

III. Atomen

Materiens Struktur I, 2013

◀◀ ▶▶ ◇ ▶▶▶▶ X 1

III.1. Inledning

Även om grekerna under antiken hade uppfattningen att materien hade en minsta odelbar beståndsdel (*atomos*) var det inte förrän på 1800- och 1900-talen man kom att fundera närmare på dessa "atomer". Hur många atomer finns det i en viss volym av en gas, t.ex.? Hur stora är atomerna? Hur skiljer sig t.ex. väteets atomer från heliums atomer?

1869 presenterade D.I. Mendeleev sitt periodiska system, där han systematiskt listade olika kemiska element efter deras massa. Varje rad i hans tabell listade element efter deras varierande valens (hur villiga de är att reagera kemiskt), och varje kolumn innehöll element med samma valens. Tomma platser förekom i detta system för element som ännu inte upptäckts.

Materiens Struktur I, 2013

◀◀ ▶▶ ◇ ▶▶▶▶ X 2

III.2. Brownsk rörelse

På 1800-talet observerade botanisten R. Brown att pollenkorn i vätska uppvisade en slumpmässig rörelse. I sig tydde detta på att vätskan innehöll "atomer" som utförde en slumpmässig rörelse och på så vis knuffade på pollenkornen. Detta fenomen kom senare att kallas **Brownsk rörelse**.

1905 analyserade Einstein detta fenomen och visade att det kunde användas för att få ett numeriskt värde för Avogadros¹ konstant, som anger hur många partiklar det finns i en given substansmängd (standard-kemisk symbol n , enhet mol) av vilket som helst ämne.

En sfärisk partikel med radien a och massan m som rör sig med hastigheten v i en vätska med viskositeten η motverkas av en viskösa kraft

$$F_{\text{visk}} = -\beta v \quad (III.1)$$

$$\beta = 6\pi\eta a \quad (III.2)$$

¹A. Avogadro, 1776-1856

Materiens Struktur I, 2013

◀◀ ▶▶ ◇ ▶▶▶▶ × 3

Ekv. (III.2) härleddes av G. G. Stokes och är ett approximativt uttryck som man kan få ut ur de fullständiga Navier-Stokes-ekvationer för hydrodynamiska fenomen.

Partiklarna påverkas också av en kraft F_{koll} p.g.a. kollisioner med andra partiklar i vätskan, så att rörelse-ekvationen blir

$$m \frac{dx^2}{dt^2} = F_{\text{koll}} + F_{\text{visk}} = F_{\text{koll}} - \beta \frac{dx}{dt} \quad (III.3)$$

P.g.a. den slumpmässiga rörelsen fram och tillbaka kommer en partikels medeltalsposition (tidsväntevärdet av positionen) att uppfylla

$$E[x] = \langle x \rangle = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^N x(t_i) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} dt x(t) = 0 \quad (III.4)$$

Variansen av positionen definieras som

$$\text{Var}(x) \equiv E[x^2] - (E[x])^2 = \langle x^2 \rangle - (\langle x \rangle)^2 \quad (III.5)$$

Multiplitera ekv. (III.3) med x och ta väntevärdet:

Materiens Struktur I, 2013

◀◀ ▶▶ ◇ ▶▶▶▶ × 4

$$m \left\langle x \frac{dx^2}{dt^2} \right\rangle = \langle x F_{\text{koll}} \rangle - \beta \left\langle x \frac{dx}{dt} \right\rangle \quad (\text{III.6})$$

Kovariansen definieras som

$$\text{Cov}(x) \equiv E[xy] - E[x]E[y] \quad (\text{III.7})$$

och är 0 för icke-korrelerade (oberoende) storheter x, y . För positionen x och kraften F_{koll} , som båda är tidsberoende men inte sammanbundna kan vi nog anta att de är icke-korrelerade:

$$m \left\langle x \frac{dx^2}{dt^2} \right\rangle = -\beta \left\langle x \frac{dx}{dt} \right\rangle \quad (\text{III.8})$$

Notera: $dx^2/dt = 2xdx/dt$ och $d^2x^2/dt^2 = d/dt(2xdx/dt) = 2(dx/dt)^2 + 2xd^2x/dt^2$ så vi får

$$m \left[\frac{1}{2} \left\langle \frac{d^2}{dt^2} x^2 \right\rangle - \left\langle \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right\rangle \right] = -\frac{\beta}{2} \left\langle \frac{d}{dt} x^2 \right\rangle \quad (\text{III.9})$$

Materiens Struktur I, 2013

◆◆◆◆◆ × 5

Notera att enligt ekvipartitionsteoremet

$$2 \times \frac{1}{2} m \left\langle \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right\rangle = 2 \times \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = 2 \times \langle E_{\text{kin}} \rangle = 2 \times \frac{1}{2} k_B T \quad (\text{III.10})$$

Definiera $g(t) = d\langle x^2 \rangle / dt$ så

$$\frac{m dg}{2 dt} + \frac{\beta}{2} g = k_B T \quad (\text{III.11})$$

Hur komma vidare? Approximera $m/\beta \rightarrow 0$ så att partiklarnas sicksackande dominerar över deras tröghet (m) som får dem att färdas linjärt:

$$\frac{\beta}{2} g = k_B T \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta d\langle x^2 \rangle}{2 dt} = k_B T \quad (\text{III.12})$$

Lösningen blir

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2k_B T}{\beta} t = \frac{k_B T}{3\pi\eta a} t \quad (\text{III.13})$$

Materiens Struktur I, 2013

◆◆◆◆◆ × 6

Enligt idealgaslagen

$$pV = Nk_B T = nRT = \frac{N}{N_A} RT \quad (\text{III.14})$$

så

$$\langle x^2 \rangle = \frac{RT}{3\pi\eta a N_A} t \quad (\text{III.15})$$

Genom att mäta $\langle x^2 \rangle$ då man har kunskap om värdet på de övriga storheterna kan man få ett värde för N_A . År 1908 gjorde J.B. Perrin just detta och erhöll ett värde ganska nära det man har idag.

Materiens Struktur I, 2013

◆◆◆◆◆ X 7

III.3. Elektronen

Elektroner upptäcktes i slutet av 1800-talet i **katodstrålning**. Katodstrålning uppträder i ett evakuerat rör då man mellan anoden och katoden — som är inuti röret — pålägger en tillräckligt hög spänning.

I de tidigaste katodstrålerören var den bakomliggande fysiken denna: Det starka elfältet joniserar luftmolekyler och får dem att träffa katoden med hög hastighet. I kollisionerna frigörs elektroner från katoden, som av elfältet accelereras mot anoden.

I modernare rör hettas katoden upp av en separat strömkälla, så att atomerna i katoden förlorar elektroner. Dessa dras sedan av elfältet mot anoden.

1897 identifierade J.J. Thomson elektronen och bestämde e/m -kvoten för den i katodstrålning. Förutom katodstråleröret behövs ett externt elfält och magnetfält.

Materiens Struktur I, 2013

◆◆◆◆◆ X 8

Det externa elfältet avlänkar en elektron i katodstrålningen genom att accelerera den sidledes, så att förflyttningen är

$$\Delta y = \frac{1}{2}a_y t^2 = \frac{1eE}{2m}t^2 = \frac{1}{2}E\frac{e}{m}\left(\frac{\Delta x}{v_x}\right)^2 \quad (\text{III.16})$$

Mätningar ger nu allt utom e/m och v_x . Genom att göra en ny mätning med samma spänning, men genom att lägga till ett magnetfält så att totalkraften på elektronerna försvinner,

$$F_E = eE = ev_x B = F_M \Rightarrow v_x = E/B \quad (\text{III.17})$$

kan man slutligen bestämma e/m från mätdata. Thomson fick dock ett numeriskt värde som inte riktigt överensstämmer med det vi har idag.

Millikans oljedroppsexperiment från och med 1906 bidrog till att få mera kunskap om värdena för e och m . I detta experiment användes laddade oljedroppar som först får falla fritt i ett utrymme mellan två fränkopplade elektroder, och sedan accelereras åt andra hållet av ett påkopplat elfält. Observationer och mätningar görs då oljedropparna har uppnått terminalhastighet.

Materiens Struktur I, 2013

◆◆◆◆◆ X 9

Under fritt fall balanserar luftmotsåndet och tyngdkraften varandra då terminalhastigheten är uppnådd:

$$\beta\frac{y}{t_0} = mg \quad (\text{III.18})$$

Då elfältet är påkopplat:

$$neE = mg + \beta\frac{y}{t} = \beta y \left(\frac{1}{t_0} + \frac{1}{t}\right) \quad (\text{III.19})$$

Genom att bestråla dropparna med röntgenstrålning kan man ändra deras laddning, och får då

$$n'eE = mg + \beta\frac{y}{t'} = \beta y \left(\frac{1}{t_0} + \frac{1}{t'}\right) \quad (\text{III.20})$$

Tillsammans ger dessa

$$\Delta n e = (n' - n)e = \frac{\beta y}{E} \left(\frac{1}{t'} - \frac{1}{t}\right) \quad (\text{III.21})$$

Materiens Struktur I, 2013

◆◆◆◆◆ X 10

Dessa två typens experiment kan kombineras för att tillsammans ge numeriska värden för e och m .

Materiens Struktur I, 2013

◀▶ ◆ ◊ ▶▶▶▶ X 11

III.4. Atommodeller

Runt år 1900 var det allmänt accepterat att elektroner finns nånstans inuti atomen. Från masskillnaden visste man också att den positiva komponenten måste vara mycket tyngre.

Thomson föreslog en modell ("russinbulle-modellen") där den positiva laddningen fyller hela atomen, och där elektroner upptar vissa punkter. En dylik modell är testbar med hjälp av t.ex. partikelbestrålning: genom att bombardera atomer med mindre partiklar och notera hur dessa partiklar sprids, kan man bilda sig en uppfattning om laddningsfördelningen. En av de första experimenten i den här stilen gjorde av E. Rutherford och H.W. Geiger från och med 1909.

Rutherford hade tidigare varit involverad i studier av radioaktivitet, och där stiftat bekantskap med t.ex. α -partiklar, som utsänds vid vissa atomsonderfall. Dessa partiklar — Heliumkärnor — kan användas för att undersöka en atoms laddningsfördelning. Baserat på experiment med guldfolier och α -partiklar kunde Rutherford 1911 presentera sin atommodell: positiva laddningen finns koncentrerad i kärnan, med en storlek av ordningen 10^{-14} m, och elektroner rör sig runt denna som planeterna runt solen.

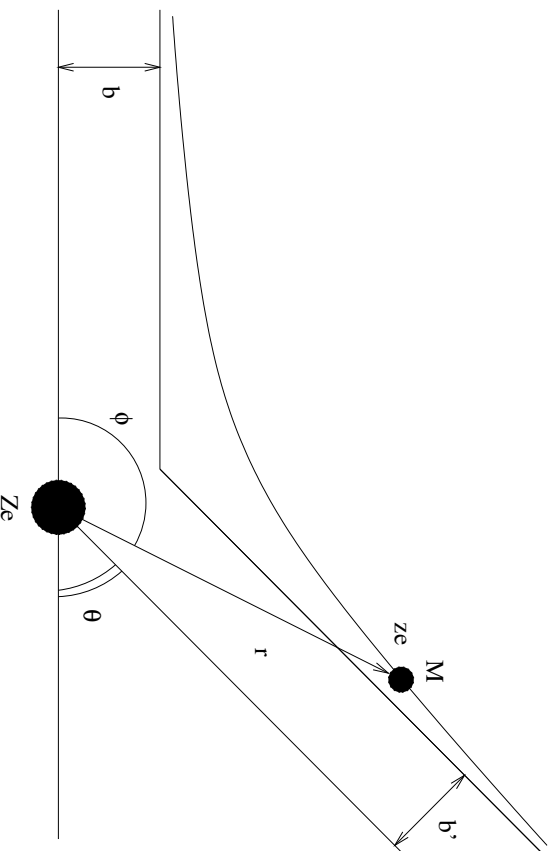
Materiens Struktur I, 2013

◀▶▶▶ ◆ ◊ ▶▶▶▶ X 12

III.5. Rutherfordspredning

Vi behandlar först fallet att en separat partikel skjuts mot en atomkärna. Senare generaliserar vi detta till en partikelstråle som träffar ett material, d.v.s. många atomkärnor.

Låt atomkärnan med laddningen Z_e befinna sig i vila. Den inkommande partikeln har massan M och hastigheten v_1 innan den börjar växelverka med kärnan. Det utgående partikeln har hastigheten v_2 efter att den upphört att växelverka med kärnan.



Figur 1: Rutherfordspredning.

Vi tar först reda på det **minsta möjliga avståndet mellan partikeln och kärnan**, $r^{min} = D$. Detta inträffar då partikeln kommer in rakt på kärnan. Energitbalansen ger

$$\frac{1}{2}Mv_1^2 + 0 = 0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Zze}{D} \quad (III.22)$$

då kärnan tänkes sitta stilla under hela förloppet. Vi får

$$D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Zze^2}{Mv_1^2} \quad (III.23)$$

Vi behandlar nu det allmänna fallet att partikeln avlänkas, d.v.s. sprids.

Energins bevarande tillämpat på den inkommande partikeln ger

$$\frac{1}{2}Mv_1^2 = \frac{1}{2}Mv_2^2 \quad (III.24)$$

Vi ser genast att $v_2 = v_1$.

Materiens Struktur I, 2013

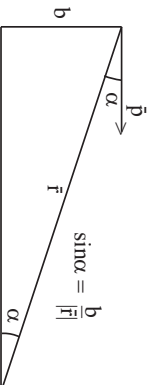
▶▶▶▶◇▶▶▶▶▶ × 15

Härnäst granskar vi konservationen av rörelsemängdsmomentet. För den inkommande partikeln gäller det att

$$L = |\mathbf{L}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = rMv|\sin\alpha| = rMv\frac{y}{r} = Mvy \quad (III.25)$$

För partikeln i $x = -\infty$ gäller

$$L_1 = Mv_1b \quad (III.26)$$



Figur 2: Vi ser var vinkeln α befinner sig i förhållande till r och b .

Materiens Struktur I, 2013

▶▶▶▶◇▶▶▶▶▶ × 16

För den utgående partikeln kan man med liknande resonemang visa att

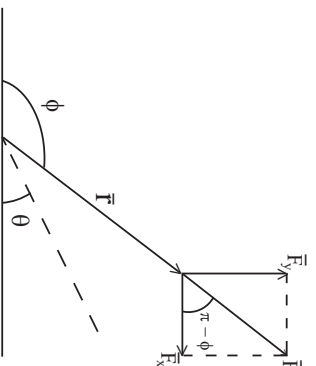
$$L_2 = Mv_2b' = Mv_2b' \quad (III.27)$$

Rörelsemängdsmomentet bevaras, $L_2 = L_1$, så vi får genast att vi måste ha $b' = b$.

Materiens Struktur I, 2013

▶▶▶◆▶▶▶▶▶ X 17

Vid en godtycklig tidpunkt då partikeln växelverkar med kärnan kan man skriva y -komponenten av kraften som partikeln känner av som (se figur 3)



Figur 3: Kraftkomponenterna för partikeln som avlägsnar sig.

$$F_y = M \frac{dv_y}{dt} = F \sin(\pi - \phi) = -F \sin(-\phi) = F \sin \phi = \frac{\sin \phi Zze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (III.28)$$

Efter förenkling erhåller vi

Materiens Struktur I, 2013

▶▶▶▶◆▶▶▶▶▶ X 18

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{\sin \phi Z z e^2}{4\pi\epsilon_0 M r^2} \quad (III.29)$$

Vi behöver ett uttryck för r^2 och tar rörelsemängdsmomentet till hjälp. I allmänhet gäller

$$\begin{aligned} L &= |\mathbf{L}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = M|\mathbf{r} \times \mathbf{v}| \\ &= r^2 M \frac{|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|}{r^2} \end{aligned} \quad (III.30)$$

$$\equiv r^2 M |\omega| \quad (III.31)$$

$$= r^2 M \frac{d\phi}{dt} \quad (III.32)$$

Vi löser ut $1/r^2$, och använder rörelsemängdsmomentets bevarande:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{M d\phi}{L dt} = \frac{M}{M v_1 b} \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{v_1 b} \frac{d\phi}{dt} \quad (III.33)$$

Materiens Struktur I, 2013

▶▶▶▶◇▶▶▶▶ × 19

Insättning i ekvation (III.29) ger

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{\sin \phi Z z e^2}{4\pi\epsilon_0 M v_1 b} \frac{d\phi}{dt} \quad (III.34)$$

Före partikeln börjar växelverka med kärnan har vi $\phi = 0$ och $v_y = 0$. Efter att partikeln slutat växelverka med kärnan har vi $\phi = \pi - \theta$ och $v_y = v_2 \sin \theta$.

Vi kan integrera ledvis:

$$\begin{aligned} \int_0^{v_1 \sin \theta} dv_y &= v_1 \sin \theta \\ &= \frac{Z z e^2}{4\pi\epsilon_0 M v_1 b} \int_0^{\pi-\theta} \sin \phi d\phi \\ &= \frac{Z z e^2}{4\pi\epsilon_0 M v_1 b} (1 + \cos \theta) \end{aligned} \quad (III.35)$$

Materiens Struktur I, 2013

▶▶▶▶◇▶▶▶▶ × 20

Förenklingsformeln

$$b \equiv b(\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{Mv_1^2} \frac{1 + \cos\theta}{2\sin\theta} = D \frac{1 + \cos\theta}{2\sin\theta} = \frac{D}{2} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (III.36)$$

Detta är slutresultatet, som anger att för den observerade spridningsvinkeln θ har partikeln inkommit på kärnan med stötparametern b . Motsvarande, om b för en inkommande partikel är känd så vet vi i vilken vinkel θ den utkommer från kärnan.

Vi övergår nu till att behandla hur en stråle av partiklar växelverkar med hela materialet.

Notera att materialets massa kan skrivas

$$m = \frac{N}{N_A} M = \rho V \quad (III.37)$$

där N är antalet atomer, och M är massan för en mol av detta ämne.

Materiens Struktur I, 2013

◀▶◀▶◊▶▶▶▶ × 21

Antalet atomer per volym i det bestrålade materialet är då

$$\frac{N}{V} = \frac{\rho N_A}{M} \quad (III.38)$$

Då strålen träffar en yta A av materialet och växelverkar med ett tunnt skikt med tjockleken δ kommer partiklarna att växelverka med ett antal kärnor som är

$$N = \frac{N}{V} A_0 \delta = \frac{\rho N_A}{M} A \delta \quad (III.39)$$

Strålens intensitet I_0 definieras som antalet partiklar N_i som passerar en viss tvärsnittsytan A_p under tiden Δt_p

$$I_0 = \frac{N_i}{A_p \Delta t_p} \quad (III.40)$$

Antalet partiklar som träffar en yta med arean A av strålmålet under en viss tid Δt är då

$$\frac{N_i}{\Delta t} = I_0 A \quad (III.41)$$

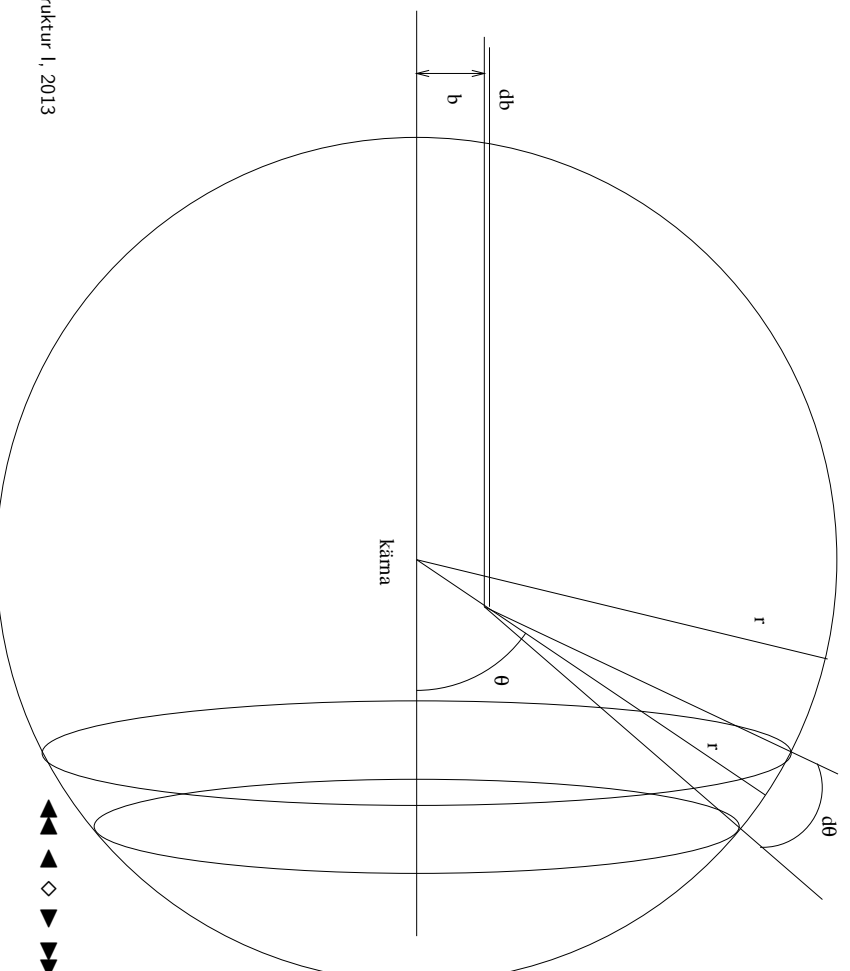
Materiens Struktur I, 2013

◀▶◀▶◊▶▶▶▶ × 22

Antalet spridda partiklar uppmätts som funktion av vinkeln θ . Från Fig. 4 ser vi att detta motsvarar en bandformad yta på en sfär. Alla spridda partiklar som träffar denna yta har spridits med samma stötparameter b .

Materiens Struktur I, 2013

▶▶▶◊▶▶▶▶ X 23



Materiens Struktur I, 2013

▶▶▶◊▶▶▶▶ X 24

Figur 4: Differentiellt tvärsnitt.

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi \left(\frac{D}{2} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \frac{D}{4} \frac{d\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}} \\
 &= 2\pi \frac{D^2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta}{8 \sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right)}
 \end{aligned}
 \tag{III.49}$$

Rymdvinkeln kan skrivas

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \frac{2\pi(r \sin \theta)(r d\theta)}{r^2} = 2\pi \sin \theta d\theta = 2\pi \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta
 \tag{III.50}$$

Det differentiella tvärsnittet definieras som

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{D^2}{16} \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}
 \tag{III.51}$$

Materiens Struktur I, 2013

Tvärsnittet σ fås genom integrering:

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \int d\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \\
 &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{D^2}{16} \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} 2\pi \sin \theta d\theta
 \end{aligned}
 \tag{III.52}$$

Hur många partiklar sprids in i rymdvinkeln $d\Omega$ per tid?

$$\frac{dN_o}{\Delta t} = 2\pi b db I_0 N = I_0 N d\sigma
 \tag{III.53}$$

Integration:

$$N_o = I_0 N \sigma = I_0 N \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{D^2}{16} \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} 2\pi \sin \theta d\theta
 \tag{III.54}$$

Materiens Struktur I, 2013

Notera att spridning av en och samma partikel från två eller flera kärnor inte har explicit beaktats i denna behandling. Med andra ord har man antagit att det bestrålade materialet är extremt tunn (typ ett atomlager . . .).

Notera också att ett bestrålat material består av atomer, inte atonkärnor, så en laddad partikel måste också växelverka med elektronerna runt kärnan innan den "ser" kärnan själv.

Den behandling som vi gått igenom är alltså närmast vägledande, och avsedd som en illustration hur grundläggande klassisk mekanik kan användas också för att analysera fenomenen på atomär skala.

Materiens Struktur I, 2013

◀◀ ▶▶ ◊ ▶▶▶▶ × 31

III.6. Atomens kvantstruktur

Långt före Rutherford och Bohr kände man till atomernas spektra (Fraunhofer, Kirchhoff,...). Atomsppektra är karakteristiska för ämnet och de är i formen av linjespektra, d.v.s. spektret uppvisar absorptions- och emissionslinjer endast för vissa diskreta frekvenser.

J.J. Balmer upptäckte att våglängderna i väte passar in i formeln

$$\lambda = (3645,6 \cdot 10^{-10} \text{ m}) \frac{n^2}{n^2 - 4}, \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad (\text{III.55})$$

Svensken J.R. Rydberg generaliserade år 1890 formeln till

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (\text{III.56})$$

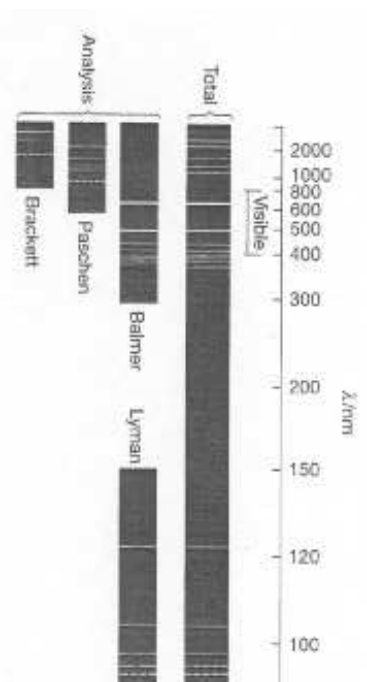
eller mer allmänt

Materiens Struktur I, 2013

◀◀ ▶▶ ◊ ▶▶▶▶ × 32

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R_H \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (\text{III.57})$$

där $R_H = 10972160 \text{ m}^{-1}$ och kallas **Rydbergs konstant**. $n' = 2$ betecknar Balmer-serien, $n' = 1$ Lyman-serien (1914) och $n' = 3$ Paschen-serien (1908).



Figur 6: Väteatomens spektrum

Materiens Struktur I, 2013

◀▶◀▶◇▶▶▶▶▶ X 33

Rutherford's atommodell var ofullständig. Den var på kollisionskurs med klassisk elektrodynamik, enligt vilken laddningar i accelererad rörelse (centripetalkraften får elektronerna att röra sig i elliptiska banor) utsänder strålning. Om elektroner roterar runt atomkärnan som planeterna runt solen borde de kontinuerligt förlora energi och till slut falla in i atomkärnan.

Bohr utvecklade 1913 en ny modell där han fastställde axiomen som t.ex. utesluter dylikt strålningsbeteende. Hans axiomen (postulat) var:

1. Elektronerna i atomen befinner sig i stationära tillstånd med fixerad totalenergi och fixerat rörelsemängdsmoment.
2. Atomen kan undergå icke-klassisk tillståndsförändring från ett av dessa tillstånd till ett annat genom att absorbera eller emittera ett enda strålningskvantum.

Den absorberade/emitterade strålningens energi är

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_{n'} - E_n \quad (\text{III.58})$$

Bohrs modell ger en naturlig förklaring till heltalsberoendet i Rydbergs formel.

Materiens Struktur I, 2013

◀▶▶▶▶◇▶▶▶▶▶ X 34

I laboratoriesystemet är elektronens och atomkärnans positioner

$$\mathbf{r}_1 = \frac{M}{m + M} \mathbf{r} \quad (III.63)$$

$$\mathbf{r}_2 = -\frac{m}{m + M} \mathbf{r} \quad (III.64)$$

Följande ekvationer kan lätt härledas:

$$K = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} M v_2^2 = \frac{1}{2} \mu v^2 \quad (III.65)$$

$$L = m v_1 r_1 + M v_2 r_2 = \mu v r \quad (III.66)$$

där

$$\mu = \frac{mM}{m + M} \quad (III.67)$$

Materiens Struktur I, 2013

◀◀ ▶▶ ◊ ▶▶▶▶ × 37

är **den reducerade massan** för systemet. I allmänhet gäller

$$\frac{1}{\mu} = \sum_i \frac{1}{m_i} \quad (III.68)$$

Vi ser att två massor m och M som rör sig i koncentriska cirkelbanor med radierna r_1 och r_2 runt ett gemensamt masscentrum formellt är ekvivalent med en massa μ som rör sig i bana med radien r runt den ena massan (i detta fall M).

Bohrs postulat att elektronens rörelsemängdsmoment är kvantiserat kan skrivas i följande explicita form:

$$L = \mu v r = n \hbar, \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \quad (III.69)$$

Kraftbalansen:

Materiens Struktur I, 2013

◀◀ ▶▶ ◊ ▶▶▶▶ × 38

$$\begin{aligned}
 F_{\text{centripetal}} &= \frac{mv_1^2}{r_1} = \frac{Mv_2^2}{r_2} = \frac{\mu v^2}{r} & (III.70) \\
 = F_{\text{Coulomb}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} & (III.71)
 \end{aligned}$$

Man erhåller

$$r = \frac{n^2 4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{Z e^2 \mu} = \frac{n^2 m}{Z \mu} a_0 \quad (III.72)$$

där man definierar **Bohrradien** som

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m} = \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar}{mc} \approx 0,05 \text{ nm} \quad (III.73)$$

(α definieras senare.)

Materiens Struktur I, 2013

◀▶◀▶◊▶▶▶▶ × 39

Energien för systemet är

$$\begin{aligned}
 E &= K + U = \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} = \dots & (III.74) \\
 &= -\frac{Z^2 \mu}{n^2 m} E_0 & (III.75)
 \end{aligned}$$

där

$$\begin{aligned}
 E_0 &= \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{m}{2\hbar^2} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right)^2 mc^2 \\
 &= \frac{\alpha^2}{2} mc^2 & (III.76)
 \end{aligned}$$

Materiens Struktur I, 2013

▶▶▶▶◊▶▶▶▶ × 40

Vi tar nu en ny titt på spektra. När elektronen byter till ett lägre energitillstånd sänds en foton ut, enligt

$$\begin{aligned} h\nu &= E_1 - E_2 \\ &= -\frac{Z^2\mu E_0}{m} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \\ &\equiv hcZ^2\frac{\mu}{m}R_\infty \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \end{aligned} \quad (III.79)$$

där

$$R_\infty = \frac{E_0}{hc} = \frac{\alpha^2 mc}{2h} = 10973731,534 \text{ m}^{-1} \quad (III.80)$$

Materiens Struktur I, 2013

◆◆◆◆◆ × 43

Uttrycket ovan blir till Rydbergs formel om man sätter $Z = 1$ och

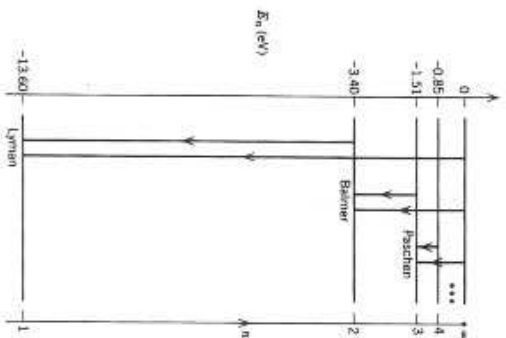
$$R_H = \frac{\mu}{m}R_\infty \quad (III.81)$$

Låt $M \rightarrow \infty$:

$$R_H = \frac{\mu}{m}R_\infty \rightarrow \frac{m}{m}R_\infty = R_\infty \quad (III.82)$$

Materiens Struktur I, 2013

◆◆◆◆◆ × 44



Figur 8: övergångar i vätes emissionsspektrum. Spektrellinjerna är grupperade i serier enligt kvantalet för sluttillståndet. Kvantalet $n = 1$ för Lymanserien, $n = 2$ för Balmerserien, $n = 3$ för Paschenserien, o.s.v.

Materiens Struktur I, 2013

▶▶▶▶◇▶▶▶▶▶ X 45

I den här behandlingen har vi ignorerat atomen rekyl efter att den utsänder en foton. Låt oss göra en fullständigare behandling. Låt atomen vara i vila före fotonen utsänds. Energi- och rörelsemängdsbalansen anger att

$$E_i = h\nu + E_f + \frac{p^2}{2(M + m)} \quad (III.83)$$

$$0 = \frac{h\nu}{c} + (-p) \quad (III.84)$$

Vi har nu

$$E_i = h\nu + E_f + \frac{(h\nu)^2}{2(M + m)c^2} \quad (III.85)$$

Lösningen är

Materiens Struktur I, 2013

▶▶▶▶◇▶▶▶▶▶ X 46

III.8. Atomprocesser och atomexcitation

Då en foton med energin E_γ växelverkar med en atom kan detta ske på 6 olika sätt.

Låt i, j vara två elektronnivåer i atomen, med energierna E_i, E_j . Energiskillnaden är $\Delta E_{ij} = |E_i - E_j|$.

De möjliga växelverkningssätten är:

1. **Rayleigh-spridning** (elastisk spridning): $E_\gamma < \min(\Delta E_{ij})$ så atomen förblir i sitt tillstånd.
2. **Raman-spridning** (inelastisk spridning): $E_\gamma > \Delta E_{ij}$. Atomen exciteras av den inkommande fotonen, och energin $E_\gamma - \Delta E_{ij} = E_{\gamma'}$ utsänds som en foton.
3. **resonans-strålning**: $E_\gamma = \Delta E_{ij}$. Atomen exciteras och de-exciteras, en foton utsänds med samma energi som den inkommande sänds ut.
4. **fluorescens**: $E_\gamma \geq \Delta E_{ij}$. Atomen exciteras av den inkommande fotonen, eventuellt så att $E_\gamma - \Delta E_{ij} = E_{\gamma'}$ används för att direkt sända ut en foton. Den exciterade atomen de-exciteras via sönderfall till mellanliggande nivåer $E_{k_1}; \dots, E_{k_n}$: tex. $E_j \Rightarrow E_{k_1} \Rightarrow E_i$, vilket betyder att fotoner med energierna $E_j - E_{k_1}, E_{k_1} - E_{k_2}, \dots, E_{k_n} - E_i$ utsänds under de-excitationen.

Materiens Struktur I, 2013

◀◀ ◀ ◊ ▶ ▶▶ ▶▶ X 51

5. **fotoelektrisk effekt**: $E_\gamma = W_0 + K$. Elektron med kinetisk energi K frigörs från atomen.
6. **Compton-spridning**: $E_\gamma = W_0 + K + E_{\gamma'}$. Elektron med kinetisk energi K frigörs från atomen, och övriga energi utsänds som en foton.

Excitation av atomer kan också ske via kollisioner med partiklar, t.ex. elektroner och andra atomer.

De första mätningarna av kollisionssinducerad excitation gjordes 1914 av J. Franck och G.L. Hertz med hjälp av kvicksilverånga i en tub. De undersökte elströmmen genom gasen som funktion av spänningen. Runt vissa diskreta värden för spänningen ökade strömmen dramatiskt. Genom att också observera ultraviolett ljus från tuben vid dessa spänningar kunde de argumentera för att detta bevisade existensen av diskreta (kvantiserade) energinivåer i atomen.

Materiens Struktur I, 2013

◀◀ ◀ ◊ ▶ ▶▶ ▶▶ X 52

Uppgifter

- [1] Vid härledningen av Rutherford's spridningsformel har rörelsemängdsmomentets bevarande och Newtons andra lag en central roll. Rita upp en hjälpfigur ur vilken vinklarna mellan \mathbf{r} och $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ framgår samt ange även riktningen för Coulombkraften \mathbf{F}_C .
- a.) Visa stegen i härledningen av ekvation (3.6) $L = Mvb$, $b =$ stötparametern, samt härled ekvation (3.7) genom att tillämpa Newtons andra lag på kraften i y -riktningen ($F_y = M \frac{dv_y}{dt}$).
- b.) Visa med en ritning hur rymdvinkeln $d\Omega = \frac{dS}{r^2} = 2\pi \sin\theta d\theta$ erhålles.
- [2] En stråle av 10^5 partiklar per sekund med energin 3 MeV träffar ett strålmål av aluminium, som har tjockleken 10^{-4} cm.
- a.) Hur nära kommer α -partiklarna kärnan? (B & M 3.10).
- b.) Hur många α -partiklar per sekund sprids i den bakre halvfären? (B & M 3.11).
- Aluminium har ordningstalet 13, atommassan 27 och densiteten $2,70 \text{ g/cm}^3$.
- [3] Beräkna energinivåernas energier i eV för enkelt joniserat helium (He^+) samt identifiera alla övergångar i He^+ som befinner sig i det synliga området 350-700nm. (B & M 3.17).
- [4] Hur ser Bohrs formel för positroniums (e^-e^+) energinivåer ut och vilken radie har positronium? Vilken banhastighet har elektronen i positronium? Härled en formel för våglängderna i positroniums Balmerserie. (B & M 3.19).

Materiens Struktur I, 2013

◀◀ ◀ ◊ ▶▶ ▶▶ ×

53

- [5] En mesisk atom bildas då en myon ersätter en elektron i en normal atom. Bestäm radien för det första Bohrorbitalet och grundtillståndets energi i en mesisk väteatom. Myonens massa är $105,7 \text{ MeV}/c^2$. (B & M 3.21).

Materiens Struktur I, 2013

◀◀ ◀ ◊ ▶▶ ▶▶ ×

54