**Termofysik** Räkneövning 3 Hösten 2012

Uppgifterna lämnas in **onsdagen den 26.9 före klockan 12**, till Termofysik-lådan på andra våningen i Physicum. Övningstillfället hålls **torsdagen 27.9 klockan 14** i seminarierummet i Acceleratorlabbet.

1. **Partikelsystem.** Antag att det i ett isolerat system finns $N$ partiklar och att systemets totala energi är $U$. Systemet är sådant, att varje enskild partikel är i ett visst tillstånd som har en viss energi, men energin inte kan anta vilket värde som helst. Istället måste energin vara antingen $\epsilon_1$, eller $\epsilon_2$, eller $\epsilon_3$ osv. Partikeln är alltså på en viss energinivå. Låt oss då säga att systemets partiklar har fördelat sig så, att $n_1$ partiklar befinner sig på den första energinivån med energi $\epsilon_1$, $n_2$ på den andra energinivån med energi $\epsilon_2$ osv. Eftersom antalet partiklar är givet, har vi $\sum_i n_i = N$ och eftersom totala energin är konstant, gäller $U = \sum_i n_i \epsilon_i$.

   (a) Bestäm $\Omega$.

   (b) Betrakta fallet då $N = 7$, och $\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_2 = \epsilon$, $\epsilon_3 = 2\epsilon$ osv. Systemet ges en total energi $U = 4\epsilon$. Bestäm systemets alla makrotillstånd samt antalet mikrotillstånd som tillhör varje makrotillstånd.

2. **Medelenergi.** Betrakta ett system som har endast två tillstånd, det ena tillståndet har energin 0 medan det andra tillståndet har energin $\epsilon$. Systemet befinner sig i en omgivning med temperaturen $T$. Bestäm medelenergin för systemet, och diskutera resultatet för låga och höga temperaturer.

3. **Partitionsfunktion och energi.** En kvantmekanisk harmonisk oskillator har energinivåerna
$$\epsilon_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

   (a) Bestäm dess partitionsfunktion samt energi ifall omgivningen har temperaturen $T$. *Tips: Du kan ha nytta av summaformeln för en geometrisk serie, samt hyperboliska funktionerna.*

   (b) Om $\hbar\omega = 0.3$ eV, vad är skillnaden i de relativa populationerna för det första exiterade tillståndet ($n = 1$) och grundtillståndet ($n = 0$) då gasen är i termisk jämvikt vid $T = 1000$ K?

4. **Värmekapacitet.** I Boltzmannstatistiken ges medelvärdet av en termodynamisk storhet $X$ av
$$\bar{X} = \sum_s X_s p_s = \frac{1}{Z}\sum_s X_s e^{-\beta E_s}$$
Visa, att (a) $U \equiv \bar{E} = -\frac{d \ln Z}{d\beta}$ samt (b) $C_V = k_B T\left[2\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V + T\left(\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial T^2}\right)_V\right]$