Fasta tillståndets fysisk VT 2015, RÖ 11

Sista inlämning Tisdag 5.5. kl. 16:00. Obs, du behöver inte göra dina egna uppgifter!

Uppgift 1

Ta en cylindrisk bit av en godtyklig metall, diametern skall vara 8,0 mm. Applicera en 1 kN stark dragkraft så att tvärsnittet reduceras med 2,8 x 10^{-4} mm. Beräkna den elastiska modulen då Poissons konstant är 0,30.

Uppgift 2

Anta att Youngs modul för Fe-nanotrådar i en $\langle 100 \rangle$-riktning följer funktionen (i GPa)

$$Y_{100} = \frac{a}{D} + b, \quad D \geq 2 \text{ nm}$$

där D är diametern i nm och a och b konstanter (med lämpliga enheter).

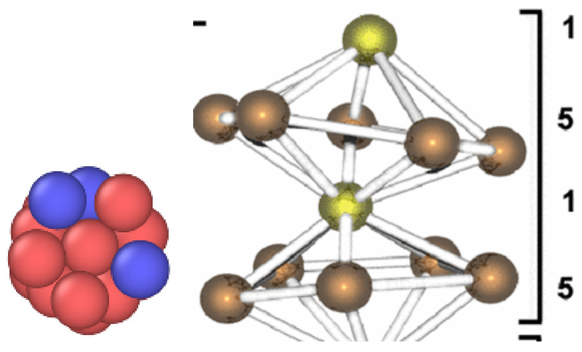
a) Vid vilken diameter är Youngs modul för Fe-nanotrådarna inom 1 % från motsvarande bulkvärde (132 GPa) om $Y_{100}(4 \text{ nm}) = 125$ GPa? Skissa funktionen.

b) Uppskatta andelen ytatomer i en nanotråd med diametern 4 nm samt diametern som beräknades i a)-delen. Anta att atomlagrets tjocklek är 2 Å.

Uppgift 3

Ett antal stabila pentagonala strukturer har förutspåtts i tunna nanotrådar av vissa FCC och BCC metaller. En av dessa strukturer består av en enkel atomkedja omringad av ringar av fem atomer enligt figurerna nedan (färgerna har ingen betydelse). Intilliggande atomringar är roterade ett halvt steg så att de bildar en packning "ABABAB...". Atomerna i kedjan i mitten är mittemellan ringarna.

Uppskatta packningsfaktorn för en nanotråd av denna struktur.



Uppgift 4

Härled uttrycket för den degenererade elektrongasens Fermienergi i d dimensioner, samt visa att den reduceras till uttrycket i föreläsningsanteckningarna när $d = 3$.
Tips: volymen för en d-dimensionell sfär är

$$V_d(R) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)} R^d,$$

där $\Gamma(z)$ *är Eulers gammafunktion, som har egenskaperna* $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ *och* $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Uppgift 5

Energin för elektroner i Kitaevs leksaksmodell för en 1-dimensionell topologisk supraledare ges av

$$E = \sqrt{(2t\cos(k) - \mu)^2 + 4\Delta^2 \sin^2(k)}$$

där k är vågvektorn i den reciproka rymden och t, μ och Δ är systemparametrar (här konstanter). Gitterkonstanten är här vald $= 1$.

a) Rita dispersionen då $t = \Delta = 1/2$, $\mu = 0$ och beräkna den effektiva massan som funktion av k.

b) Visa att då $\mu = 2t = 2\Delta = 1$ liknar dispersionsrelationen vid låga k den för ämnet grafen (vid denna punkt sker något som kallas en topologisk fastransition).

Uppgift 6

Energin för en gittermod motsvarar den för en harmonisk oscillator, $\epsilon = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$.

a) Beräkna medelenergin för gittermoderna ur Maxwell-Boltzmann-distributionen, och motivera påståendet att fononer kan anses vara bosoner.

b) Visa att modens värmekapacitet vid höga temperaturer går mot en konstant (vilken?).

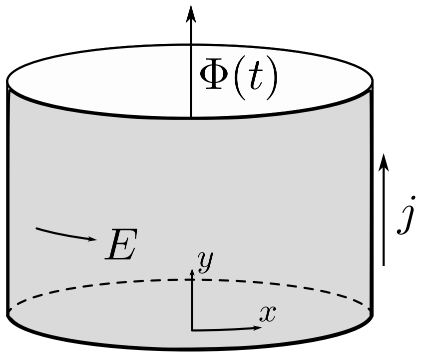
Uppgift 7

I den här uppgiften ska vi studera Hall-effekten i en annan geometri än tidigare på kursen. Systemet består av en cylinder, varpå elektronerna befinner sig. Vi kommer även träda ett magnetiskt flux $\Phi(t)$ i mitten av cylindern (alltså parallellt med cylinderns symmetriaxel). Hamiltonoperatorn för ett fritt system i ett magnetiskt fält är

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2.$$

För enkelhetens skull, kommer vi att betrakta cylindern (se figur) som en skiva med periodiska randvillkor $x \equiv x + L$. Vektorpotentialen kan då skrivas som

$$\mathbf{A} = (By + \Phi/L)\hat{\mathbf{x}},$$



Cylindersystemet

där $\hat{\mathbf{x}}$ är enhetsvektorn i x-riktningen och B är det associerade magnetiska fältet till flödet Φ.

A) Landaukvantisering

Visa att H kan skrivas om i formen av Hamiltonoperatorn för en harmonisk oscillator med vinkelfrekvensen $\omega = eB/m$ och jämviktspositionen $y_n = \frac{h}{LeB}(n - \Phi/\Phi_0)$, där n är ett heltal och $\Phi_0 = h/e$. *Tips: Eftersom elektronerna rör sig på en yta, har vi* $\mathbf{p} = p_x\hat{\mathbf{x}} + p_y\hat{\mathbf{y}}$*. Periodiska randvillkor innebär att* $k_x = 2\pi n/L$ *och eftersom* H *inte beror på* x*, kan man ersätta rörelsemängdsoperatorn i* x*-led med* $\hbar k_x$*.*

Vi kan nu använda oss av all vår kunskap om harmoniska oscillatorer för att studera det här systemet. Energinivåerna, som kallas för Landaunivåer, är nu $E_N = \hbar\omega(N+1/2)$ och för varje $y_n \in (0, W)$, där W är längden i y-led, har vi en uppsättning möjliga tillstånd som elektronerna kan ockupera. Om vi nu sakta höjer Φ fron 0 till Φ_0, ser vi att $y_n \to y_{n-1}$. Alla tillstånd har alltså hoppat ett steg neråt. Vid $T = 0K$ är alla Landaunivåer vid varje y_n ockuperade upp till Fermienergin. Det betyder alltså att en laddningsmängd $\Delta Q = \nu e$, där ν är antalet ockuperade Landaunivåer, har rört sig från $y = 0$ till $y = W$.

B) Konduktanskvantisering

Visa genom definitionen $\sigma_H = j/E$ ($j = I/L$ och E är strömtätheten i y-led respektive elfältet i x-led) att $\sigma_H = I/\partial_t\Phi$ och följdaktligen att den överförda laddningen under en tid ΔT blir $\Delta Q = \sigma_H h/e$, om vi antar att ökningen av Φ sker lineärt från 0 till Φ_0 (*Tips: Faradays lag*) och att därmed $\sigma_H = \nu e^2/h$. Hallkonduktansen är alltså heltalskvantiserad!

Det här är ett exempel på en så kallad topologisk invariant, då den är förhållandevis robust mot störningar och orenheter i systemet. Ett sätt att inse det, är att se störningar som i något avseende kontinuerliga transformationer av Hamiltonoperatorn. Eftersom transformationen är kontinuerlig, måste även konduktansen förändras kontinuerligt. I och med att det inte går att kontinuerligt gå mellan olika heltal, kan konduktansen alltså inte förändras så länge perturbationerna inte blir för stora.

Uppgift 8

Du har missat en föreläsning, eftersom du måste vila ut dig efter en lång beer pong turnering. Du har hört att det finns bra föreläsningar på nätet från toppuniversitet! Ange en bra videoföreläsning från t.ex Youtube, som bra förklarar kapitlet 6.1 Gittervibrationen och fononer.