

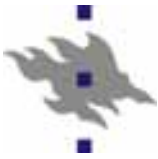


HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

530117 Material fysik vt 2007

4. Kondenserade fasers termodynamik 4.1 Fasdiagram

[Callister 9; Mitchell 2; också Porter And Easterling,
Phase transformations in metals and alloys 1]



4.1.1. Grundläggande termodynamik

- För att förstå fasta ämnens termodynamik måste man givetvis känna igen de grundläggande termodynamiska storheterna
 - Vi repeterar nu dessa
- Den interna energin U i ett system är summan av partiklarnas mikroskopiska kinetiska energi och potentialenergi
 - Kinetiska energin kan ha translations, rotations- och vibrationskomponenter
 - I system där grundobjektet är atomer bara translation
- Den totala energin E i ett system är summan av den interna energin U och dess makroskopiska kinetiska energi E_k och potentialenergi E_p
 - Med de makroskopiska storheterna avses t.ex. en stens rörelseenergi och gravitationspotentialenergi då den kastas



Grundläggande termodynamik

- Förändringen då ett system övergår från ett initialtillstånd till ett sluttillstånd betecknas med Δ :
 - Förändring i interna energin: ΔU
 - Förändring i totala energin ΔE , ΔE_k , ΔE_p
- Termodynamikens I grundlag kan skrivas i formen

$$\Delta U + \Delta E_k + \Delta E_p = Q - W$$

där Q är värmemängden som överförs till systemet och W är arbetet som görs på det.

- Teckenkonventionen är följande:
 - Q , är positiv då energiutbytet är utifrån mot systemet



Endoterma och exoterma processer

- Processer där det krävs att energi tillförs till systemet för att processen skulle ske kallas **endoterma** ($Q > 0$)
- Processer som frigör energi kallas **exoterma** ($Q < 0$)

- I fasta ämnens termodynamik är inte de makroskopiska storheterna ΔE_k , ΔE_p av intresse
- Arbetstermen W är inte av intresse då man betraktar jämviktsfasdiagram, för de är statiska tillstånd
- Alltså kan i detta sammanhang den första grundlagen skrivas helt enkelt i formen

$$\Delta U = Q \quad \text{eller i differentialform} \quad dU = dQ$$



Entalpi

- En annan central storlek är entalpi, som oftast används för förändringar i tillstånd. Dess definition är

$$H = U + PV$$

$$dH = dU + d(PV)$$

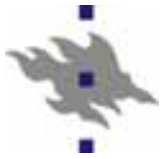
- I vanliga kondenserade materiens system är tryckförändringstermen ofta negligerbar jämfört med den inre energin och då är helt enkelt

$$dH = dU = dQ$$



Entropi

- Av helt central betydelse för förståelsen av termodynamik är begreppet entropi
- Entropin S är ju (jfr. kursen i termofysik) ett mått på graden av ordning i ett system
 - Mer exakt sagt logaritmen av antalet mikrotillstånd som motsvarar samma makrotillstånd
- En entropiförändring måste alltid vara positiv enligt termodynamikens II grundlag

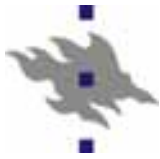


Jämvikt och ojämvikt

- Med termodynamisk jämvikt menas tillstånd där systemet befinner sig i det lägsta möjliga (fria) energitillståndet
- Även förändringar kan anses ske i termodynamisk jämvikt ifall förändringstiden t är mycket större än de mikroskopiska beståndsdelarnas interna relaxationstid τ :

$$t \gg \tau$$

- Dyliga processer kallas ***reversibla***
 - Den klassiska termodynamiken behandlar bara jämviktsprocesser
- Studie av processer som behandlar förändringsrater mellan olika tillstånd kallas ***kinetik***, och behandlas senare
- Då vi behandlar faser i detta kapitel befattar vi inte heller oss med gränsytsenergier, utan olika fasområden antas vara så stora att gränsytsans (fria) energi är negligerbar jämfört med totala energin



Entropi

- Entropins förändring i ett slutet system i en reversibel process är

$$dS = \frac{dQ_{rev}}{T}$$

där underindexet betonar att det är fråga om en reversibel process.

- Men i detta kapitel behandlar vi uteslutande reversibla processer, så vi lämnar den bort i fortsättningen
- Genom att integrera ekvationen och jämföra med sambandet mellan entropi och entalpi erhålls för fasta material

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{\Delta H}{T}$$



(Gibbs) fria energi

- Den absolut viktigaste termodynamiska storheten för att förstå fasta ämnens termodynamik är **Gibbs fria energi**, som i materialvetenskap oftast kallas bara **fria energin**:

$$G = H - TS$$

- Detta är *inte* samma sak som **Helmholtz fria energi**

$$F = U - TS$$

men i.o.m. att som sagt i fasta system oftast trycktermen PV inte är av betydelse kan man oftast behandla dem som utbytbara



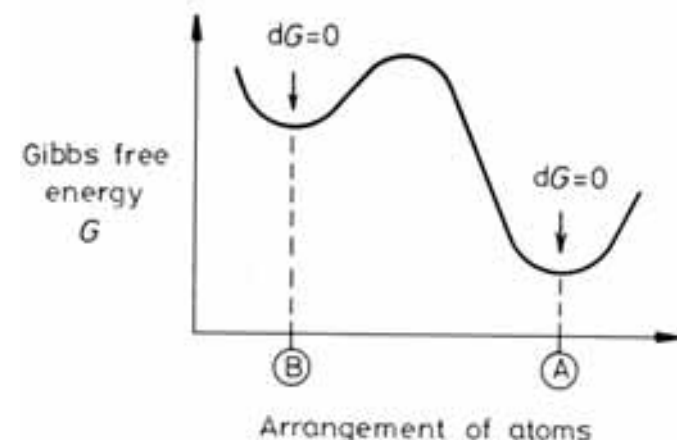
Betydelsen av Gibbs fria energi

- Gibbs fria energi är av central betydelse därför att det är den som minimeras i ett system vid konstant tryck och temperatur, som är det typiska fallet för fasta ämnen:

Table 2.1 Summary of Free Energy Effects on Process Spontaneity

$\Delta G < 0$	Process proceeds spontaneously
$\Delta G > 0$	Process not spontaneous
$\Delta G = 0$	Process at equilibrium

- Ett system vid en viss temperatur och tryck kan ha flera minima i Gibbs fria energi, men bara en är jämviktsfasen!
 - Övriga är metastabila tillstånd
- **Drivkraften för en fasförändring är minimering av G**



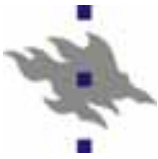


Den kemiska potentialen

- Den kemiska potentialen μ är den sista centrala termodynamiska storheten av intresse
- Den avser hur systemets inre energi förändras med antalet partiklar av typ i då antalet av partiklar av annan typ j hålls konstant:

$$\mu_i = \left(\frac{\partial U}{\partial n_i} \right)_{S,V,n_j} = \left(\frac{\partial H}{\partial n_i} \right)_{P,S,n_j} = \left(\frac{\partial G}{\partial n_i} \right)_{T,P,n_j}$$

- I motsats till de övriga storheterna som nämnts är detta en ***intensiv*** storhet, d.v.s. den beror inte på systemstorleken
 - De övriga är ***extensiva***

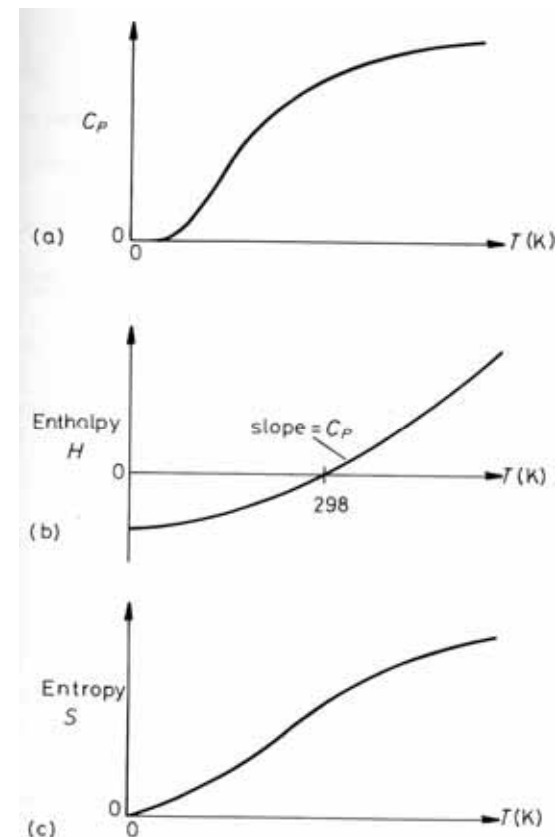


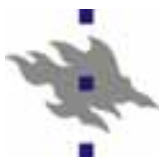
Temperaturberoendet av G

- Det första steget för att förstå fasdiagram är att förstå på temperaturberoendet av G
- Termodynamikens III grundlag säger att entropin av en perfekt kristall är 0 vid 0 K
 - Detta implicerar att också värmekapaciteten C_P är noll vid 0 K
- Värmekapaciteten är:

$$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P$$

- Därmed fås beteendet som illustreras till höger





Temperaturberoendet av G

- Alltså ökar H och S med temperaturen
- För fria energin gäller $G = H - TS$ men också

$$dG = -SdT + VdP \Rightarrow \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_P = -S$$

- Alltså sjunker G monotont med T vid konstant tryck ($dP=0$):

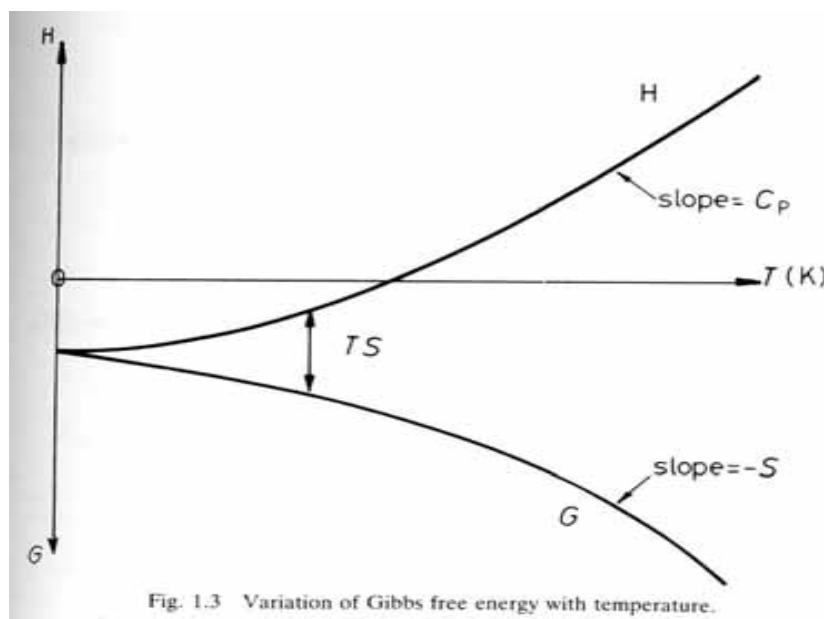
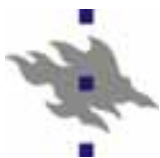


Fig. 1.3 Variation of Gibbs free energy with temperature.



Termodynamiken hos smältning

- Detta tillåter oss nu att förstå en grundläggande fastransition, smältning
- Vätskefasen och den fasta fasen har uppenbart olika entalpier H_l och H_s
- Vid 0 K är garanterat $H_s < H_l$
- Men entropierna S_l och S_s är 0 vid 0 K
- Å andra sidan är vätskefasen mera oordnad än den fasta fasen, så $S_l > S_s$
- Med dessa resonemang ser man att smältning kan beskrivas med grafen till höger
 - T_m är jämvikts smältemperaturen, L det latent värmets för smältning

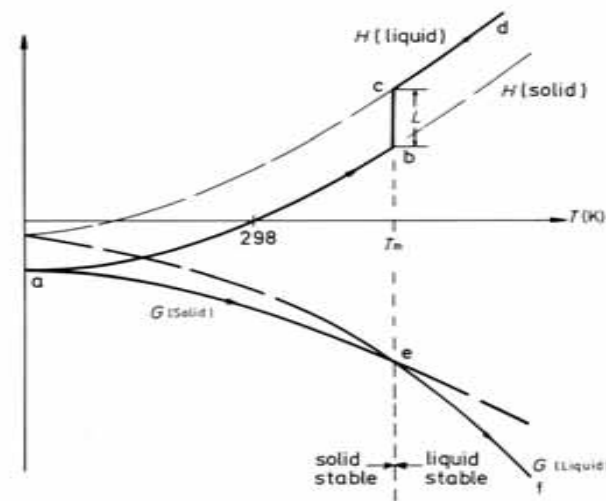
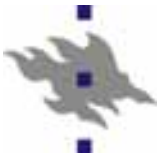
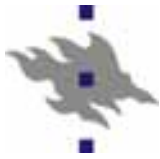


Fig. 1.4 Variation of enthalpy (H) and free energy (G) with temperature for the solid and liquid phases of a pure metal. L is the latent heat of melting. T_m the equilibrium melting temperature.



Gibbs fasregel

- Vi betraktar nu en **komponent** av ett material
 - Med komponent avses här en kemisk beståndsdel (grundämne eller förening) som har en känd komposition
- En komponent kan ha flera olika faser
- En **fas** definieras som en homogen del av ett system som har en konstant distribution av fysikaliska och kemiska egenskaper
 - Alltså t.ex. *inte* en kompositionsgradient i sig
- Två faser som är i kontakt med varandra kan vara i jämvikt med varandra om de har samma Gibbs potential vid gränsytan
 - Jämvikt innebär inte att t.ex. atomer inte kunde utbytas över gränsytan, utan att makroskopiskt sett är gränsytan oföränderlig



Gibbs fasregel

- Vid jämvikt mellan två faser α och β gäller från termofysiken att

$$T_\alpha = T_\beta$$

$$P_\alpha = P_\beta$$

$$\mu_\alpha = \mu_\beta$$

- Men alla variabler här är inte oberoende, för den kemiska potentialen beror på T och P :

$$\mu_\alpha = \mu_\alpha(T_\alpha, P_\alpha)$$

$$\mu_\beta = \mu_\beta(T_\beta, P_\beta)$$

- Nu har vi 3 ekvationer och 4 obekanta, så med att ge ett godtyckligt värde för en av variablerna kan man lösa ekvationssystemet



Gibbs fasregel

- Vi generaliserar detta till C stycken olika komponenter och Φ olika faser
- Då gäller vid jämvikt mellan faserna

$$T_\alpha = T_\beta = T_\gamma = \dots T_\phi$$

$$P_\alpha = P_\beta = P_\gamma = \dots P_\phi$$

$$\mu_{1\alpha} = \mu_{1\beta} = \mu_{1\gamma} = \dots \mu_{1\phi}$$

$$\mu_{2\alpha} = \mu_{2\beta} = \mu_{2\gamma} = \dots \mu_{2\phi}$$

$$\vdots$$

$$\mu_{C\alpha} = \mu_{C\beta} = \mu_{C\gamma} = \dots \mu_{C\phi}$$

Här har vi alltså $C+2$ ekvationer och $\Phi-1$ likheter för varje variabel.



Gibbs fasregel

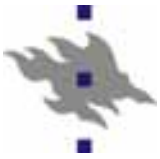
- Alltså har man totalt $(C+2)(\Phi-1)$ restriktioner som måste uppfyllas i jämvikt
- Det totala antalet intensiva variabler är $\Phi(C+2)$
- Skillnaden mellan antalet intensiva variabler och antalet restriktioner är känd som systemets frihetsgrad F . För den gäller

$$F = \phi(C + 1) - (\phi - 1)(C + 2)$$

$$F = C - \phi + 2$$

- Den inramade ekvationen är känd som ***Gibbs fasregel***
- Den kan ännu generaliseras att innefatta fler termodynamiska variabler än T och P (t.ex. magnetisationen M) och blir då för N termodynamiska variabler

$$F = C - \phi + N$$



Gibbs fasregel

- Gibbs fasregel berättar alltså för ett visst antal komponenter och faser hur många variabler som kan förändras oberoende av varandra
- I det ursprungliga fallet med en komponent och två faser var $C=1$ och $\Phi=2$ så

$$F = 1 - 2 + 2 = 1$$

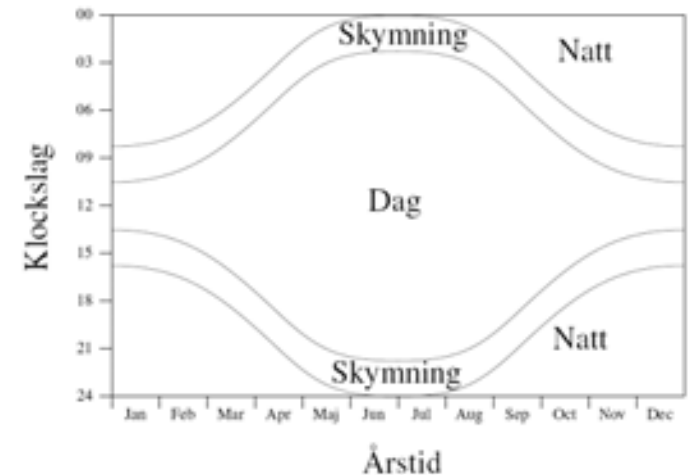
- D.v.s. i detta fall finns bara en frihetsgrad, så vid en fasjämvikt gäller att om t.ex. temperaturen T ändras, kan inte trycket och P ändras samtidigt utan att fasjämviktspunkten förändras!



4.1.2. Enkomponents-fasdiagram

- I det helt allmänna fallet kan man med ett fasdiagram avse vilket som helst diagram där informationen anges som områden i en 2-dimensionell bild, där områdenas gränser avses hur något övergår till något annat

- För att ge ett (fånigt) exempel som är lätt att förstå, visas till höger längden av dag och natt nästan på våra breddgrader i formen av ett fasdiagram

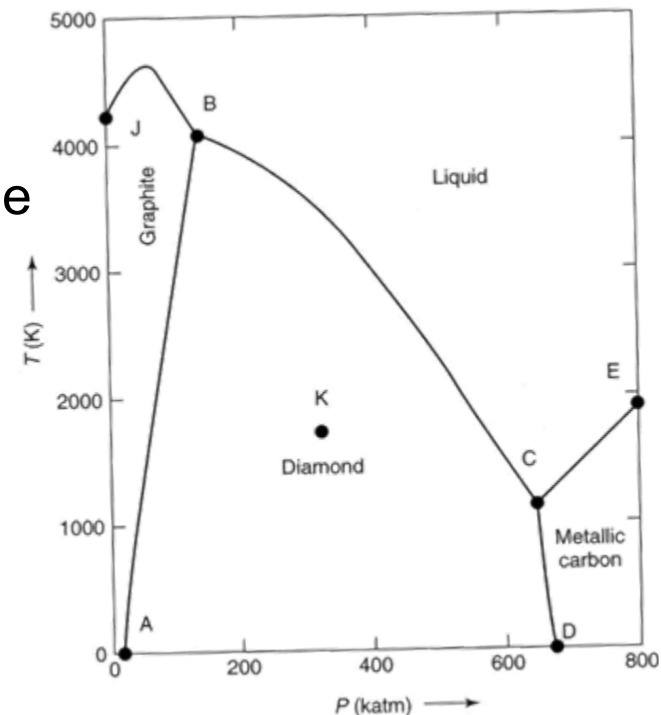


- I materialfysiken är faserna som avges givetvis faser hos material: t.ex. vätska, amorf, fast, olika kristallina polymorfer mm. mm.



Fasdiagram och Gibbs fasregel

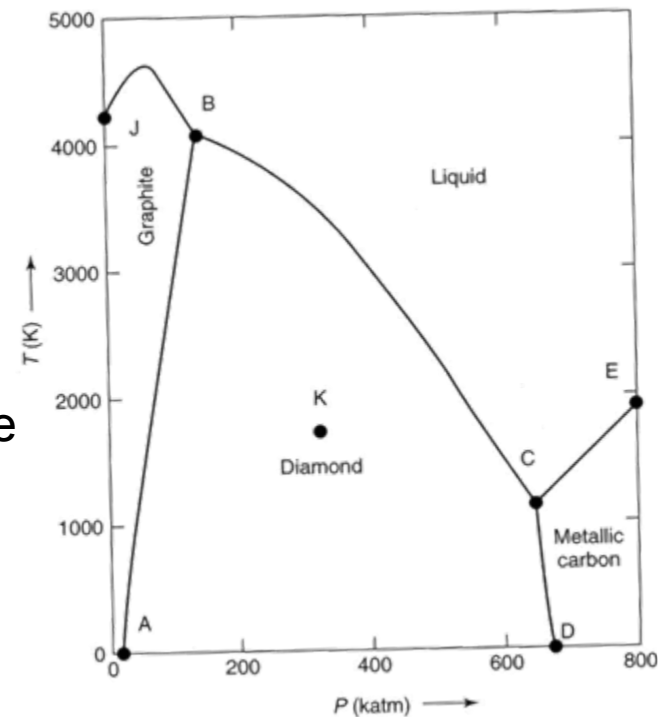
- Att det är vettigt att behandla faser i material med ett fasdiagram hänger direkt ihop med Gibbs fasregel
- Betrakta bifogade fasdiagram för kol, ett enkomponentssystem: $C=1$
- Vi ser först på en enskild punkt K som antas vara inom ett enfasområde
 - Alltså är $\Phi=1$ och med fasregeln $F=1-1+2=2$
 - Alltså kan både T och P ändras oberoende av varann utan att fasjämvikten förstörs => vi får ett enhetligt 2D-område, ett **fasfält**





Fasdiagram och Gibbs fasregel

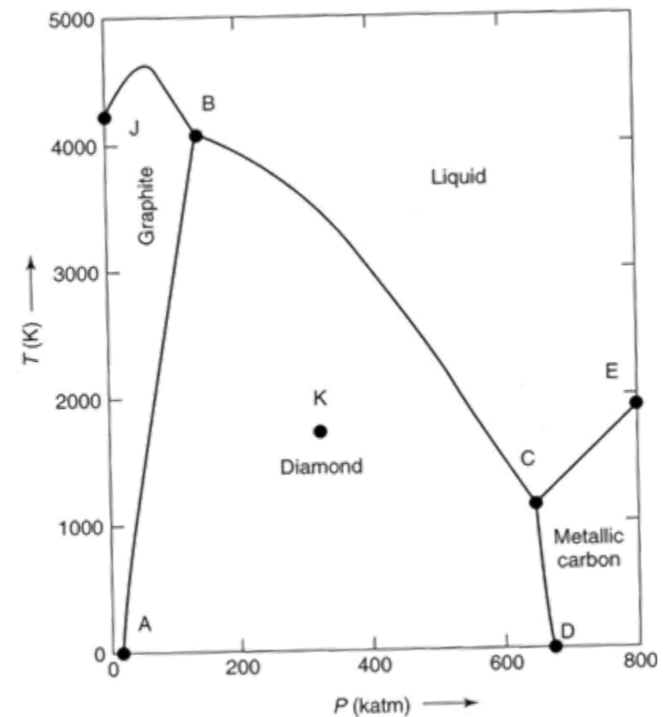
- Vi betraktar nu en punkt där grafit och diamant är i jämvikt
- Då är $\Phi=2$ och med fasregeln $F=1-2+2 = 1$
 - Alltså om T ändras, måste P också ändras för att fasjämvikt skulle bevaras. Detta innebär att det finns en **linje** i (T,P) -diagrammet som definierar området där de två faserna kan vara i jämvikt: en **fasgräns**
- Denna fasgräns är linjen AB

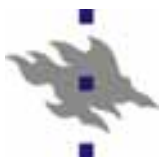




Fasdiagram och Gibbs fasregel

- Vi betraktar nu till slut en punkt där tre faser, t.ex. grafit, diamant och vätska är i jämvikt
- Då är $\Phi=3$ och med fasregeln $F=1-2+2=0$
 - Alltså kan varken T eller P ändras om 3 faser skall vara i jämvikt
 - *Tre faser kan alltså bara vara i jämvikt i en enskild punkt!*
 - En sådan punkt (t.ex. B) är känd som en **trippelpunkt** eller **invariant punkt**





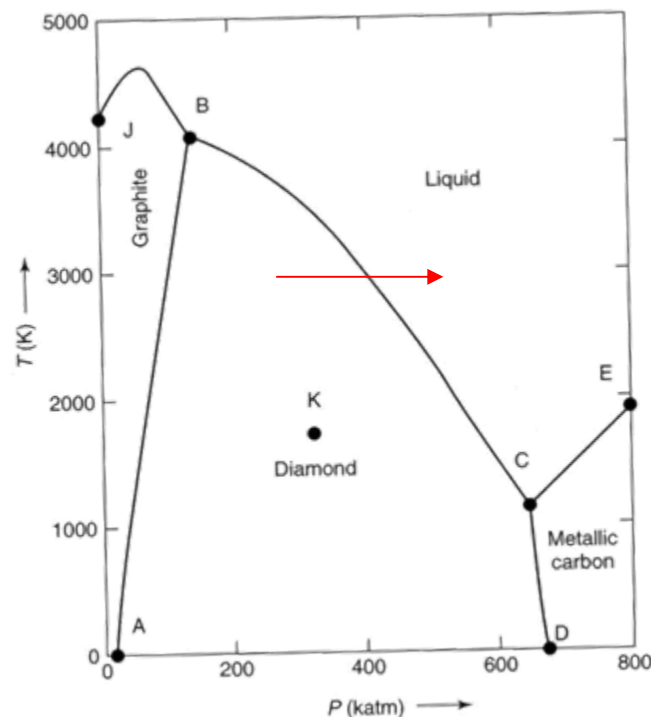
Relation till volymen per partikel

- En ytterligare intressant synvinkel på fasgränserna fås genom att notera att vid konstant temperatur gäller

$$dG = -SdT + VdP \Rightarrow \left(\frac{\partial G}{\partial P} \right)_T = V$$

- Om nu vid en fasgräns volymen per atom förändras, är det uppenbart ur ekvationen att G förändras olika för de två faserna

=> för att upprätthålla samma G för olika faser då trycket varierar, är man tvungen att förändra temperaturen för att hållas på gränsen





Fasgränser och Clausius-Clapeyrons ekvation

- För fasgränser i (P.T)-diagram kan man härleda Clausius-Clapeyrons ekvation på följande sätt
- Den anger alltså hur P ändras med T längs med en fasgräns, som funktion av volymförändringen vid gränsen, T och fastransitionens entalpiförändringen ΔH (latent värme L)
- Med att integrera över den utgående från en känd punkt kan man komma till övriga punkter längs med transitionslinjen

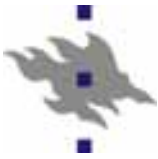
$$dg_1 = -s_1 dT + v_1 dP$$

$$dg_2 = -s_2 dT + v_2 dP$$

$$dg_1 = dg_2$$

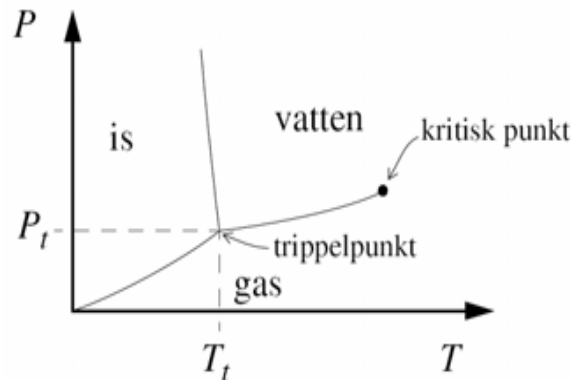
$$\frac{dP}{dT} = \frac{s_2 - s_1}{v_2 - v_1}$$

$$\Delta S = \frac{\Delta H}{T} \quad \boxed{\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta H}{T\Delta V}}$$



Exempel på enkomponentsfasdiagram

- Det välkända diagrammet för vatten



- Fasdiagrammet för järn

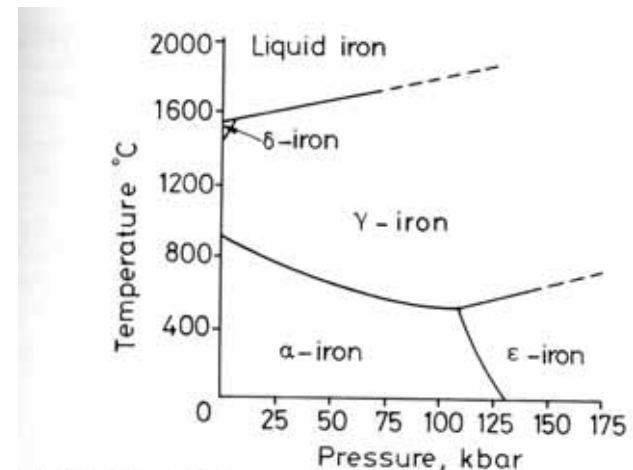
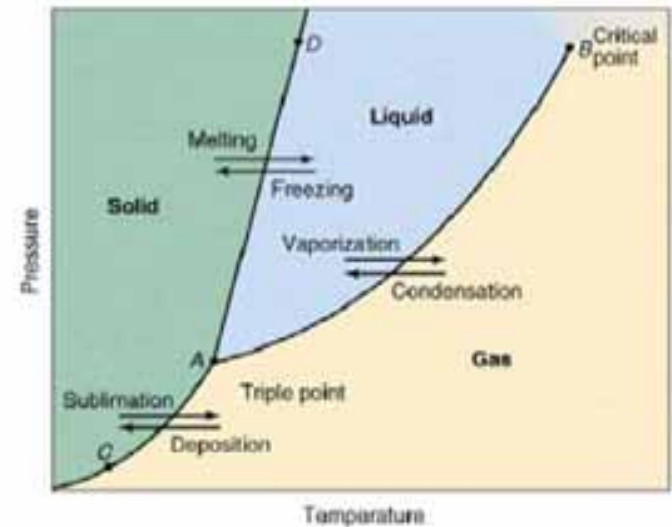
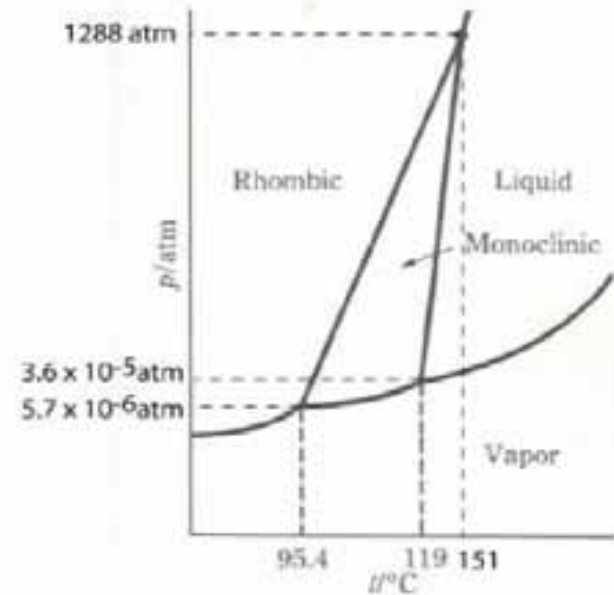


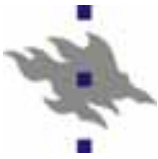
Fig. 1.5 Effect of pressure on the equilibrium phase diagram for pure iron.



Exempel på enkomponentsfasdiagram

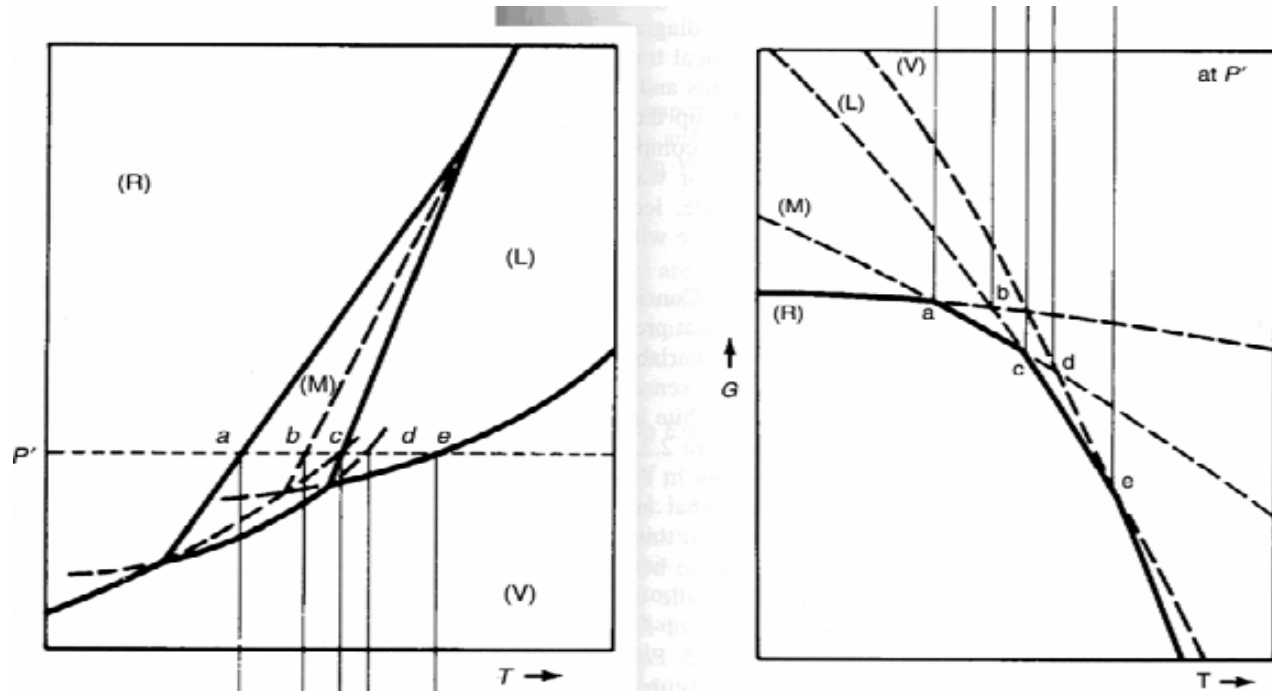
- Fasdiagrammet för svavel
- Här finns två olika kristallina faser: den monokliniska och rombiska





Fasdiagram och Gibbs fria energi

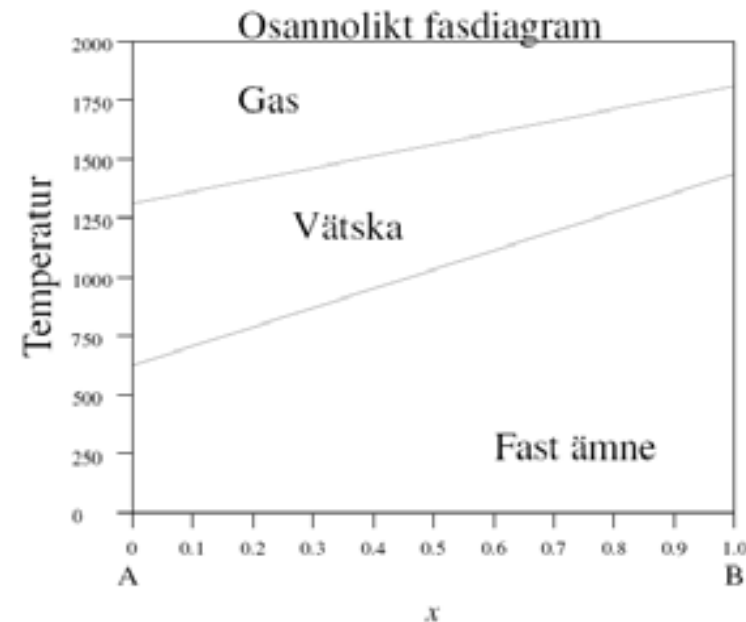
- Varje fas i ett fasdiagram måste motsvara ett minimum i Gibbs fria energi
- Därmed uppkommer t.ex. det komplicerade fasdiagrammet för svavel vid ett viss tryck P' från fria energier på följande sätt





4.1.3. Tvåkomponentsfasdiagram

- Vi betraktar nu **binära fasdiagram**, som beskriver vad som händer i system med två olika komponenter A och B
- De anges oftast för något visst tryck P , som allra oftast är 1 atmosfär
- Dessa har i princip formen som illustreras till höger
- x är andelen A vs. B
 - x kan vara antingen atom/mol-andel eller viktandel
 - Viktigt att specificera
- Exakt denna enkla form för fasgränserna är dock mycket osannolik av orsaker som vi skall se snart





Blandningsentalpi

- Ett centralt begrepp då man ser på blandade material är deras blandningsentalpi och blandnings-fria-energi
- För att forma en blandning av ett material gör man i princip två steg:
 1. Man formar ett gemensamt block av materialet med de relativa andelarna X_A och X_B
 2. Dessa blandas ihop för att forma en på atomnivå homogen blandning (ordnad eller oordnad)

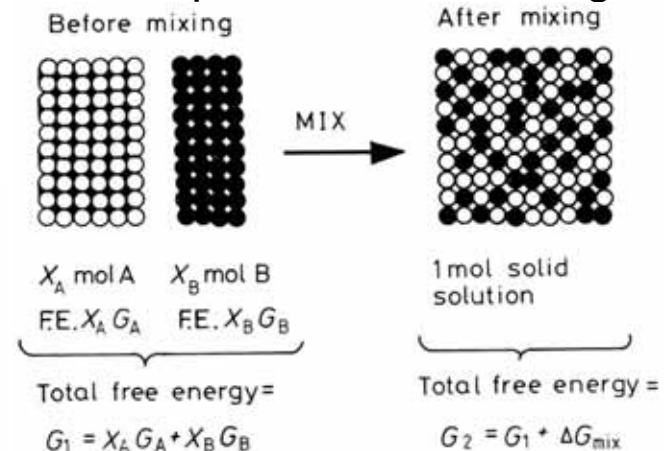
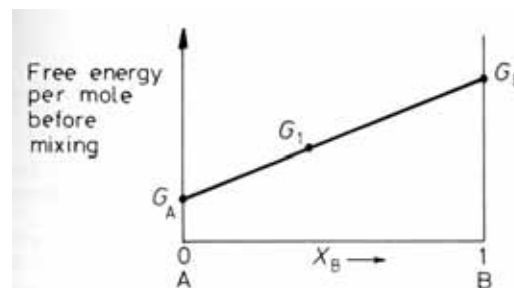
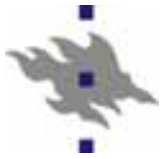


Fig. 1.7 Free energy of mixing.



Blandningsentalpi

- Före steg 2 är systemets fria energi G helt enkelt en linjär approximation mellan de två rena fasernas fria energier
- Men efter blandningen tillkommer det en ny term till systemets entalpi och fria energi:

$$H = X_A H_A^\circ + X_B H_B^\circ + \Delta H_{mix}$$

$$S = X_A S_A^\circ + X_B S_B^\circ + \Delta S_{mix}$$

$$G = X_A G_A^\circ + X_B G_B^\circ + \Delta G_{mix}$$

- Här är alltså H_A° etc. de fria ämnens storheter, och $X_A + X_B = 1$
- De nya storheterna ΔH_{mix} , ΔS_{mix} och ΔG_{mix} avser alltså hur mycket blandningens energi och entropi avviker från den linjära approximationen

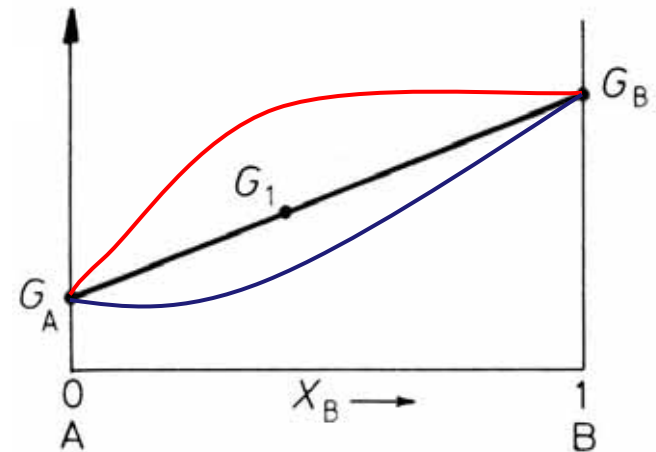


Blandningsentalpi

- I.o.m. att $G = H - TS$ får man ur de ovanstående ekvationerna

$$\Delta G_{mix} = \Delta H_{mix} - T \Delta S_{mix}$$

- Alltså anger ΔG_{mix} hur mycket den verkliga fria energin avviker från den linjära interpolationen



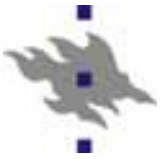
- Röda övre kurvan: det är fri-energetiskt ofördelaktigt att forma en blandning
- Blåa nedre kurvan: det är fri-energetiskt fördelaktigt att forma en blandning
 - Materialet är **blandbar** (eng. "miscible")



Blandningsenergis komponenter: entropin

- Det blandade tillståndet har uppenbart en högre konfigurationsentropi än det ickeblandade
- Därmed innehåller ΔS_{mix} *åtminstone* en konfigurationell term ΔS_{conf} som kommer ur en beräkning över på hur många olika sätt atomerna kan blandas slumpmässigt
- Den är (R är gaskonstanten = Nk_B)

$$\Delta S_{conf} = \Delta S_{mix} = -R(X_A \ln X_A + X_B \ln X_B)$$



Blandningsenergins komponenter: entalpin

- Blandningsentalpin ΔH_{mix} i sin tur kan grovt uppskattas med en enkel bindningsberäkning.
- Anta att blandningen har tre olika typer av närmaste grannbindningar: AA , AB , och BB med energier ε_{AA} , ε_{AB} och ε_{BB} . Beteckna antalet bindningar av alla typer med P_{AA} , P_{AB} och P_{BB} .
- Man kan visa att i den blandade fasen gäller
$$\Delta H_{mix} = P_{AB} \left(\varepsilon_{AB} - \frac{1}{2} (\varepsilon_{AA} + \varepsilon_{BB}) \right) = P_{AB} \varepsilon$$
där vi definierat en ny storhet ε som ett mått på hur mycket den blandade bindningsenergin avviker från medeltalet
- Ifall ε är < 0 vill atomerna omges av atomer av den motsatta typen, och om $\varepsilon > 0$ av samma typ. Båda varianterna leder till uppkomst av ordning i kristallen



Blandningsenergens komponenter: entalpin

- I ett helt slumpmässigt ordnad material, eller i ett material där ε avviker bara litet från noll gäller approximativt

$$P_{AB} = NzX_A X_B$$

där z är antalet bindningar per atom, och vidare för blandningsentalpin

$$\Delta H_{mix} = Nz\varepsilon X_A X_B = \alpha X_A X_B = \alpha X_A (1 - X_A)$$

- Alltså har den en parabolisk form, positiv eller negativ beroende på tecknet på ε
 - $\varepsilon < 0$: exotermisk blandning
 - $\varepsilon > 0$: endotermisk blandning

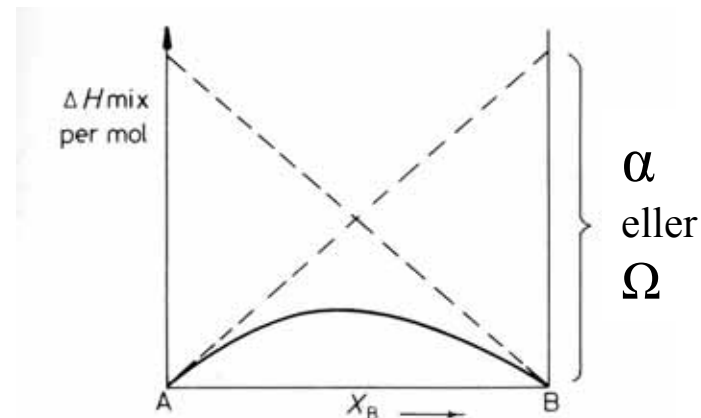


fig. 1.14 The variation of ΔH_{mix} with composition for a regular solution.



Reguljära och ideala lösningar

- Med **reguljära lösningar** menas sådana för vilka

$$\Delta H_{mix} = \alpha X_A X_B$$

gäller. För dem är

$$G^{reg} = X_A G_A^\circ + X_B G_B^\circ + \alpha X_A X_B + RT(X_A \ln X_A + X_B \ln X_B)$$

- Ifall $\Delta H_{mix} = 0$ (i den enkla bindningsberäkningsapproximationen $\varepsilon = 0$) talar man om en **ideal lösning**
- För dem ges ΔG_{mix} helt av entropitermen, och man kan lista ut formen av det binära fasdiagrammet!

$$G^{ideal} = X_A G_A^\circ + X_B G_B^\circ + RT(X_A \ln X_A + X_B \ln X_B)$$



Formen av blandnings-fria energin

- Exempel på formen av ΔG_{mix} för reguljära lösningar för olika kombinationer av temperaturen och tecken på ε (ges som Ω i bilden)
- Fallet med $\Delta H_{mix} < 0$ är enkelt
- Ifall $\Delta H_{mix} > 0$ kan det leda till en mer komplex form

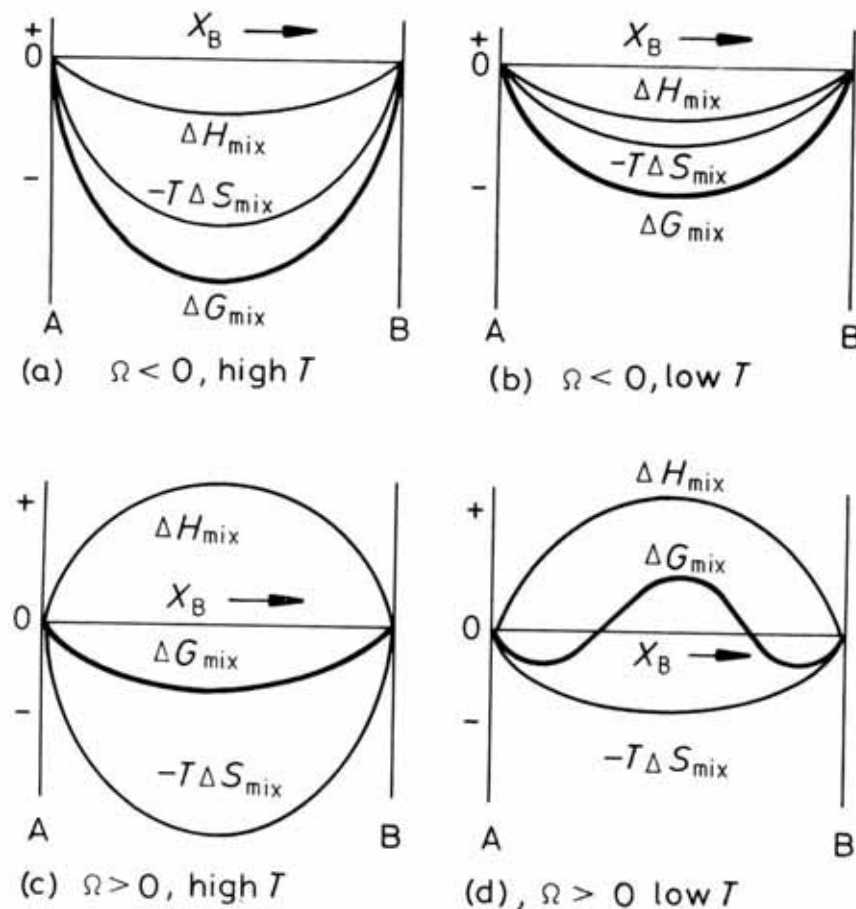


Fig. 1.15 The effect of ΔH_{mix} and T on ΔG_{mix} .



Tangentkonstruktionen

- Före vi konstruerar fasdiagram, måste vi ännu betrakta en aspekt
- Betrakta ett system med två olika faser med olika fria energier med $X_A = X^0$
 - Vad är andelen av de två olika faserna α och β ?
- Snabb tänkt skulle allt vara homogent i fas α , och fria energin $G = G_0^\alpha$
- **Men:** tänk om istället det finns både fas α och β – vad händer då?
- Ifall vi har α_1 av α och β_1 av β -fas kommer man till $G = G_1 < G_0^\alpha$
- Den minsta möjliga fria energin fås med den s.k. **tangentkonstruktionen** som sammanbinder kurvorna med en rak linje som skär båda kurvorna tangentiellt. Vi får spontan fassparation!

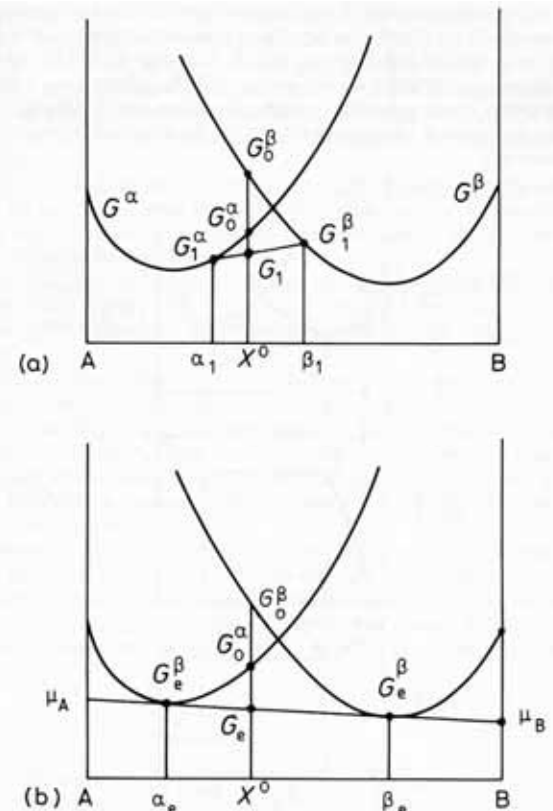
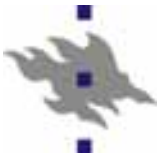


Fig. 1.27 (a) Alloy X^0 has a free energy G_1 as a mixture of $\alpha_1 + \beta_1$. (b) At equilibrium, alloy X^0 has a minimum free energy G_e when it is a mixture of $\alpha_e + \beta_e$.



Slutledning av fasdiagram

- Nu kan man lista ut hur ett fasdiagram för en ideal lösning ser ut. Betrakta bilden nedan som visar G -kurvor för 5 olika temperaturer (a-e) samt det resulterande fasdiagrammet (f)

- (a) är uppenbart smulna för alla X
- (e) är uppenbart fast för alla X
- Men i (c) behövs tangentkonstruktionen!
- Därmed mellan de rena ämnenas smältpunkter $T_m(A)$ och $T_m(B)$ uppstår en tvåfasblandning av fast och vätska!

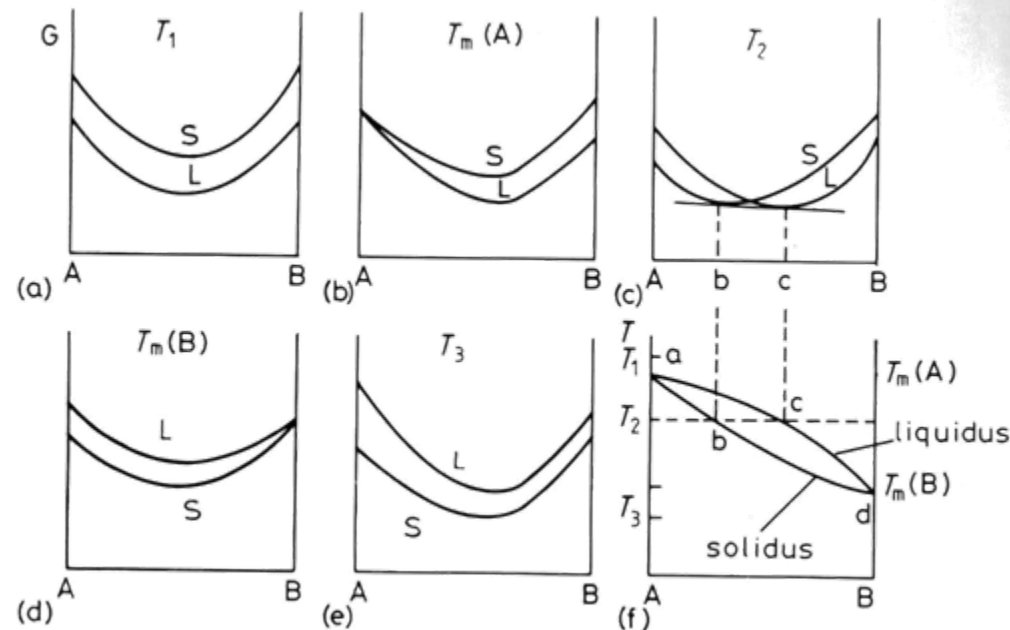
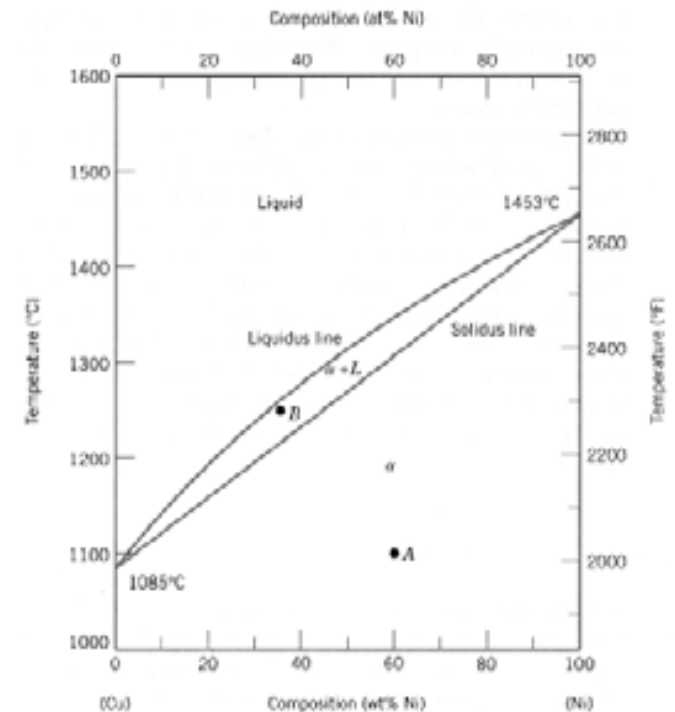


Fig. 1.29 The derivation of a simple phase diagram from the free energy curves for the liquid (L) and solid (S).



Exempel: systemet Cu-Ni

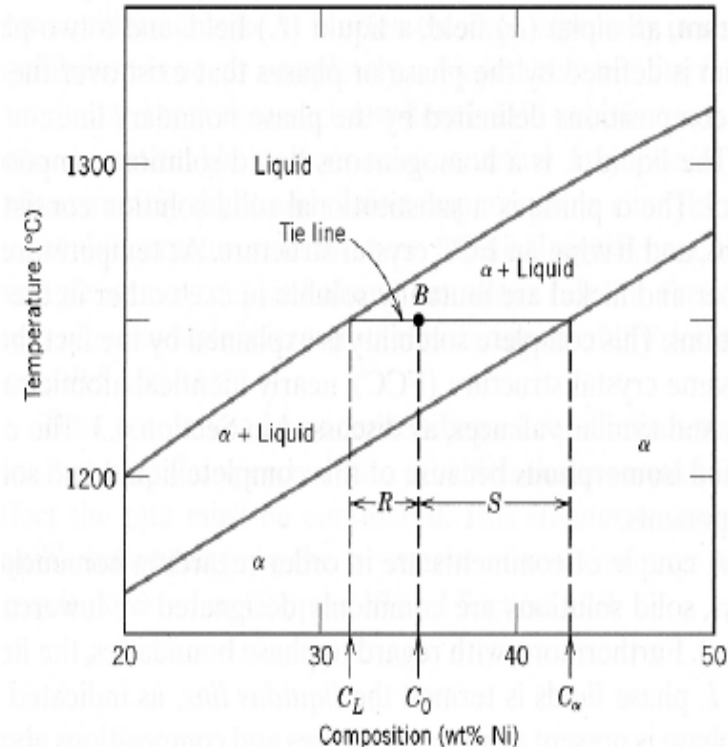
- Verkligt exempel: Cu-Ni
- Övre delen är en helt blandad 'normal' vätska (L)
- Nedre delen är den så kallade α -fasen, där Cu och Ni är slumpmässigt blandade i FCC-gitterstruktur
 - En dylik fas där två olika ämnen är helt blandade kallas **isomorf**.
- Dessa är båda enkla enfasområden (eng. "single phase").
- Men mellanområdet är ett tvåfasområde där vätska (L) och (α) existerar i jämvikt
- Linjerna som omger dessa kallas på latin **solidus** och **liquidus**.





Hävstångsregeln

- Det finns ett enkelt sätt att lista ut hur mycket det finns av de bägge faserna
- Detta sker på följande sätt. Betrakta punkten B i bilden, som är punkten $x = 35$ vikt-% Ni vid $1250\text{ }^\circ\text{C}$.
- Kompositionen bestäms på följande sätt:
 - 1. Rita en horisontell linje (eng. "tie line") från punkt B till liquidus- och solidus-linjerna.
 - 2. Från punkterna där "tie line" skär liquidus och solidus ser man vilken komposition detta motsvarar.



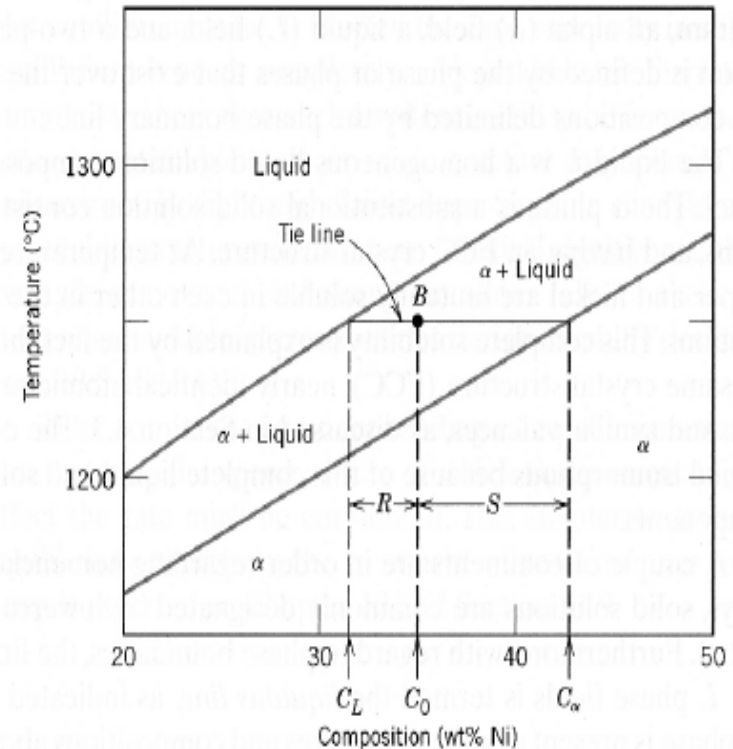


Hävstångsregeln

- Detta är en direkt följd av tangentkonstruktionen

- Därmed består i exempelfallet punkt B av en blandning av:

- (L med 31.5 vikt-% Ni och 68.5 vikt-% Cu) +
- (α med 42.5 vikt-% Ni och 57.5 vikt-% Cu)



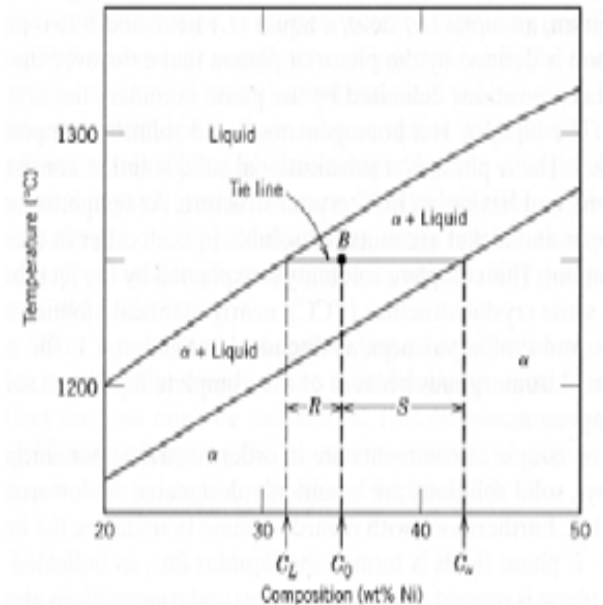


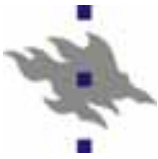
Hävstångsregeln

- Men detta berättar inte ännu hur mycket det finns av L respektive α
- Detta kan bestämmas med den s.k. hävstångsregeln (eng. "lever rule"), som fungerar på samma sätt som man bestämmer tyngdpunkten i en hävstång med vikter i ändorna.

För att göra detta räknar man längden R och S av då två delarna, och dividerar med hela längden.

- Men (inte helt uppenbart) bör man göra det åt det motsatta hållet: alltså andelen L bestäms av längden på S och vice versa.





Hävstångsregeln

- Nu får man de relativa viktandelarna W_L och W_α :

$$W_L = \frac{S}{R+S} = \frac{C_\alpha - C_0}{C_\alpha - C_L}$$

$$W_\alpha = \frac{R}{R+S} = \frac{C_0 - C_L}{C_\alpha - C_L}$$

som i detta specifika fall blir

$$W_L = \frac{42.5 - 35}{42.5 - 31.5} = 0.68$$

$$W_\alpha = \frac{35 - 31.5}{42.5 - 31.5} = 0.32$$

- Alltså har vi nu bestämt att punkt B består av
 - 68 vikt-% (L med 31.5 vikt-% Ni och 68.5 vikt-% Cu) +
 - 32 vikt-% (α med 42.5 vikt-% Ni och 57.5 vikt-% Cu)

