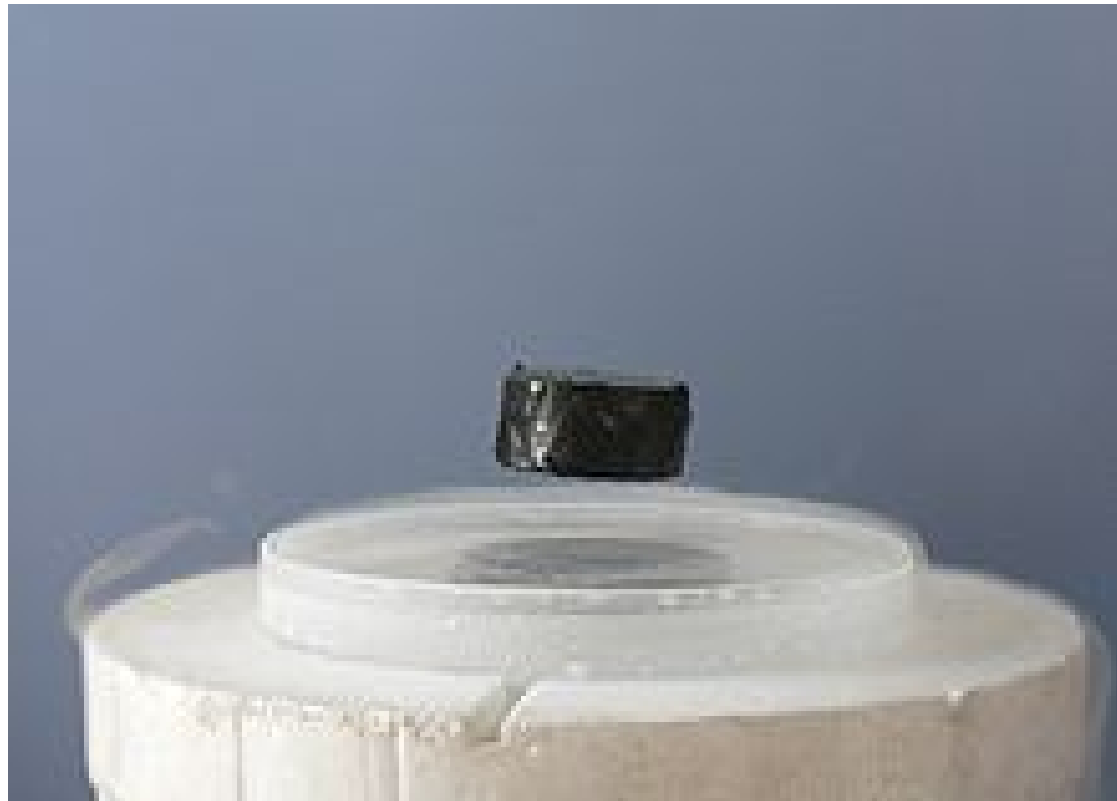


16. Supraledning

[HH10, Do's anteckningar, Kittel 12, AM 34]



Meissner-effekten, där en magnet leviterar över en supraledare

p.g.a. att en supraledare fullständigt utesluter yttre magnetfält.

16.1. Allmänt

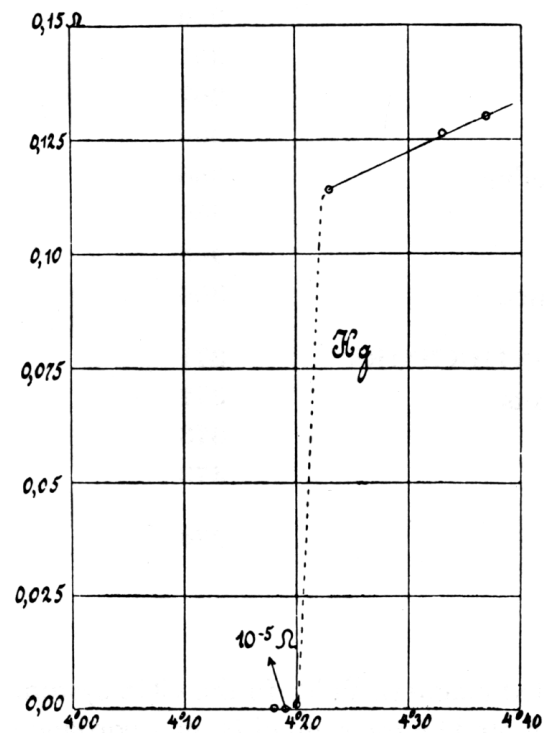
Ett stort antal grundämnen och kristallina kemiska föreningar förlorar sin elektriska resistivitet och blir **supraledande** vid låga temperaturer. Kännetecknande för supraledande ämnen är att de är perfekta diamagneter, dvs. de utesluter magnetiska fält fullständigt, och att supraledningsförmågan försvinner i ett tillräckligt starkt yttre magnetiskt fält.

Laddningen transporteras i supraledare av elektronpar som beter sig som om de vore bundna till varandra med en attraktiv kraft; mer om detta senare.

Den supraledande strömmen kan hållas oattenuerad i otroligt långa tider. Det har gjorts mätningar där en ström hållits konstant i år; i ett experiment bestämdes att tidskonstanten för attenuation måste vara minst 100000 år. [Kittel]

16.1.1. Supraledande material

Det första supraledande materialet observerades av Kamerlingh Onnes i Leiden år 1911. Här är en kopia av den ursprungliga bilden över upptäckten:



En genomgång av grundämnen visar att en stor del blir supraledande vid någon temperatur, och ännu fler (de märkta med en asterisk *) vid ett högt yttre tryck:

Table 1 Superconductivity parameters of the elements

An asterisk denotes an element superconducting only in thin films or under high pressure in a crystal modification not normally stable. Data courtesy of B. T. Matthias, revised by T. Geballe.

Li		Be														B	C	N	O	F	Ne
		0.026																			
Na		Mg														Al	Si*	P*	S*	Cl	Ar
				Transition temperature in K												1.140					
				Critical magnetic field at absolute zero in gauss (10 ⁻¹ tesla)												105					
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr*	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge*	As*	Se*	Br	Kr				
			0.39	5.38							0.875	1.091									
			100	1420							53	51									
Rb	Sr	Y*	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn ^(w)	Sb*	Te*	I	Xe				
			0.546	9.50	0.92	7.77	0.51	.0003			0.56	3.4035	3.722								
			47	1980	95	1410	70	.049			30	293	309								
Cs*	Ba*	La _{fcc}	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg ⁽ⁿ⁾	Tl	Pb	Bi*	Po	At	Rn				
		6.00	0.12	4.483	0.012	1.4	0.655	0.14			4.153	2.39	7.193								
		1100		830	1.07	198	65	19			412	171	803								
Fr	Ra	Ac	Ce*	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu					
																0.1					
			Th	Pa	U*(α)	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr					
			1.368	1.4																	
			1.62																		

Det är möjligt att alla ickemagnetiska metaller i själva verket blir supraledare vid en tillräckligt

låg temperatur, men i.o.m. att transitionen är mycket sensitiv till orenheter, har man inte kunnat bestämma detta med säkerhet. T.ex. en Fe-orenhet per 10^4 atomer i Mo är tillräckligt att förstöra supraledningen i Mo, och en % Gd i La sänker dess transitionstemperatur från 5.6 till 0.6 K.

Maximitemperaturen för transitionen hos grundämnen är 9.5 K för Nb.

Här är en tabell på några supraledande legeringar och oxider:

Compound	T_c , in K	Compound	T_c , in K
Nb ₃ Sn	18.05	V ₃ Ga	16.5
Nb ₃ Ge	23.2	V ₃ Si	17.1
Nb ₃ Al	17.5	YBa ₂ Cu ₃ O _{6.9}	90.0
NbN	16.0	Rb ₂ CsC ₆₀	31.3
K ₃ C ₆₀	19.2	La ₃ In	10.4

Länge trodde man att det är omöjligt att komma mycket högre än 20 K i transitionstemperaturen T_c ; rekordet var för en god stund 23 K i Nb₃Ge. Det fanns t.o.m. teoretiska argument för att maximet bör vara av denna storleksordning.

Därför kom det som en verklig revolution då Bednorz och Muller år 1986 hittade en lantanid-

metall-oxid, $\text{La}_{2-x}\text{Ba}_x\text{CuO}_4$ som hade en transitionstemperatur på 35 K. Det uppstod en frenetisk forskningsverksamhet för att hitta andra s.k. **högtemperatur-supraledare** (“high- T_c superconductors”), och nu har man hittat sådana i flera olika typer av material.

16.1.1.1. Indelning av supraledare enligt materialtyp

Supraledare kan idag enligt typen av material och transitionstemperaturen indelas i åtminstone fyra olika klasser.

- **Traditionella låg-temperatur-supraledare** (“low- T_c superconductors”). Dessa har en transitionstemperatur på högst 23 K. Alla grundämnes-supraledare och vanliga metall-legeringar som är supraledare hör hit. De första hittades år 1911 av Kamerlingh-Onnes, och deras supraledningsmekanism förklaras av den så kallade BCS-teorin. Typiskt är dessa vanliga metaller vid rumstemperatur.

- **Cu-baserade hög-temperatur-supraledare** (“Cu-based high- T_c superconductors”).

De första hittades först år 1986 av Bednorz och Muller. Dessa är olika metall-oksider, där en av metallerna är koppar. Normalt är de elektriska isolatorer, men de blir supraledande vid låga temperaturer. Transitionstemperaturen är dock dramatiskt högre än hos de traditionella ledarna, mellan 30 och 125 K. Då ingen hade ens tänkt sig att en isolator kunde vara supraledande,

var deras upptäckt en stor överraskning. Till dags datum innehas supraledningsrekordet i T_c av $\text{HgBa}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{8+\delta}$ som har $T_c = 138$ K, men den mest studerade högtemperatur-supraledaren är yttrium-barium-kopparoxid $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ (ofta betecknat YBCO för enkelhet skull), som har $T_c = 92$ K. Notera underindexet δ : dessa har det karakteristiska draget att de ha en del syrevakanser, som har en avgörande roll för supraledandet. T.ex. i YBCO är maximiet i supraledningstemperatur vid $\delta = 0.15$, medan vid $\delta = 0.6$ försvinner supraledningen helt!

I och med att dessa har en transitionstemperatur som är högre än kokpunkten för kväve (77 K) är de mycket behändiga att arbeta med, för flytande kväve är billigt och allmänt tillgängligt. Tyvärr är detta ungefär deras enda fördel ur praktisk synvinkel: det är extremt svårt att tillverka långa elledningar av dessa material.

Supraledningsmekanismen är inte känd: BCS-teorin lämpar sig inte helt för att förklara den, men ingen alternativ teori har hittills (år 2012) fått allmänt godkännande.

- **Supraledande fullerener och organiska material** Ytterligare en klass av supraledande material utgörs av dopade fullerener, d.v.s. fotbollsmolekylen C_{60} och dess släktingar. Genom att dopa dem t.ex. med alkalimetaller kan man komma upp till transitionstemperaturer kring 40-50 K. Rubidium-thallium dopad C_{60} har t.ex. observerats ha $T_c = 45$ K [Z. Iqbal et al., Science, 8 November 1991; E. Dagatto, Science 239, 2410 (2001)].

((Det finns också en rapport om supraledande fullerenor vid 117 K av Jens Hendrik Schön, men han blev senare fast för förfalskning av data och de flesta av hans publikationer har återtagits. Därför är fulleren-resultatet nästan säkert falskt.))

Även organiska material kan vara supraledande, med åtminstone delvis liknande egenskaper som fullerenor uppvisar. Mekanismen för supraledning i dessa är oklar, BCS-teorin verkar inte fungera helt här heller.

● **Magnesiumdiborid.** Överraskningarna kring supraledning slutade inte år 1986. År 2001 fann Jun Akimitsu vid Tokyos universitet att magnesiumdiborid MgB_2 är supraledande med $T_c = 39$ K. Orsaken att detta var en överraskning var främst att i motsats till de komplexa kopparoxiderna, är magnesiumdiborid ett helt vanligt material som nästan bokstavligen kunde ha köpts från ett vanligt apotek. Ändå hade ingen kommit på att undersöka om den är supraledande före Akimitsu, som också märkte det av en slump. MgB_2 beter sig ungefär som de normala lågtemperatursupraledarna, d.v.s. BCS-teorin kan förklara dess egenskaper.

● **Järnpniktid-högtemperatursupraledare.** År 2008 upptäckte Hideo Hosono vid Tokyos teknologiska institut att en så kallad järnpniktid, $\text{LaO}_{1-x}\text{F}_x\text{FeAs}$ var supraledande. Senare har man hittat andra supraledande pniktider, med ett maximum i transitionstemperatur kring 55 K. Dessa verkar höra

till sina egenskaper till samma klass av material som koppar-oxid- supraleidarna, dvs. BCS-teorin fungerar inte.

- **Supraleidning i H₂S vid högt tryck.** Den allra senaste överraskningen kom år 2015, då Mikhail Erements grupp i Tyskland upptäckte att den mycket vanliga gasen vätesulfid H₂S (allmänt känt som gasen som orsakar lukten av ruttna ägg) är supraleidande vid en så hög temperatur som 203 K, då den är i fast form i extremt högt tryck (150 GPa). [Drozdov et al Nature 525 (2015) 73–6]

16.1.2. Tillämpningar

I praktiskt arbete finns det tre extra viktiga temperaturer för materialfysiker och -ingenjörer. De är 4.2 K, 77 K och 300 K.

Den första är kokpunkten för flytande He, den andra flytande kväve (LN2 i arbetsslang), och den tredje naturligtvis rumstemperatur. Orsaken att de två tidigare är viktiga är att det behändigaste sättet att hålla ett material nerkyllt är att kyla ner det antingen med He- eller N₂-vätska. För priset mellan dessa material finns en bra tumregel: flytande He kostar som (god) whisky, flytande kväve som mjölk.

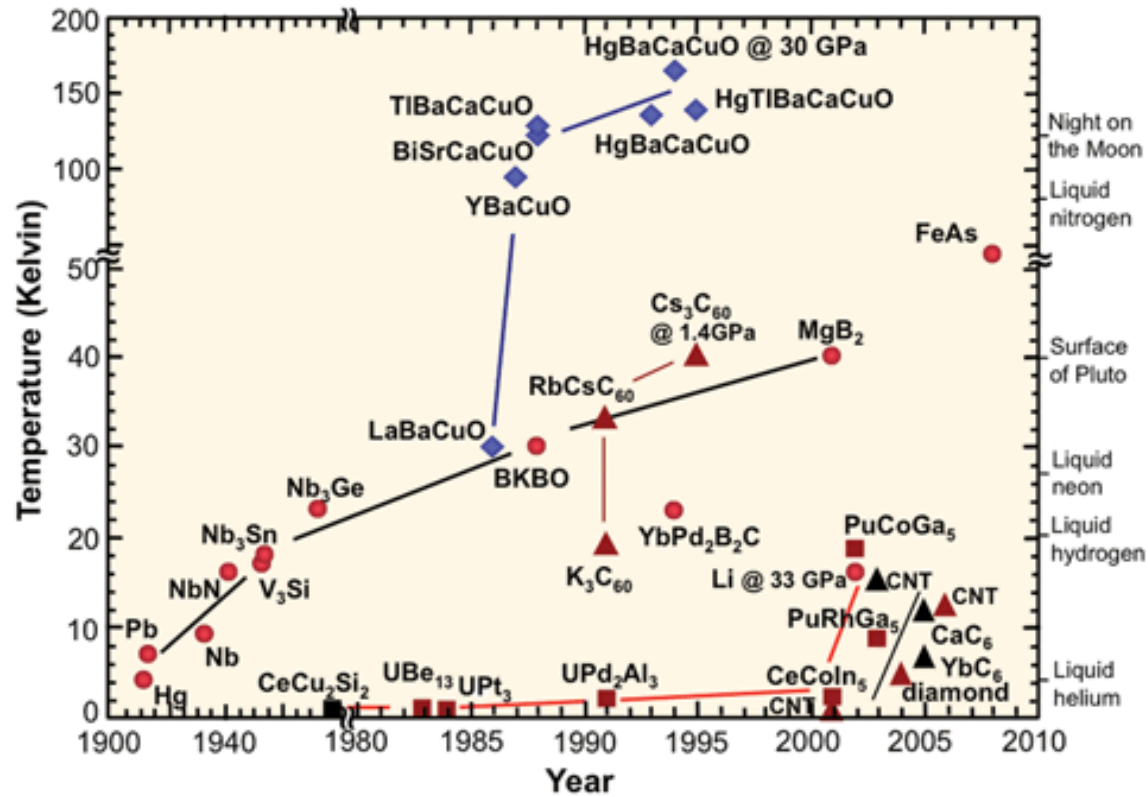
Detta förklarar det stora intresset i YBCO: i.o.m. att det är supraledande vid flytande kvävetemperatur, är det potentiellt extremt mycket billigare att använda än de traditionella supraledarna, som kräver flytande He. Nackdelen med YBCO och alla andra högtemperatur-supraledare är att de är keramiska, spröda material som är mycket mer komplicerade att göra till långa trådar än metaller.

Därför är de flesta supraledande tillämpningarna som används i verkliga livet fortfarande baserade på låg-T supraledare som fungerar med He-nedkyllning. Dessa dominerar fortfarande världsmarknaden.

År 2002 utgjordes marknaden till ung. 99 % av klassiska supraledare, medan hög-temperaturledarna bara står för ungefär 1 % av marknaden [Kai Nordlund, Privat kommunikation med Outokumpu Poricopper].

En av de främsta tillverkarna på dessa är f.ö. det föredetta Outokumpu Superconductors (numera ägt av det internationella företaget Luvata), som tillverkar kopparkablar med extremt många, extremt tunna (ner till 20 nm) Nb-baserade supraledare. De används bl.a. som ledare i supraledande magneter i partikelacceleratorer (KEK, CERN), fusionsreaktorer, och i “magnetic resonance imaging”-bilder (MRI).

Det som verkligen skulle vara revolutionerande var om man kunde tillverka supraledare som fungerar vid rumstemperatur. Tyvärr ser inte oddsena alltför lovande ut för detta; utvecklingen ser ut att ha stannat kring 100 K. Men det finns visst hopp ännu om att man kunde tillverka tunna ytskikt som är supraledande vid betydligt högre temperaturer.



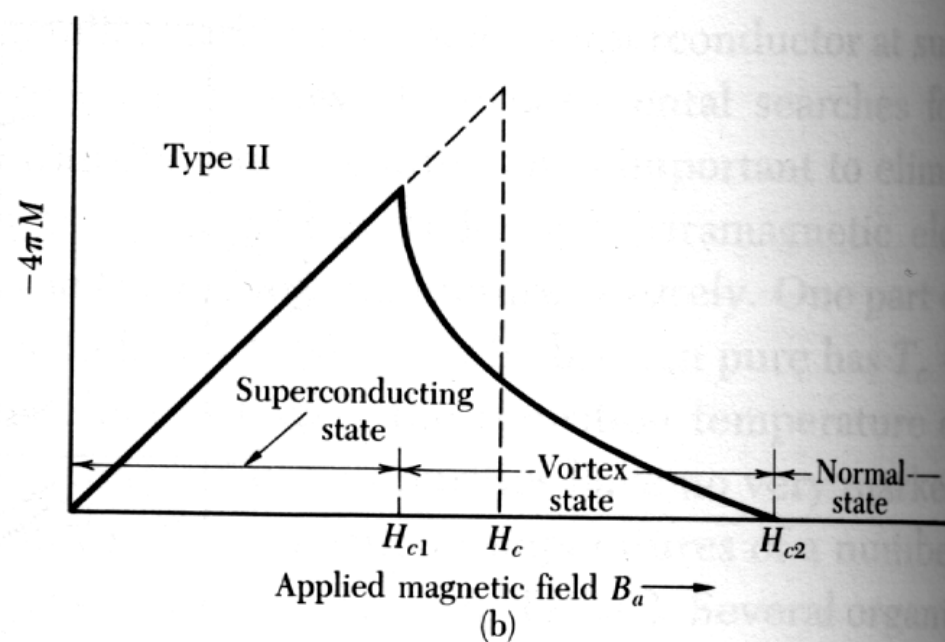
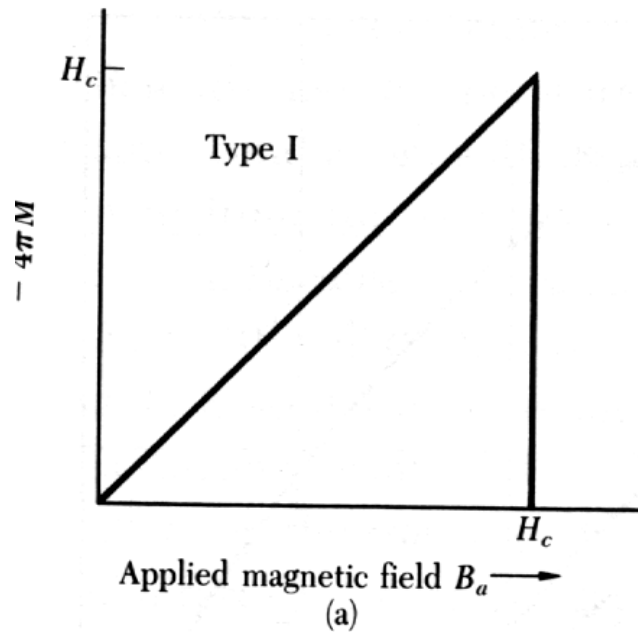
16.1.3. Indelning av supraledare enligt magnetiska egenskaper

Supraledarna indelas i 2 olika typer enligt de magnetiska egenskaperna. Den enklare typen (*I*) kännetecknas av förekomsten av ett väldefinierat, **kritiskt magnetiskt fält** $H_c(T)$, som har ett maximalt värde vid $T = 0$ och som blir 0 då $T = T_c$

I supraledarna av typ *II* finns två skilda kritiska fältnivåer:

$$H_{c1} < H_{c2} \quad (1)$$

För fältstyrkor som är mindre än H_{c1} utesluts det magnetiska fältet fullständigt från supraledaren. För fältstyrkor H i mellanområdet: $H_{c1} < H < H_{c2}$ genomtränger det magnetiska fältet partiellt supraledaren, medan supraledningsförmågan försvinner. I mellanområdet är det magnetiska fältet inom supraledaren koncentrerat till smala trådartade områden som kallas **vortexlinjer**. Dessa bildar ett regelbundet gitter av parallella linjer.



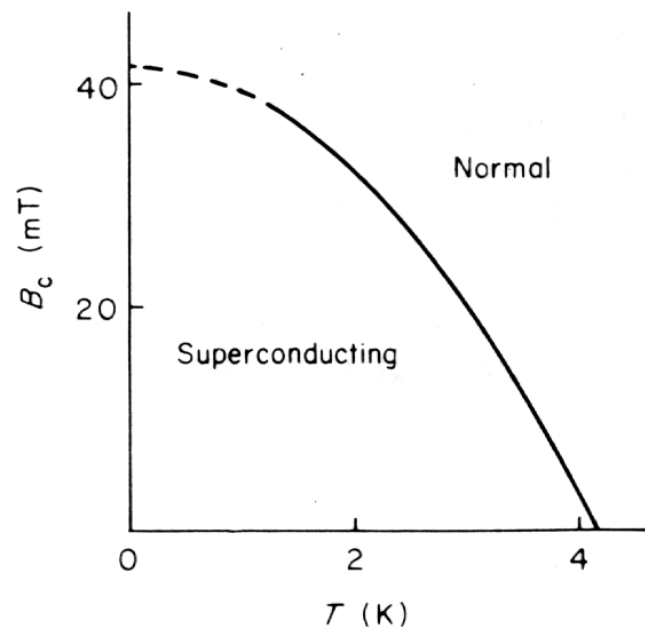
Värdet på H_{c2} kan vara extremt högt i vissa typ II-supraledare, upp till storleksordningen 50 T (högre än man kan mäta, detta är en extrapolation). Om man sedan ännu kan uppnå en hög magnetisk hysteresis, har man vad som kallas en "hård supraledare" som kan användas för att tillverka extremt höga magnetfält. Det är just dessa material som Outokumpu et co. använder.

16.1.4. Kritiska fält, strömmar och temperaturer

I supraledare av typ I har det kritiska fältet B_c eller H_c ett enkelt temperaturberoende:

$$B_c(T) = B_c(0) \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2} \right) \quad (2)$$

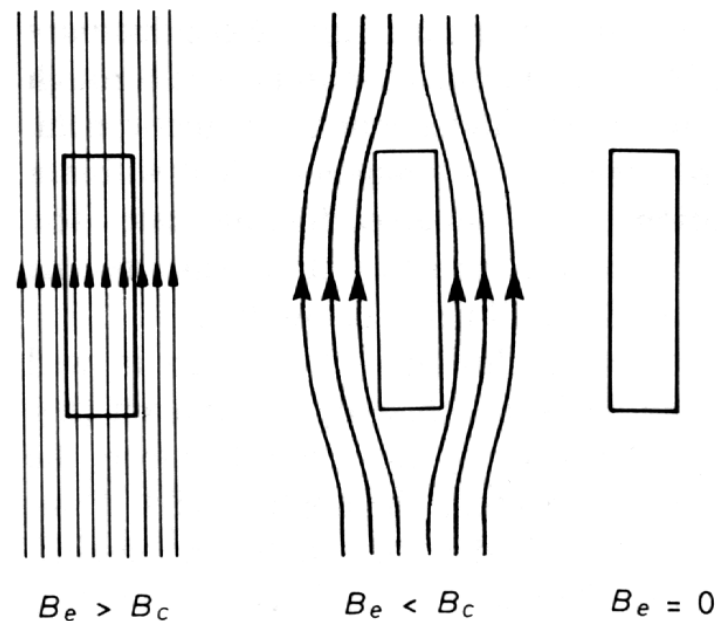
som illustreras här för kvicksilver:



Vidare gäller att supraledare bara kan bära begränsade strömtätheter och att supraledningsförmågan försvinner då strömtätheten överstiger en kritisk gräns. Den kritiska strömtäthetens värde sammanhänger med den kritiska magnetiska fältstyrkan. Strömtätheten ger upphov till ett magnetiskt fält, vars styrka inte får överstiga det den kritiska fältstyrkans värde B_c på supraledarens yta.

16.1.5. Meissner-effekten

Ett viktigt drag i typ I:s supraledare är att de i det supraledande stadiet fullständigt repellerar magnetiska fält. Detta är känt som **Meissner-effekten**. Orsaken är att då provet kan leda perfekt, kommer den att generera strömmar på sin yta, som förmår fullständigt att kancellera det yttre fältets verkan:



Detta kan beaktas i de flesta fall med att kräva att

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = 0 \implies \mathbf{M} = -\mathbf{H} \quad (3)$$

vilket motsvarar en susceptibilitet på

$$\chi = -1 \quad (4)$$

P.g.a. detta beteende kallas supraledare ofta **perfekta** diamagneter.

16.1.6. Energigapet

För supraledarna gäller att energifördelningen har ett energigap med vidden Δ centrerad vid Fermienergin, vilket innebär att elektroner kan flyttas till ett ledningsband bara om de tillförs en energimängd som överstiger Δ .

Detta energigap skall dock inte blandas med det i halvledare och insulatorer; den har i själva verket ett helt annat ursprung, som härrör sig till den supraledande mekanismen. Värmekapaciteten som orsakas av gapet har också temperaturberoendet

$$e^{-\Delta/2k_B T} \tag{5}$$

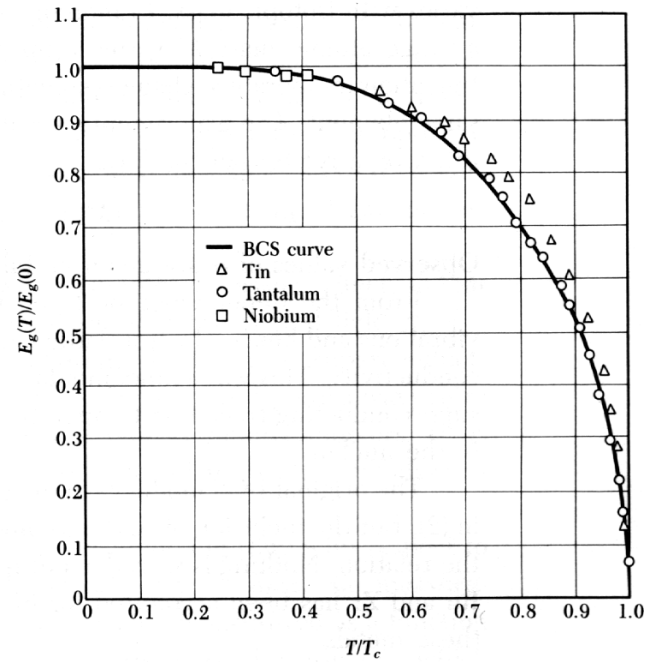
istället för beteendet $\exp(-\Delta/k_B T)$ som observeras normalt.

Här är några värden på energigapet:

Table 3 Energy gaps in superconductors, at $T = 0$

											Al	Si
$E_g(0)$ in 10^{-4} eV.											3.4	
$E_g(0)/k_B T_C$.											3.3	
Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	
		16.							2.4	3.3		
		3.4							3.2	3.5		
Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn ^(w)	
		30.5	2.7						1.5	10.5	11.5	
		3.80	3.4						3.2	3.6	3.5	
La _{fcc}	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg ⁽ⁿ⁾	Tl	Pb	
19.		14.							16.5	7.35	27.3	
3.7		3.60							4.6	3.57	4.38	

Gapet är alltså mycket mindre än i halvledare! Dessutom försvinner gapet med temperaturen:



Supraleidare kan bära växelström så länge dennas frekvens uppfyller villkoret

$$\hbar\omega < \Delta, \quad (6)$$

där Δ är energigapet vid Fermiytan.

16.2. London-ekvationen

((Denna paragraf ges i CGS-enheter))

Att säga att supraledarna inte har något magnetfält i sitt inre är uppenbart lite problematiskt, ty det säger ingenting om hur transitionen sker - det är inte särdeles trovärdigt att den i verkligheten skulle ske vid en atomärt skarp gränssyta. Därför behövs en mer avancerad modell som kan behandla supraledare. För att man inte heller vill kasta hela den klassiska elektrodynamiken överbord, har man utvecklat en fenomenologisk modell som kan beskriva supraledning och är konsistent med Maxwells ekvationer.

Den fenomenologiska beskrivningen av supraledare utgår från antagandet att elektronerna i en supraledare bildar två skilda elektronsystem - ett supraledande och ett normalt. Den supraledande och den normala elektrongasens densiteter n_s och n_n bildar den totala elektrontätheten n :

$$n_s + n_n = n \quad (7)$$

Vid $T = 0$ är $n_s = n$ och vid $T = T_c$ är $n_s = 0$.

16.2.1. Egenskaper hos perfekta ledare

För att beskriva elektroner i supraledare, använder vi först normala elektrodynamik för att härleda ekvationer för *perfekta ledare*.

Den supraledande komponenten av elektrongasen, som saknar resistivitet, responderar mycket snabbare till transienta fält än den normala komponenten. Då den supraledande strömmen saknar dissipation gäller den klassiska rörelseekvationen för den genomsnittliga hastigheten för de supraledande elektronerna i ett elektriskt fält:

$$m \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = -e\mathbf{E} \quad (8)$$

Detta är alltså samma ekvation som i frielektronmodellerna utom att termen som beskriver spridning från fononer eller orenheter

$$\frac{\mathbf{p}}{\tau} \quad (9)$$

saknas.

Den supraledande strömtätheten är

$$\mathbf{j} = -e\mathbf{v}_s n_s, \quad (10)$$

varigenom

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{n_s e^2}{m} \mathbf{E}. \quad (11)$$

Fouriertransformation leder till

$$\mathbf{j}(\omega) = i \frac{n_s e^2}{m\omega} \mathbf{E}, \quad (12)$$

varigenom den frekvensberoende konduktiviteten blir

$$\sigma(\omega) = i \frac{n_s e^2}{m\omega}. \quad (13)$$

Enligt Faradays lag i elektrodynamiken är

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (14)$$

Genom att ersätta \mathbf{E} med $d\mathbf{j}/dt$ (ekvation 11) fås

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{j} + \frac{n_s e^2}{mc} \mathbf{B}) = 0. \quad (15)$$

Maxwells ekvation för den magnetiska induktionen är

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (16)$$

ifall den dielektriska förskjutningsströmmen bortlämnas.

De två senaste ekvationerna kan alltså användas för att beskriva magnetfält och ledningsegenskaper i perfekta ledare.

16.2.2. Egenskaper hos supraledare

Ett godtyckligt statiskt magnetiskt fält \mathbf{B} leder till en motsvarande statisk strömtäthet \mathbf{j} genom ekvation (16). I såfall är Faradays induktionslag (14) automatiskt satisfierad. För beskrivningen av supraledare som inte tillåter statiska magnetiska fält måste ett ytterligare villkor tillfogas. Ett sådant är den s.k. London-ekvationen, som *postuleras* för supraledare:

$$\nabla \times \mathbf{j} + \frac{n_s e^2}{mc} \mathbf{B} = 0 \quad (17)$$

Notera alltså att denna lag är helt fenomenologisk; den är inte härledd på något sätt, utan används bara för att den fungerar bra i normala fall, och är konsistent med Maxwells ekvationer. Den kan förstås vara en mer restriktiv form av ekvation (15), som ju säger att

$$\nabla \times \mathbf{j} + \frac{n_s e^2}{mc} \mathbf{B} \quad (18)$$

bör vara tidsberoende; Londons ekvation säger ytterligare att storheten måst dessutom vara noll.

En supraledare och en perfekt ledare är alltså inte samma sak!

Ekvation (17) kan också förstås vara motsvarigheten för Ohms lag i supraledare; i.o.m. att $\sigma = \infty$ i supraledare är Ohms lag i sig självt ganska onyttig här. Men London-ekvationen ger ett sätt att beräkna strömmen i supraledare.

Den främsta orsaken till Londonekvationens form är att den leder till Meissnereffekten ! Kombination av Londonekvationen (17) och Maxwellekvationen

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (19)$$

ger

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\underbrace{\nabla \cdot \mathbf{B}}_{=0}) - \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \nabla \times \mathbf{j} = -\frac{4\pi n_s e^2}{mc^2} \mathbf{B}. \quad (20)$$

samt

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{j}) = \nabla(\underbrace{\nabla \cdot \mathbf{j}}_{=0 \text{ ty inga källor finns}}) - \nabla^2 \mathbf{j} = -\frac{n_s e^2}{mc} \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{4\pi n_s e^2}{mc^2} \mathbf{j}. \quad (21)$$

och alltså de två ekvationerna

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B} = 0, \\ \nabla^2 \mathbf{j} - \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{j} = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Här har parametern λ_L definierats som

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}} \text{ (CGS)}. \quad (23)$$

eller

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}} \text{ (SI)}. \quad (24)$$

λ_L representerar den s.k. penetrationslängden för det magnetiska fältet i supraledaren, och kallas **Londons penetrationsdjup**. Med ett typiskt värde på $n_s = 10^{29}$ får man $\lambda_L = 170 \text{ \AA}$.

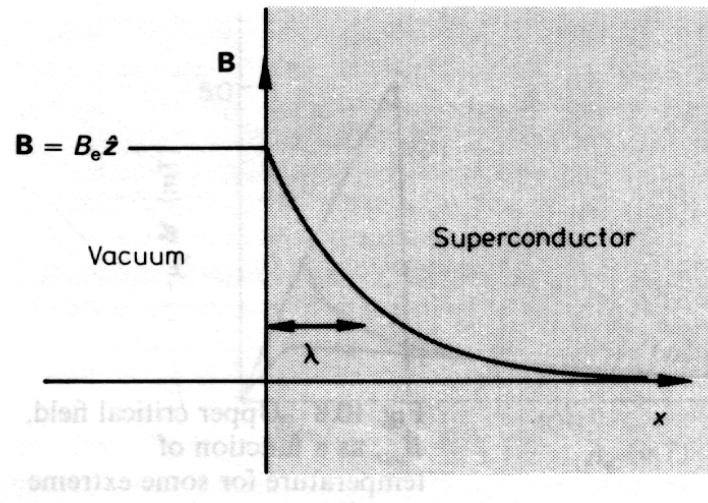
Om ytan för det supraledande materialet är $z = 0$, med supraledaren i området $z > 0$ och $\mathbf{B}(0) = \mathbf{B}_0$, blir Helmholtzekvationen för fältkomponenterna

$$\frac{d^2}{dz^2} \mathbf{B} - \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B} = 0, \quad (25)$$

vars lösning är

$$\mathbf{B}(z) = \mathbf{B}_0 e^{-z/\lambda_L}, \quad z \geq 0. \quad (26)$$

Detta resultat visar att det magnetiska fältet bara kan tränga in i supraledaren i ett ytskikt vars storleksordning är $\sim 100 \text{ \AA}$:



16.3. BCS-teorin

Den mikroskopiska teorin för supraledning har formulerats av Bardeen, Cooper and Schrieffer, och därmed fått namnet BCS-teorin. Den fungerar extremt bra i låg-T supraledare. För hög-T supraledare fungerar den inte fullständigt.

Tyvärr är BCS-teorin alldeles för komplicerad för att genomgå matematiskt på denna kurs. Därför går vi bara igenom dess viktigaste kvalitativa drag och resultat.

16.3.1. Energigap och Cooper-par

Utgångspunkten i teorin är energigapet Δ , som separerar de n_s supraledande elektronerna från de övriga i normala tillstånd, som ovan redan diskuterades.

Det finns mycket experimentella bevis för gapets existens. Den kan mätas direkt t.ex. genom att belasta en fog mellan en supraledare och en normal ledare med en spänningsskillnad. Om fogen är ett tunt isolerande skikt kan elektroner tränga genom fogen den p.g.a. kvantmekaniska tunneleffekten. Det visar sig att tunnelströmmen uppträder först då spänningsskillnaden över fogen överstiger värdet $\Delta V = \Delta/e$, där Δ är "energigapets" storlek.

Ett annat bevis för gapets existens är att elektromagnetiska vågors absorption ökar drastiskt vid en viss frekvens, då fotonernas energi är tillräcklig att excitera elektroner över gapet.

Frekvensen där absorption börjar är

$$h\nu = 2\Delta(0) \quad (27)$$

vid 0 K (Δ är ju en funktion av T , som vi såg ovan). Denna faktor två är minst sagt mystisk: normal excitering kräver ju bara en energi Δ . Orsaken till faktorn två är att varje foton måste excitera två elektroner för att kunna absorberas i det supraledande tillståndet !

Detta leder till insikten att ledning i supraledare inte sker av enskilda elektroner, utan av elektronpar! Dessa par kallas **Cooper-par**.

Energien $2\Delta(0)$ är bindningsenergin hos ett Cooper-par, och absorptionsprocessen innebär i själva verket att en foton bryter upp ett Cooper-par.

Hur i all värden kan två elektroner vara bundna, då de ju båda är negativa och borde repellera varann? Orsaken (det är här teorin börjar bli komplicerad) är att gittervibrationer kan åstadkomma en effektiv positiv växelverkan mellan de två elektronerna.

Det visar sig dessutom att alla par bör vara identiska för att maximera energiminskningen som orsakas av paret. P.g.a. detta anses supraledning vara ett kooperativt fenomen, lite på liknande sätt som ferromagnetism. I båda är energiminskningen per par eller spinn som uppnås desto större, ju fler som är i samma tillstånd.

Vid $T=0$ är alla elektroner parade i Cooper-par, men vid högre temperaturer börjar de brytas upp av termisk excitation, vilket leder till minskning av gapet.

I en ren metall är medelavståndet mellan Cooper-par i metaller av storleksordningen

$$\xi_0 = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta(0)} \quad (28)$$

vid 0 K, där v_F är elektronernas Fermi-hastighet. ξ_0 är känt som **BCS-koherens-längden**. Enligt BCS-teorin är $\Delta(0) = 1.76k_B T_c$, vilket ger med typiska värden $T_c = 10$ K och $v_F = 10^6$ m/s

$$\xi \sim 10^4 \text{ \AA} \quad (29)$$

Notera att detta är ett extremt avstånd för två elektroner i ett gitter, då det ju ryms tusentals enhetsceller och därmed gitterkonstanter mellan elektronerna!

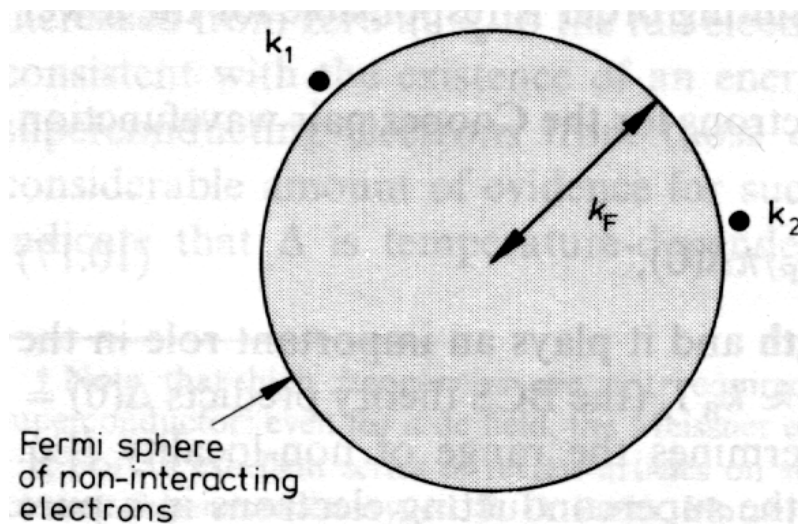
För att förstå bättre varför dessa par uppkommer följer vi nu samma väg som Cooper själv tog i tiderna.

16.3.2. Cooper-problemet

Inspirationen till BCS-teorin kom ur följande enkla problem.

Cooper löste Schrödinger-ekvationen för två växelverkande elektroner i närheten av en Fermi-sfär av icke-växelverkande elektroner. Visserligen är detta problem totalt orealistiskt, men om det ledde till insikten som gav Cooper Nobelpriset torde detta förlåtas honom...

Problemet kan illustreras på följande sätt. Två elektroner som växelverkar med varann har de fixerade vågtalen \mathbf{k}_1 och \mathbf{k}_2 utanför Fermiytan av ickeväxelverkande elektroner:



Vågfunktionen hos de två elektronerna kan utvecklas till att bli en linjär kombination av plana vågor,

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{\mathbf{k}_1} \sum_{\mathbf{k}_2} f(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2} \quad (30)$$

där de icke-växelverkande elektronernas roll är att inhibera summeringen till planvågs-tillstånd utanför Fermi-sfären ($|\mathbf{k}_1|, |\mathbf{k}_2| > k_F$)

Cooper sökte sedan efter tillstånd av denna form vars energi skulle vara mindre än $2\varepsilon_F$, dvs. energin för två elektroner just vid Fermiytan. Sådana tillstånd skulle motsvara bundna elektrontillstånd, vars

existens skulle tyda på att det normala tillståndet är instabilt gentemot att tillståndet kollapsar till det bundna tillståndet.

För den lägsta energin är masscentrum för elektronerna i vila, vilket kan uppnås bara med $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$, i vilket fall vågfunktionen reduceras till

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{\mathbf{k} > k_F} g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \quad (31)$$

där fortfarande alltså $|\mathbf{k}| > k_F$.

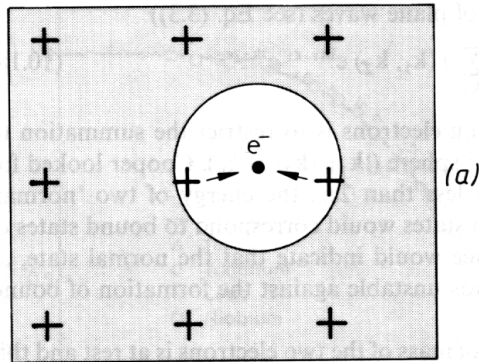
Cooper konstaterade att bundna tillstånd existerar alltid, oberoende av hur svag attraktionen är. Detta är ganska så överraskande om man jämför med vakuum, där bundna tillstånd för två partiklar existerar bara för växelverknings starkare än någon gränstyrka.

BCS-teorin grunder sig på antagandet att de bundna tillstånden existerar också då elektronerna innanför Fermisfären växelverkar med varann.

16.3.3. Den attraktiva elektron-elektron-växelverkan

För att förstå hur den attraktiva e-e-växelverkan kan uppstå, kan vi först påminna oss om att två elektroner i en metall långt från varandra kommer knappast att växelverka alls via den elektrostatiska växelverkan. Detta orsakas av att en fri elektron repellerar elektroner bort från sin omgivning, och skapar därmed ett lokalt område med positiv effektiv laddning, och negativ effektiv laddning utanför detta område, som fungerar som en avskärmning.

Den attraktiva kraften uppkommer av att ledningselektronen som repellerat elektroner bort från den lokala omgivning, nu ser lite av de positiva atomkärnorna, och har alltså en attraktiv växelverkan med de positiva jonerna i materialet. Detta leder till att den kan dra jonerna in lite mot sig, och skapa ett område med en effektivt positiv laddning kring sig. Men i.o.m. att elektronen rör sig mycket snabbare än jonerna, hinner den lämna området förrän jonerna relaxeras tillbaka till grundtillståndet, så den positiva laddningen kvarstår för en stund.



Om nu en annan ledningselektron kommer in i detta område, kommer den att attraheras av den positiva laddningen. Detta kan leda till en koppling i rörelse mellan de två elektronerna, som skapar Cooper-paren.

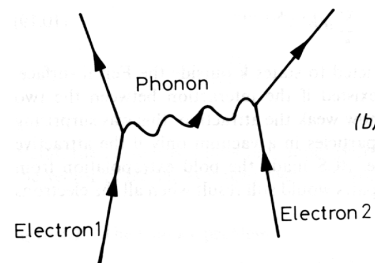


Fig. 10.13

I.o.m. att växelverkan mellan elektroner medieras av fononer, kan man också förstå processen som

att elektronerna utbyter **virtuella fononer**. Fononerna är virtuella därför att elektronens energi kan vid låga temperaturer inte ändras tillräckligt,

$$\sim \hbar\omega_D \quad (32)$$

då $T \ll \Theta_D$ (Θ_D är Debye-temperaturen), för att skapa en verklig fonon. En virtuell fonon skapas av en elektron och absorberas av en annan i en så kort tid,

$$\Delta t \lesssim \frac{1}{\omega_D} \quad (33)$$

att dess existens är tillåten av osäkerhetsrelationen

$$\Delta E \Delta t \lesssim \frac{\hbar}{2} \quad (34)$$

Då vi vet att $\Theta_D \sim 300$ K, kan vi uppskatta Δt :

$$\Delta t \sim \frac{1}{\omega_D} = \frac{\hbar}{\hbar\omega_D} = \frac{\hbar}{\hbar\omega_D} = \frac{\hbar}{k_B\Theta_D} = 25 \text{ fs} \quad (35)$$

Under denna tid hinner en elektron med en hastighet kring Fermihastigheten v_F röra sig

$$\Delta x = v_F \Delta t = \frac{v_F \hbar}{k_B \Theta_D} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_F}{m}} \Delta t \quad (36)$$

som med ett typiskt värde på Fermienergin $\varepsilon_F = 2$ eV blir 200 Å.

Detta kan också anses vara de virtuella fononernas "rörelselängd", om man tänker sig att man kan ersätta elektronernas växelverkan via en nästan orörlig fonon under tiden Δt med att använda en oändligt snabb växelverkan över sträckan Δx .

BCS-teorin grundar sig på denna förenkling, och härleder därifrån de flesta viktiga storheter i superkonduktivitet korrekt.

16.3.4. BCS-grundtillståndet

I BCS-teorin är alla elektroner parade vid 0 K. Elektronerna är ju fermioner, så ett par av elektroner är bosoner. För att alla vågfunktioner är dessutom identiska, beskrivs supraledning ofta att vara p.g.a. Bose-Einstein-kondensation av Cooper-par.

Detta illustreras i följande bild, som visar två tillstånd vid 0 K:

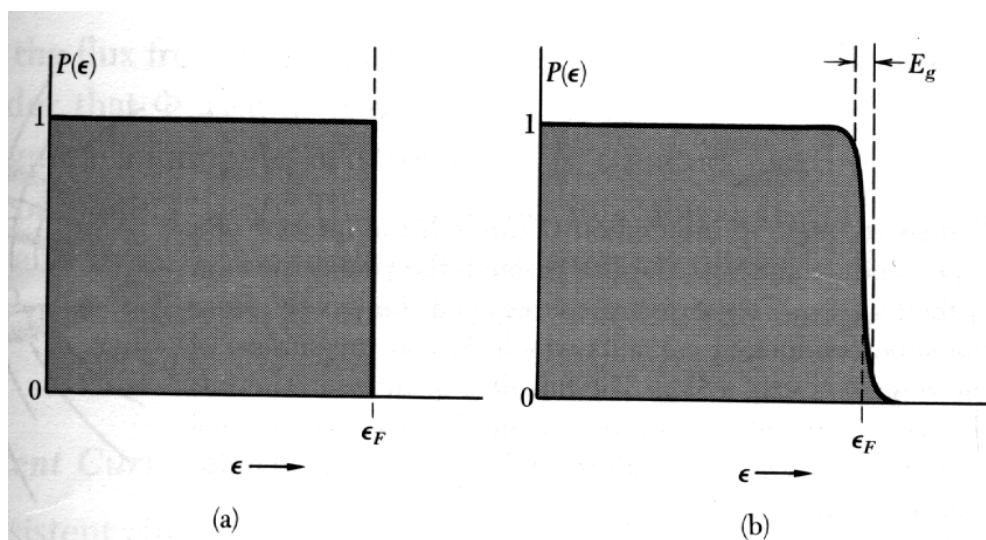


Bild a) är det normala tillståndet. Bild b) illustrerar BCS-grundtillståndet. BCS-tillståndet innehåller blandningar av en-elektron-orbitaler som är ovanför Fermi-energin ϵ_F . Det kunde först verka som

om fall b) är högre i energi än fall a), och för den kinetiska energin är detta de facto fallet. Men den attraktiva växelverkan mellan elektronerna kommer att sänka på energin på detta system under systemet i fall a) (jämför med Cooper-problemet ovan).

Vi skriver nu ner en vågfunktion som motsvarar detta grundtillstånd. Vågfunktionen för alla Cooper-par kan fortfarande skrivas som en summa av plana vågor, men nu har vi *inte* mera restriktionen $\mathbf{k} > k_F$,

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{\mathbf{k}} g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \quad (37)$$

I de flesta (kanske alla) supraledare visar det sig dessutom att vågfunktionen är sfäriskt symmetriskt, dvs.

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = \psi(r_{12}) \quad (38)$$

så att Cooper-paren har inget banimpulsmoment. Den sfäriska symmetrin leder till att $g(\mathbf{k})$ beror bara på magnituden av \mathbf{k} ,

$$g(\mathbf{k}) = g(|\mathbf{k}|) = g(k) \quad (39)$$

så vågfunktionen är alltså symmetrisk under utbyte av \mathbf{r}_1 och \mathbf{r}_2 .

En antisymmetrisk par-vågfunktion $\phi(1, 2)$ kan då konstrueras genom att kombinera denna sym-

metrisk rymd-vågfunktion med en antisymmetrisk spinn-vågfunktion,

$$\phi(1, 2) = \psi(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \quad (40)$$

så spinnena i varje Cooper-par är motsatt ordnade.

(tankenöt för de som tycker om att grubbla om kvantfysik: försök få en intuitiv bild över hur en virtuell *fonon* kan ordna upp spinn hos elektroner...)

En vågfunktion för N elektroner som har $N/2$ Cooper-par alla i samma tillstånd kan skrivas

$$\Psi(1, 2, 3, \dots, N) = \mathcal{P} \{ \phi(1, 2) \phi(3, 4) \cdots \phi(N-1, N) \} \quad (41)$$

där \mathcal{P} är en operator som gör produkten antisymmetrisk vid utbyte av vilka som helst två elektroner. Ekvation (41) är väsentligen BCS-modellens grundtillstånds-vågfunktion.

Som ett exempel på hur \mathcal{P} gör funktionen antisymmetrisk visar vi hur detta kan göras för två elektronpar:

$$\Psi(1, 2, 3, 4) = \mathcal{P} \{ \phi(1, 2) \phi(3, 4) \} \quad (42)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} [\phi(1, 2) \phi(3, 4) - \phi(1, 3) \phi(2, 4) - \phi(1, 4) \phi(3, 2)] \quad (43)$$

Om man nu t.ex. byter ut $1 \leftrightarrow 3$ får man

$$\Psi(3, 2, 1, 4) = \frac{1}{\sqrt{3}} [+\phi(3, 2)\phi(1, 4) - \phi(3, 1)\phi(2, 4) - \phi(3, 4)\phi(1, 2)] \quad (44)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} [-\phi(3, 4)\phi(1, 2) - \phi(3, 1)\phi(2, 4) + \phi(3, 2)\phi(1, 4)] \quad (45)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} [-\phi(1, 2)\phi(3, 4) - \phi(3, 1)\phi(2, 4) + \phi(1, 4)\phi(3, 2)] \quad (46)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} [-\phi(1, 2)\phi(3, 4) + \phi(1, 3)\phi(2, 4) + \phi(1, 4)\phi(2, 3)] \quad (47)$$

$$= -\Psi(1, 2, 3, 4) \quad \square \quad (48)$$

där vi i nästsista steget använt oss av vågfunktionens ϕ antisymmetri.

I alla supraledare där man kunnat definitivt bestämma Cooper-parens natur har vågfunktionen visat sig vara antisymmetrisk.

16.3.5. Förklaring för oändlig konduktivitet

För att ge en kvalitativ förklaring på den oändliga konduktiviteten i supraledare måste vi först beskriva hur det är möjligt att uppnå ett ledande tillstånd genom att ge en rörelsemängd för alla pars masscentrum. En ström motsvarar en vågfunktion av formen

$$\phi = e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \phi_0 \quad (49)$$

där ϕ_0 är vågfunktionen för ett ickerörligt elektronpar, och \mathbf{r} är deras masscentrum-koordinater. Ekvationen motsvarar en rörelsemängd $\hbar\mathbf{q}$ hos paret, och därmed en hastighet

$$\hbar\mathbf{q} = 2m\mathbf{v} \quad (50)$$

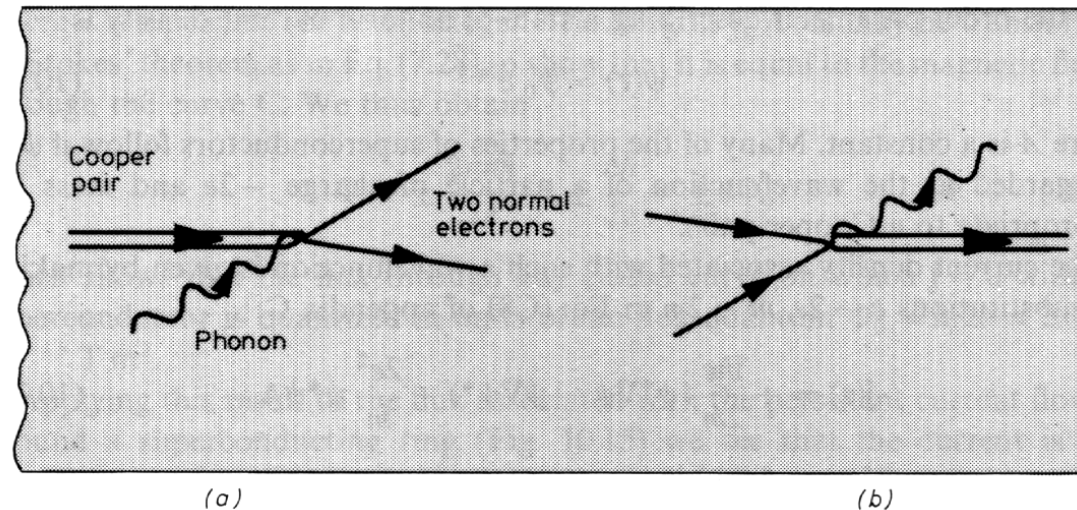
I.o.m. att Cooperparets laddning är $-2e$ blir strömtätheten

$$\mathbf{j} = -\frac{n_s}{2} 2e \frac{\hbar\mathbf{q}}{2m} = -\frac{n_s e \hbar\mathbf{q}}{2m} \quad (51)$$

för en täthet av n_s supraledande elektroner per volymenhet.

Nu är den kvarvarande frågan varför inte spridning från orenheter och fononer begränsar på ledningsförmågan, på samma sätt som den gör det i vanliga ledare.

Det finns två tänkbara sannolika fonon-växelverkningsprocesser: en där en fonon absorberas av ett Cooper-par, som därmed bryts upp, en annan där två elektroner kombinerar till att forma ett Cooperpar och samtidigt avger en fonon:



I ett supraledande tillstånd i jämvikt sker dessa processer hela tiden med samma sannolikhet, för annars skulle summan av antalet supraledande elektroner n_s och normala n_n inte bevaras.

Men p.g.a. att energin har ett minimum då alla Cooper-par har samma vågfunktion, kommer alla elektronpar som skapas av process b) att ha samma vågfunktion (49). Och i.o.m. att antalet Cooper-par bevaras i jämvikt, stör det inte att en del par förstörs av process a), då andra skapas

genom process b) med samma frekvens. Därmed kommer inte fonospridningen att sänka på ledningsförmågan.

Orenheter igen kan inte sprida Cooper-par alls, för att spridning från orenheter är en elastisk process: om ett Cooper-pars rörelsemängd ändras, ändras också dess bindningsenergi, så detta är en inelastisk process som inte är möjlig.

16.4. Högtemperatur-supraledare

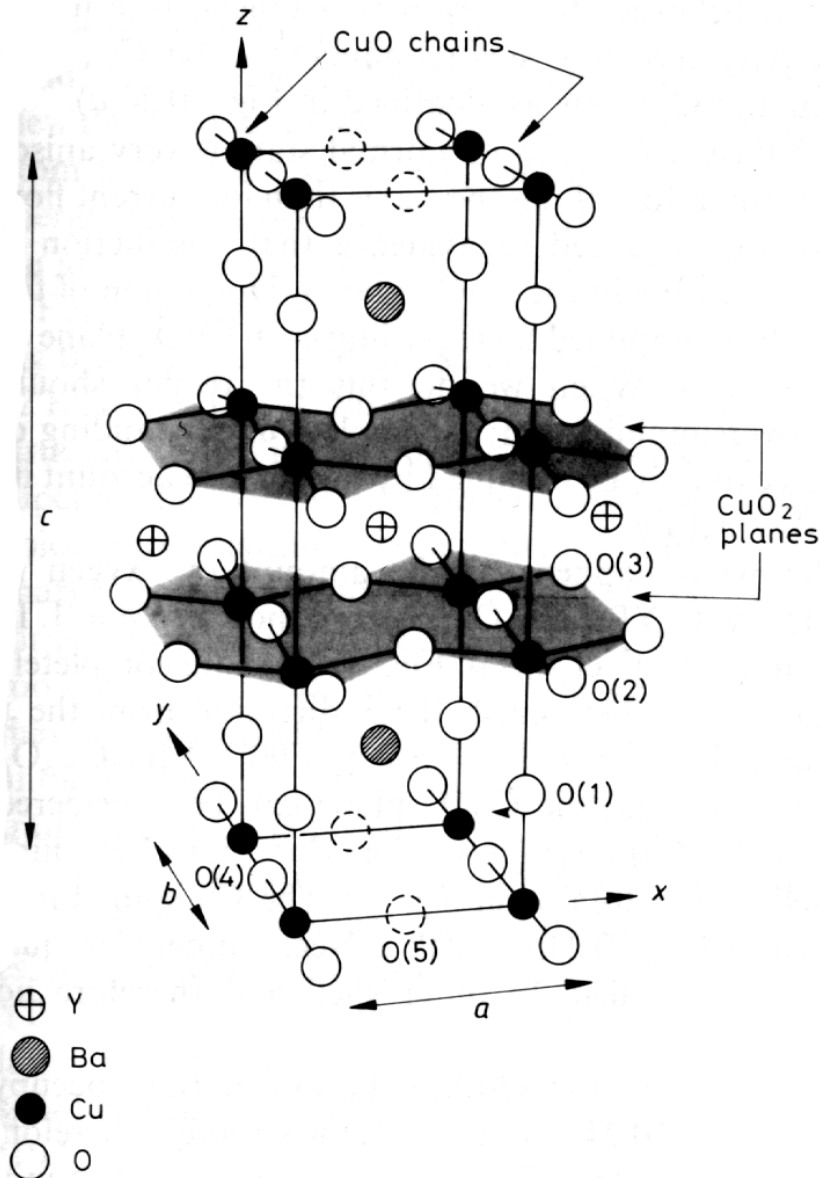
Vi ser ännu i lite större detalj på strukturen hos hög-T supraledare. Vi tar den mest bekanta, YBCO eller



som exempel. Här är δ något tal ≤ 1 , och typiskt kring 0.1. Denna supraledare klassificeras som en **1-2-3-supraledare** p.g.a. antalet metallatomer i den.

Yttriumatomen kan här ersättas med flera andra trivalenta atomer (t.ex. Ho eller Nd) utan att de supraledande egenskaperna påverkas avsevärt.

Kristallstrukturen hos $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ illustreras här nedan.



Strukturen innehåller CuO_2 -plan i zx - och zy -planen i figuren. De flesta hög-T supraledare innehåller dylika CuO_2 - eller NiO_2 -plan.

Ifall $\delta = 1$, saknas atomerna O(4) och O(5) helt. Detta tillstånd är ickeledande. Om man nu minskar på δ , kommer de extra O-atomerna att börja fylla platserna O(4) och O(5) slumpmässigt. Syre-atomerna på dessa platser fungerar som acceptorer i halvledare, och leder alltså till håltillstånd. Men dessa hål är till en början lokaliserade.

Då man minskat på δ under 0.6, sker en struktureförändring, O(4)-tillståndena börjar fyllas framom O(5)-tillstånden. Samtidigt blir materialet en metall, i.o.m. att hålena delokaliseras. Om man kyler ner materialet vid $\delta = 0.6$ visar sig superkonduktivitet träda in vid $T_c \sim 40$ K. Om man ytterligare minskar på δ , ökar T_c , för att nå ett maximum på 92 K då $\delta = 0.1$.

Med denna kristallstruktur har ingen lyckats till

Superkonduktiviteten i YBCO beror på att hålena (!) som introducerats av syre-atomerna bildar Cooper-par.

P.g.a. kristallstrukturen och dess nära samband med ledningsegenskaperna är superkonduktivitetsegenskaperna i YBCO starkt anisotropiska. Den kritiska strömmen är t.ex. mycket större för ledning i xy -planet än för ledning i z -riktning.

P.g.a. det höga värdet på T_c och låga Fermihastighet hos YBCO är koherenslängden (storleken på Cooper-parens vågfunktion)

$$\xi_0 = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta(0)} \quad (53)$$

därmed också mycket liten, bara av samma storleksordning som enhetscellen. Penetrationsdjupet igen visar sig vara mycket stort. Dessa fakta leder till att hög-T supraledare är av typ II med extremt stora värden på H_{c2} .

16.5. Flödes-kvantisering och livstiden hos supraledare

Det faktum att alla Cooper-par har samma vågfunktion gör att beteendet hos alla supraledande elektroner är fullständigt beskrivet av denna ena vågfunktion. Detta innebär att hela den makroskopiska laddningstätheten på $\sim 10^{29}$ el/m³ kan beskrivas med bara två platsvariabler, och gör att kvantmekaniska effekter kan observeras direkt på makroskopisk skala.

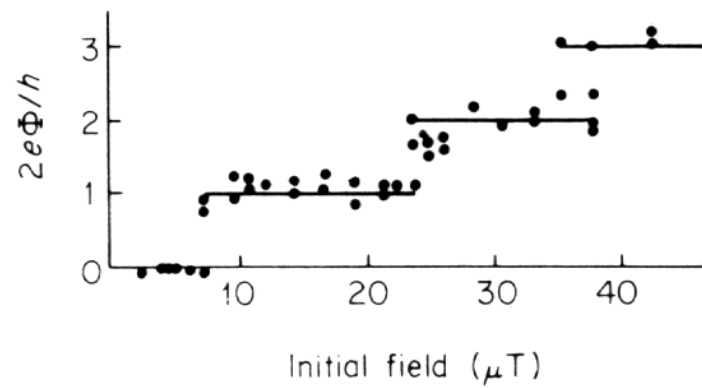
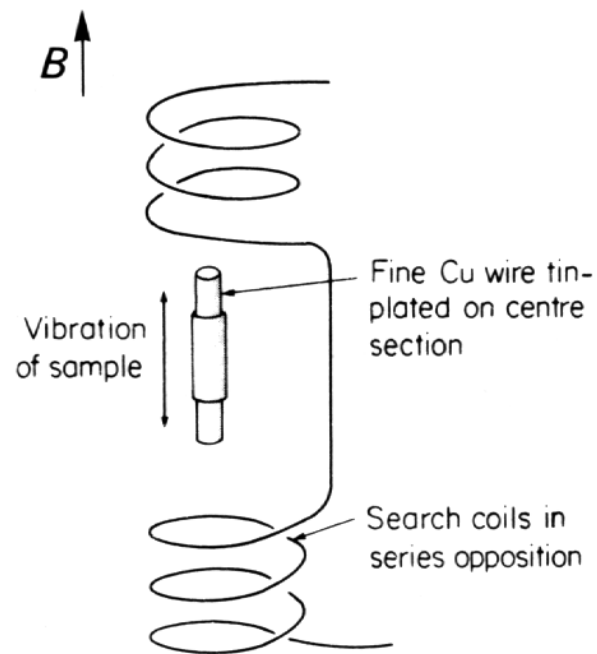
En intressant följd av de kvantmekaniska aspekterna är att det magnetiska flödet Φ kvantiseras. Man kan visa att kvantiseringen blir

$$\Phi = \pm \frac{\pi n \hbar}{e} = \pm n \Phi_0 \quad (54)$$

där Φ_0 är flödets kvantum (en **fluxoid** eller **fluxon**), som har värdet

$$\Phi_0 = 2.07 \times 10^{-15} \text{T m}^2 \quad (55)$$

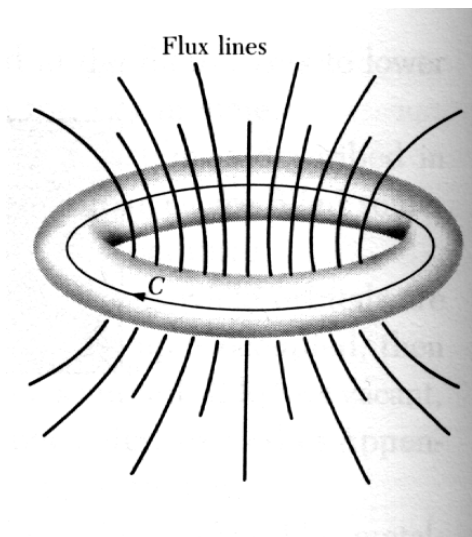
Denna effekt är tillräckligt stor för att kunna mätas experimentellt:



Kvantiseringen av flödet leder också till att strömmen i supraledaren kvantiseras. Detta leder i sin tur till att den blir extremt hållbar mot yttre störningar.

Vi uppskattar nu hur länge en sådan ström kan hållas utan att attenueras (beräkningen är i CGS-enheter).

Vi betraktar en supraledande ring med längden L och tvärsnittsarean A .



En fluxoid kan inte läcka ut ur ringen och därmed attenueras med någon annan mekanism än att en termisk excitation gör att en minimivolym av den supraledande ringen är moment i det normala (ickesupraledande) tillståndet.

Sannolikheten per enhetstid att en fluxoid läcker ut är

$$P = (\text{försöks-frekvensen}) \times (\text{aktiveringsbarriären}) \quad (56)$$

Aktiveringsbarriären är

$$e^{-\Delta F/k_B T} \quad (57)$$

där barriärens fria energi är

$$\Delta F = (\text{minimivolymen}) \times (\text{grundtillståndets överskott i fri energi}) \quad (58)$$

Den minsta möjliga volymen som måste komma i det normala tillståndet för att en fluxoid kunde fly är av ordningen

$$R\xi^2 \quad (59)$$

där R är ledarens radie och ξ är koherenslängden hos materialet. Energidensiteten hos det normala tillståndet är $H_c^2/8\pi$, så barriärens energi är

$$\Delta F \approx R\xi^2 \frac{H_c^2}{8\pi} \quad (60)$$

Om vi använder oss av typiska värden på $R = 10^{-4}$ cm, $\xi = 10^{-4}$ cm, och $H_c = 1000$ G, får vi

$\Delta F \approx 10^{-7} \text{ erg} = 10^{-14} \text{ J}$. Med att använda ung. 8 K får man då

$$e^{-\Delta F/k_B T} = e^{-10^8} \approx 10^{-4 \times 10^7} \quad (61)$$

Den karakteristiska frekvensen med vilken en fluxoid kan försöka läcka ut är Δ/\hbar . Om nu t.ex. $\Delta = 1 \text{ meV}$, blir försöksfrekvensen nu ung. 10^{12} 1/s . Utläckningssannolikheten P blir då

$$P \sim 10^{12} \times 10^{-4 \times 10^7} \text{ 1/s} = 10^{-4 \times 10^7} \text{ 1/s} \quad (62)$$

och tiden för att fluxoiden skulle läcka det inversa värdet på detta,

$$T = \frac{1}{P} = 10^{4 \times 10^7} \text{ s} \quad (63)$$

Universums livstid hittills är ung. 10^{10} år så i enheten Universums livstider blir detta

$$10^{4 \times 10^7} \text{ s} = \frac{1}{60 \times 60 \times 24 \times 365} \frac{1}{10^{10}} 10^{4 \times 10^7} \text{ Universums livstider} \quad (64)$$

$$= \frac{1}{3 \times 10^{17}} 10^{4 \times 10^7} \text{ Universums livstider} \quad (65)$$

$$= 3 \times 10^{-17} 10^{4 \times 10^7} \text{ Universums livstider} \quad (66)$$

$$= 10^{4 \times 10^7} \text{ Universums livstider} \quad (67)$$

Så åtminstone med denna mekanism skulle supraledandet i praktiken aldrig avta avsevärt.

Tankenöt: anta att man skulle tillverka en supraledande slinga med konstant ström, och skjuta upp den i rymden i en riktning där den aldrig kommer att kollidera med något i det accelererande universum. Rymdens temperatur är ungefär 3 K (och sjunker ytterligare då universum accelererar). Vad skulle till slut bryta ned supraledningen i materialet?

Tips: tänk på kärnfysik.

Vad har du åtminstone lärt dig i detta kapitel?

- Du känner till begreppen supraledande material, kritisk temperatur, kritiska magnetfält, Meissner-effekt, Cooper-par
- Du känner till åtminstone fem klasser av supraledande material
- Du vet skillnaden mellan typ-I, typ-II, låg- och högtemperatursupraledare
- Du känner till att “perfekta ledare” och supraledare inte är helt samma sak
- Du vet kvalitativt att energigap och Cooper-pars Bose-Einsteinkondensation leder till supraledning
- Du vet att mekanismen för högtemperatur-supraledning är ett av de största olösta problemen i fysiken.