kuulaser, 32, 78, 79
- kuunpimennys, 12
- kuunpimennyskeino, 12
- kvasaari, 35, 36, 60
  
- L1-taajuus, 19
- L2-taajuus, 19
- L5-taajuus, 19
- lähtöpiste, 106
- laattaliikkeet, 102
- Lageos, 15, 31
- Laplace-piste, 89
- Laplacen vuoksikaava, 125
- laserheijastin, 31
- laserpulssi, 28
- Leibnitz, G.F. von, 131
- leveys, 92
- leveysaste, 51, 95, 125
- leveysasteen mittaaminen, 11
  
- liikeyhtälö, 131
- litosfääri, 110
- Loven luku, 124
- Ludvig XIV, 13
- Luna, 32
- luonnollinen anomalia, 133
- luotiviiva, 112
  
- M-koodi, 19
- Maa
  - asento, 32, 35, 36, 63
  - ekvaattori, 61
  - ekvaattoritaso, 134
  - koko, 12, 13
  - litistyneisyys, 13
  - magneettinen napa, 45
  - massakeskipiste, 31, 36, 62, 73, 76, 78, 97
  - muoto, 13, 73
  - navan paikka, 35, 45, 78
  - painovoimakenttä, 31, 32, 36
  - painovoiman potentiaali, 111
  - pyörähdysaika, 47, 64
  - pyöriminen, 32, 36, 63, 65, 67, 74, 125
  - pyörimisakseli, 73, 78
  - pyörimisakselin suunta, 45, 76, 97
  - pyörimisnopeus, 97
  - ratataso, 61
  - vaippa, 110
- Maanmittaushallitus, 89
- Maanmittauslaitos, 86, 104, 106
- maannousu, 9, 85, 109, 118, 119, 121
  - absoluuttinen, 120
  - näennäinen, 120
- maantieteellinen koordinaatisto, 92
- mannerlaatta, 35, 76
- mannerlaattojen liike, 9, 19, 81, 109
- mareografi, 120
- matriisi, 141
  - determinantti, 142
  - jälki, 142
  - ominaisarvot, 142
  - singulaarisuus, 142

- transpoosi, 142  
 Maupertuis, P.L.M. de, 13  
 meridiaani, 44, 45  
 metri, 62  
 Metsähovi, 24, 29, 31, 38, 80, 86, 95, 104, 116, 122  
 modifioitu juliaaninen päivä, 50  
 Molodensky-Badekas -muunnos, 99  
 muunnospinta, 115  
  
 N2000, 117, 118, 122  
 N43, 117  
 N60, 115, 117, 121, 123  
 nadiiri, 44  
 NAP, 118  
 napa, 42  
 napavariaatio, 56, 62, 78, 97  
 navan paikka, 36  
 navigointi, 19  
 navigointiviesti, 69  
 Navstar 1 -satelliitti, 16  
 NAVSTAR GPS, 5  
 neodyymi-YAG -laser, 30  
 Neuvostoliitto, 23  
 Newton, I., 131  
 Newtonin III laki, 131  
 Newtonin liikelait, 60  
 Newtonin vetovoimalaki, 75, 130  
 NGA, 17, 80  
 NIMA, 17, 81  
 NKG, 119  
 NKG2004, 113  
 NKG96, 113  
 NN, 117  
 NNR-NUVEL-1A, 76, 103  
 nollameridiaani, 11, 74  
 normaalikorkeus, 110, 112  
 normaalipainovoima, 74, 112  
 nousevan solmun rektaskensio, 134, 135  
 Nummelan normaaliperusviiva, 89  
 nutaatio, 36, 53–55, 97  
  
 optiset satelliitit, 14  
  
 ortometrinen korkeus, 110, 112, 116, 122  
 Oscar, 15  
 OSU91A, 113  
  
 P-koodi, 19  
 Pageos, 14  
 paikallinen koordinaatisto, 106  
 paikallisaika, 11  
 paikkavektori, 130, 132  
 painovoima, 74, 110  
 painovoimahavainnot, 113  
 pallotähtitiede, 42  
 perigeum, 133, 134  
 perigeumaika, 134, 135  
 perigeumin argumentti, 134, 135  
 perusviiva, 89  
 pikkuympyrä, 42  
 pintanopeus, 136  
 pitkäkantainterferometria, *katso* VLBI  
 pituus, 92  
 pituusaste, 12, 48  
 pituusasteen mittaaminen, 11  
 planeetta, 131  
 planeetta-aberraatio, 57  
 planeetta-prekessio, 54  
 pohjoissuunta, 45  
 poikittaiskaarevuussäde, 73, 93, 95  
 polynomimuunnos, 100  
 potentiaali, 75  
 ppm, 99  
 prekessio, 47, 53, 64, 97  
 pseudoetäisyys, 7  
 pysyvä vuoksi, 125  
 PZ-90, 23, 82, 103  
  
 radioteleskooppi, 33  
 rataelementit, 97, 132, 133  
 rataelementti, 134  
 refraktio, 58  
 rektaskensio, 42, 45, 46, 51, 53, 55, 61  
 retrogradinen, 135  
 RIMS, 27  
 RTK, 9

- Rubikin kuutio, 144
- SA, 19
- satelliitti
- etäisyys, 28, 37, 63
  - paikka, 130
  - radanmääritys, 36, 37
  - radat, 35, 36, 63, 96, 129
  - rata, 131
- satelliittilaser, *katso* SLR
- satelliittivastaanotin, 7
- seinäkello, 47
- sekulaarinen, 53
- sekunti, 62, 65
- selective availability, *katso* SA
- SI-järjestelmä, 62, 130
- sideerinen aika, *katso* tähtiaika signaali
- vaihe-ero, 34
- SLR, 15, 21, 28–30, 78, 79
- Snellius, W., 12
- Spot, 36
- Sputnik, 14
- Struve, F.G.W., 13
- Struven ketju, 13
- suhteellinen mittaus, 9, 106
- suhteellinen paikannus, 8
- suorakulmainen koordinaatisto, 92
- Syene, 12
- synodinen aika, 47, 64
- syystasauspäivä, 49
- tähtiaika, 46–48, 63, 64, 78, 97, 133
- Greenwichissä, 49
  - keskimääräinen, 55, 97
  - laskeminen, 49
  - todellinen, 55, 97
- tähtikolmiomittaus, 13
- tähtitieteellinen yksikkö, 131
- tähtivuorokausi, 20, 47
- TAI, 65, 69
- taivaanmekaniikka, 129
- taivaannavan korkeus, 51
- taivaanpallo, 42
- takymetri, 106
- tarkat radat, 82
- tarkkavaaitus, 110, 117, 118
- tasokoordinaatisto, 86
- terrestrinen aika, 67
- terrestrinen dynaaminen aika, 67
- Topex/Poseidon, 32, 36
- toposentrinen, 42, 56
- Transit Doppler, 15
- troposfääri, 36, 58
- tukiasema, 8
- tuntikulma, 46–48, 125
- UELN, 118
- Universal time, *katso* UT
- US Naval Observatory, 69, 97
- UT, 64
- UT1, 64, 66, 74, 78
- UTC, 24, 66, 69
- Väisälä, Y., 13
- Väisälä-komparaattori, 89
- vaaitsija, 109
- vaaitus, 40, 109, 110, 116
- vaaituskone, 109
- vanha valtion järjestelmä, 89
- vektori, 139
- vertausellipsoidi, 73, 79, 110
- vertausjärjestelmä, 74
- vertikaali, 44
- vetovoima, 124, 130
- vetovoimavakio, 74
- vetymaser, 33, 69
- VLBI, 8, 28, 32, 33, 60, 63, 78, 79, 84
- vuoksi, 119
- vuokspotentiaali, 125
- vuorokauden pituus, 66
- vuorokausi
- sideerinen, 64
  - synodinen, 64
- vuorovesivoimat, 78
- vuosi

trooppinen, 65  
vyöhyke aika, 49, 67

WAAS, 28

Walbeck, H.J., 93

WGS84, 17, 80, 97, 103, 131  
realisaatio, 81

yhdenmuotoisuusmuunnos, 98, 104

YKJ, 87, 89

yksikkömatriisi, 141

yleisaika, 24, 64

zeniitti, 44, 51

zeniittikulmaa, 44

zeniittiputki, 78