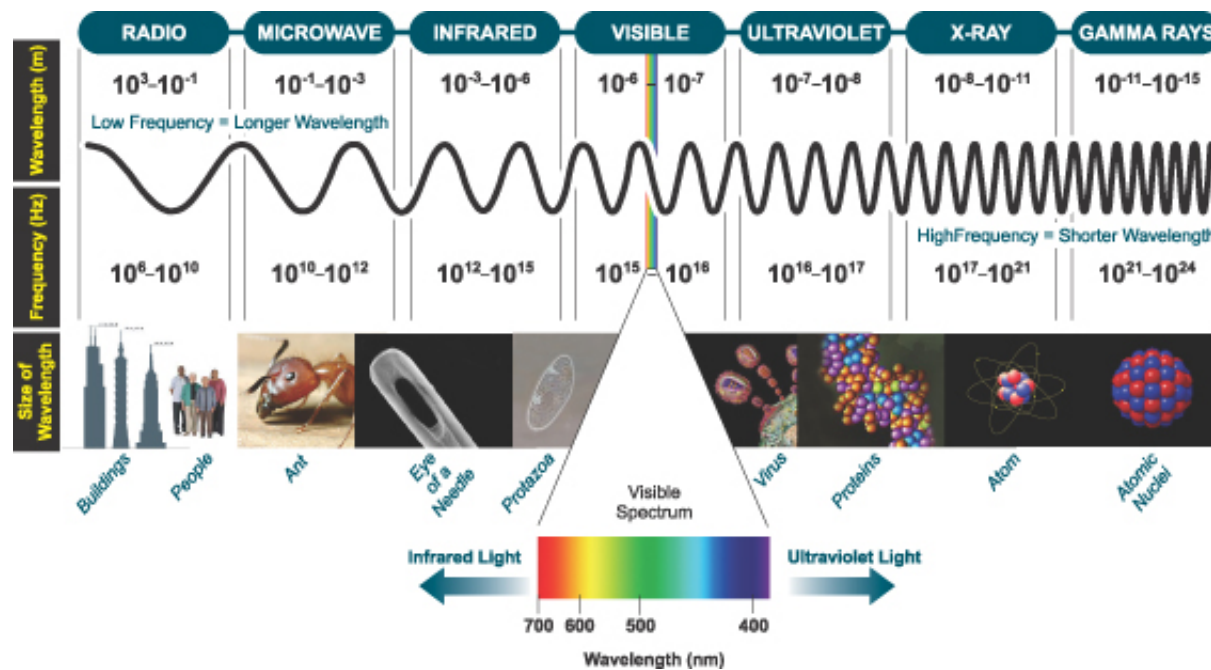


XVIII. Maxwells ekvationer och elektromagnetiska vågor

- I detta kapitel lär vi oss att förstå hur **elektromagnetiska** vågor (ex. ljus) kan fortplantas i vakuum och andra media.
 - Elektromagnetiska vågor är t.ex. radiovågor, synligt ljus, röntgenstrålning och gammastrålning.



- Man kan förstå egenskaperna hos dessa på basen av samma lagar vi kommit fram till under förra och denna kurs!

- Vi har lärt oss att beräkna det elektriska fältet från stationära laddningar och det magnetiska fältet från konstanta strömmar.
- När sedan dessa fält blir tidsberoende, kommer de att bero av varandra; ett magnetfält som förändras inducerar ett elektriskt fält och vice versa.

XVIII.1. Maxwells ekvationer

- För att förstå hur dessa fält växelverkar, sammanfattar vi de elektromagnetiska lagarna vi lärt oss hittills.

(1) Gauss lag (elektrostatik)	$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon}$
(2) Gauss lag (magnetism)	$\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \sum_i p_i$
(3) Amperes lag	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu I$
(4) Faradays lag	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -\frac{d}{dt} (\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A})$

-
- Dessa är dock inte ännu de fullständiga ekvationerna. Man kan på följande sätt resonera sig fram till detta.

- I ekvation (3) ger en ström upphov till ett magnetfält.

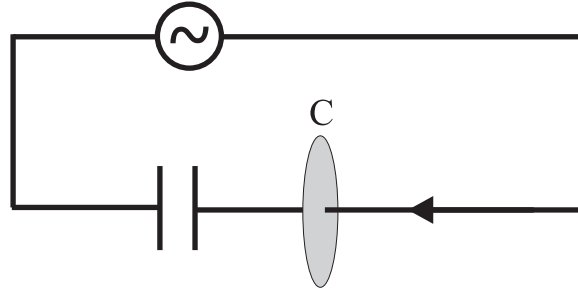
På samma sätt borde en ström av monopoler (ifall de finns) ge upphov till ett elektriskt fält i ekvation (4), vilket ger att (3) och (4) blir

(3) Amperes lag	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu I$
(4) Faradays lag	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = I_M - \frac{d}{dt} (\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A})$

där $I_M = \frac{dp}{dt}$ skulle vara den magnetiska strömmen.

- Jämför vi nu Amperes lag. Ekv. (3) med Faradays lag Ekv. (4), ser vi att de inte är symmetriska.

- Betrakta en kondensator som har blivit adderat till en växelströmkrets:



- Vi använder Amperes lag som ger att magnetfältet runt cirkeln C med radien r , blir

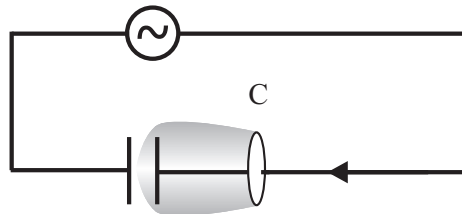
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = |\mathbf{B}|2\pi r = \mu I \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{B}| = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

där strömmen I kan skrivas som en areaintegral av strömdensiteten

$$I = \iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$$

där \mathbf{J} är strömdensiteten $[\mathbf{J}] = \text{A/m}^2$.

- Nu kan vi välja att ytan istället för en platt cirkel dras som en påse runt kondensatorn:



- I detta fall är strömmen genom påsytan ($I = \oiint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$) lika med noll, så att Amperes lag ger att magnetfältet runt ledningen är noll. Ett magnetfält finns dock där eftersom växelström hela tiden går i ledaren!

Med andra ord, två olika val av ytan i strömintegralen ger två olika svar, trots

- att själva fysikaliska systemet är oförändrar. Detta är en uppenbar paradox, och något måste saknas ur ekvationerna.
- Amperes lag Ekv. (3) är alltså otillräcklig för att beskriva situationen i detta fall.
- Ett tips till vad som saknas kan man få då man jämför ekvationerna (3) och (4).
I Ekv. (4) ger en magnetisk flödesförändring upphov till ett elfält:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \right) \quad (1)$$

- På samma sätt kunde en elektrisk flödesförändring ge upphov till ett magnetfält.
- Detta är just vad som sker, så att till Amperes lag Ekv. (3) bör adderas den elektriska flödestermen

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \epsilon \frac{d}{dt} \left(\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \right)$$

Amperes lag, som efter denna modifikation kallas **Ampere-Maxwells lag** blir

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \mu \left(I + \frac{d\Phi_E}{dt} \right) \\ &= \mu \left(I + \epsilon \frac{d}{dt} \iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \right) \\ &= \mu(I + I_D)\end{aligned}$$

där termen I_D kallas för **förskjutningsströmmen** (Eng. displacement current).

- Ser vi på nytt på kondensatorexemplet ovan, är det elektriska flödet vid tidpunkten t mellan kondensatorplattorna: $\Phi_E = \epsilon \iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ lika med laddningen q på plattorna enligt Gauss lag Ekv. (1).
- Detta ger då att förskjutningsströmmen mellan kondensatorplattorna blir just samma ström som går i ledningen: $I_D = \frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{dq}{dt} = I$.

Vi kan nu slutligen sammanfatta alla lagarna, kallade **Maxwells lagar** följande:

(1) Gauss lag (elektrostatik)	$\iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon}$
(2) Gauss lag (magnetism)	$\iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$
(3) Ampere-Maxwells lag	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu \left(I + \epsilon \frac{d}{dt} \iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \right)$
(4) Faradays lag	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$

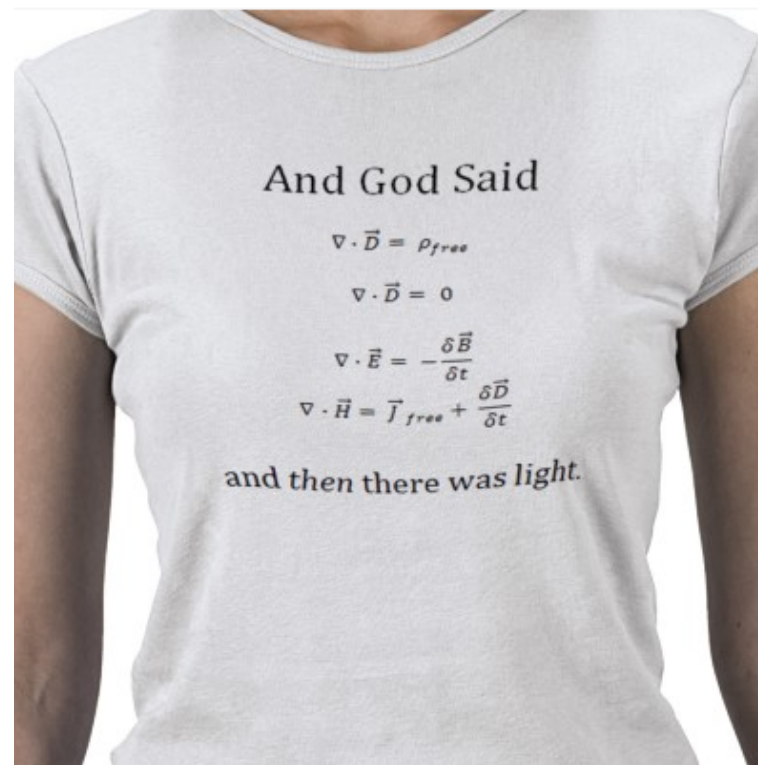
där vi lämnat bort termerna som de fria magnetiska monopolen skulle ge upphov till ifall de skulle finnas.

- Maxwells ekvationer tillsammans med Lorentz kraftlag ($\mathbf{F} = \mathbf{E}q + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$) beskriver fullständigt klassisk elektrodynamik. Alla elektrodynamik kan i princip härledas från dem!

De utgör också det historiskt första exemplet av en förenad ("unified") teori i

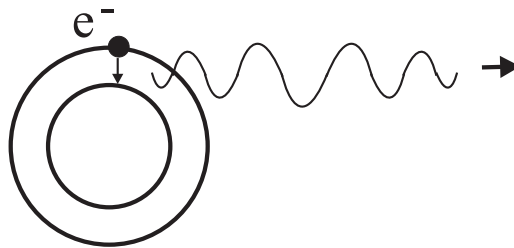
- fysiken, då de binder ihop elektricitet och magnetism i en enda sammanlänkad matematisk teori.

En ytterligare stor betydelse av Maxwells ekvationer är att man kan sälja ett otal nördiga T-skjortor för fysiker med dem!



XVIII.2. Elektromagnetiska vågor

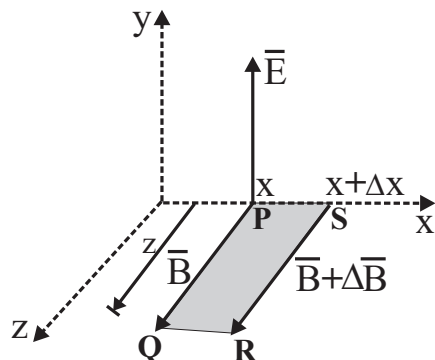
- Från Maxwells lagar ser vi att en laddning i vila producerar ett elfält omkring sig men inget magnetfält.
- En laddning i rörelse ger upphov till både ett elektriskt och magnetiskt fält.
- För att producera **elektromagnetiska vågor**, måste en laddning vara i **accelererad rörelse**.
- En accelererande laddning strålar *alltid* ut elektromagnetiska vågor, vilka är magnetiska och elektriska störningar som fortplantas i ett icke ledande medium.
- I figuren nedan ser vi en schematisk bild av hur en elektron sänder iväg en elektromagnetisk störning (foton) då den 'faller' från en högre energibana till en lägre.



-
- Vi skall nu härleda den elektromagnetiska vågekvationen med hjälp av Maxwells lagar. I den elektromagnetiska vågen finns inga källor: $I = 0$ och $q = 0$. så ekvationerna (3) och (4) blir

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu\epsilon \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (2)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_M}{dt} \quad (3)$$



- Vi betraktar figuren ovan, där vi har ett elfält i y-riktningen och ett magnetfält i z-riktningen. Magnetfältet ändras från plats x till $x+\partial x$ från B till $B + \partial B$. Vi använder nu ekv. (2)

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_P^Q \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_Q^R \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_R^S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_S^P \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (4)$$

$$= Bz - z(B + \partial B) = -z\partial B \quad (5)$$

Detta skall vara lika med tidsförändringen av det elektriska flödet i samma ekvation

$$\mu\epsilon \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu\epsilon \frac{d(\mathbf{E} \cdot \mathbf{A})}{dt} = \mu\epsilon A \frac{dE}{dt} = \mu\epsilon \partial x z \frac{dE}{dt}$$

vilket ger

$$-z\partial B = \mu\epsilon \partial x z \frac{dE}{dt} \Rightarrow \frac{\partial B}{\partial x} = -\mu\epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \quad (6)$$

Likadant, genom att använda Ekv. (3) får vi

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (7)$$

Vi multiplicerar Ekv. (6) med $\partial/\partial x$ och Ekv. (7) med $\partial/\partial t$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial x} &= -\mu\epsilon \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial E}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial B}{\partial t} \end{aligned}$$

vilket

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} &= -\mu\epsilon \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial E}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \end{aligned}$$

- Vi sätter ihop dessa ekvationer för att få den **endimensionella vågekvationen** för magnetfältet

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \quad (8)$$

där $\frac{1}{\mu\epsilon} = v^2$, vilket ger hastigheten i x-riktningen för den **transversella** magnetiska vågen

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \lambda f \quad (9)$$

där λ är **våglängden** och f är **frekvensen** för vågen. I vakuum blir denna hastighet

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = 299792458 \text{ m/s} \approx 3.0 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (10)$$

där c är *ljusets hastighet i vakuum*.

- Detta förklarar nu det som konstaterades under förra kursen om sambandet mellan c , μ_0 och ϵ_0 : dessa naturkonstanter beror på varandra, så en av de tre kan definieras med hjälp av de två andra.
- Elfältets vågekvation får man liknande magnetfältets, då man multiplicerar ekv. (6) med $\partial/\partial t$ och ekv. (7) med $\partial/\partial x$:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \quad (11)$$

- En naturlig lösning till dessa ges av de trigonometriska funktionerna, för deras andra derivata är ju samma funktion.

- Vi kan alltså beskriva magnetfältet och elfältet som sinusvågor (eller cosinus) som rör sig i +x riktning

$$\mathbf{E}(x, t) = \hat{j} E_o \sin(kx - \omega t) \quad (12)$$

$$\mathbf{B}(x, t) = \hat{k} B_o \sin(kx - \omega t) \quad (13)$$

där $k = 2\pi/\lambda$ är **vågtalet** och $\omega = 2\pi f$ är **vinkelfrekvensen**.

- Förhållandet mellan elfältets och magnetfältets maximivärden fås då cosinusvågorna deriveras enligt Ekv. (7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ -|E_o|k \sin(kx - \omega t) &= -[-|B_o|(-\omega) \sin(kx - \omega t)] \\ \Rightarrow |E_o| &= \frac{\omega}{k}|B_o| = \frac{2\pi f \lambda}{2\pi}|B_o| \end{aligned}$$

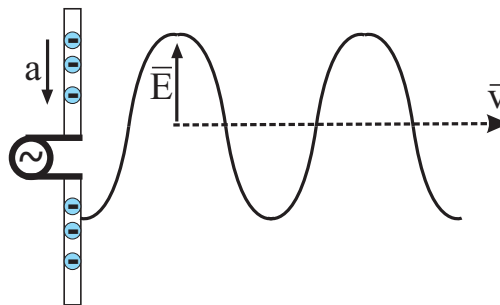
$$\Rightarrow |E_o| = v|B_o| \quad (14)$$

XVIII.2.1. Experimentell observation av EM-vågor

- Vi sätter två ledande antenner¹ parallellt som i figuren.



- Till den vänstra antennen kopplar man en spänningskälla vars spänning ändras som en funktion av tiden som en sinusfunktion.
- Laddningarna i antennen oscillerar i takt med sinusspänningen. Då laddningar accelererar eller retarderar, ger de upphov till ett tidsberoende elektriskt fält, som i detta fall också är av sinusform.
- Detta tidsberoende elfält fortplantas i alla riktningar med elfältskomponenten lodrät, se bilden nedan.

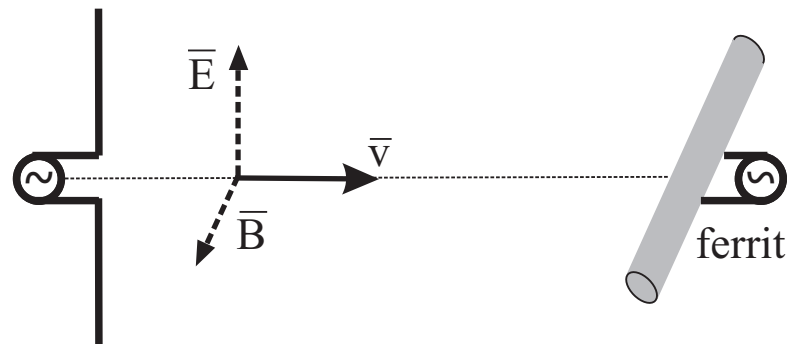


- Detta oscillerande elfält kan nu experimentellt observeras med en annan antenn.
- De fria laddningarna i den andra antennen börjar oscillera i takt med elfältet och producerar en

¹En antenn kallas en strålningskomponent som används för att sända och motta radiosignaler. För att antennen skall vara effektiv, måste den vara utformad och dimensionerad så att resonans uppnås med den radiofrekvens man vill motta eller sända.

spänning som kan förstärkas, och signalen har nu skickats från en plats till en annan med ljusets hastighet.

- Vidare har man visat experimentellt att en antenn gjord av ferrimagnetiskt material ² som är placerad vinkelrät mot både EM-vågens rörelseriktning och elfält kan också användas för att detektera det oscillerande magnetfältet i en EM-våg, se bild.



- Experiment har alltså visat att elfältet och magnetfältet för en EM-våg är vinkelrät mot varandra. TV- och radio-signaler med våglängden kring 1 m skickas och mottas på detta sätt.
- EM-vågor, där det oscillerande elfältet (och magnetfältet) alltid är i samma riktning, kallas för **lineärpolariserat** ljus.

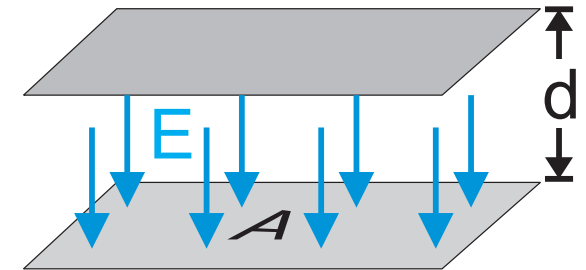
²Ferrimagnetiskt material kallas ett magnetiskt material som inte har elektrisk ledningsförmåga och där de magnetiska momentena för atomerna i olika undergitter är motsatt riktade.

XVIII.2.2. Energi och rörelsemängd för EM-vågor

Energidensiteten i ett elektriskt fält

- Den totala energin som är lagrad i en kondensator finns i det elektriska fältet mellan kondensatorplattorna.
- Vi skall uppskatta **energidensitet**, u_E för denna. Energidensitet definierar vi här som energi per volymenhet

$$u = \frac{W}{\text{Volym}} \quad [u] = J/m^3$$



-
- För en kondensator, som är uppbyggd av parallella plattor, fick vi att elfältet var ungefär konstant mellan plattorna, och att kapacitansen är $\epsilon A/d$, där A är arean och d avståndet mellan plattorna. Volymen mellan plattorna är: $V = A \cdot d$.

- Energidensiteten för det elektriska fältet mellan plattorna får vi då som

$$u_E = \frac{W_E}{\text{Volym}} = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{A \cdot d}$$

- Storleken på elfältet får vi från potentialskillnaden mellan plattorna: $V = E \cdot d$, vilket tillsammans med ekvationen för kapacitansen $C = \epsilon A/d$ ger

$$u_E = \frac{\frac{1}{2}(\epsilon A/d)(E \cdot d)^2}{A \cdot d} = \frac{1}{2}\epsilon E^2$$

Denna ekvation ger också allmänt energidensiteten för ett elektriskt fält.

Energidensiteten i ett magnetiskt fält

Energien lagrad i ett magnetiskt fält får vi genom att betrakta en spole. Spolens induktans: $L = \mu n_l^2 l A$ (från kapitel XVII) och den konstanta magnetiska flödesdensiteten inne i spolen: $B = n_l I \mu$ (Härleddes med hjälp av Ampères lag för en *solenoid* i EM-I). Den totala energin lagrad i spolen med strömmen I bestäms vara:

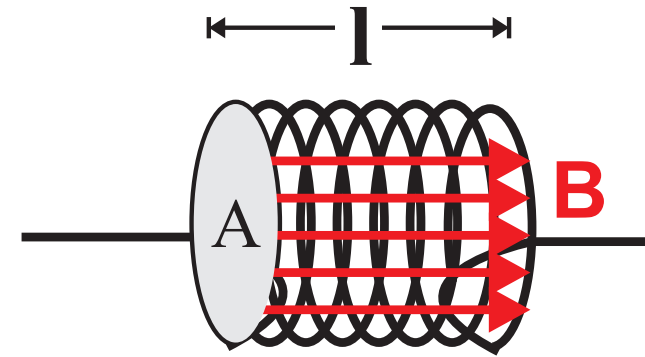
$$W_L = \frac{1}{2} L I^2$$

Denna energi är lagrad i magnetfältet som omger spolen. Detta ser vi genom att insätta spolens induktans: L och den konstanta magnetiska flödesdensiteten B in i den totala energiformeln

$$W_M = \frac{1}{2} \mu n_l^2 l A \left(\frac{B}{\mu n_l} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{l A B^2}{\mu}$$

där n_l är antalet varv per längdenhet, A arean och l är längden för spolen. Energidensiteten för ett magnetiskt fält blir

$$u_M = \frac{W_M}{V_{olym}} = \frac{\frac{1}{2} \frac{l A B^2}{\mu}}{A l} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$



Energidensiteten i en elektromagnetisk våg

- De elektromagnetiska vågorna har energi både i det elektriska och magnetiska fältet.
- Den totala energidensiteten (energi/volym) för en elektromagnetisk våg kan skrivas i många olika former:

$$u_{EM} = \frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}[ED + HB] = \frac{1}{2}[\epsilon E^2 + B^2/\mu] \quad (15)$$

där vi använt likheterna:

— Elektriska flödesdensiteten $D = \epsilon E$ (E är elektriska fältstyrkan)

— Magnetiska flödesdensiteten $B = \mu H$ (H är den magnetiska fältstyrkan)

- Vidare ser vi från ekvationerna (14) [$|E| = v|B|$] och (9) [$v^2 = 1/(\mu\epsilon)$] att energin för en EM-våg är jämnt fördelat mellan el- och magnetfältet i ett icke-ledande medium:

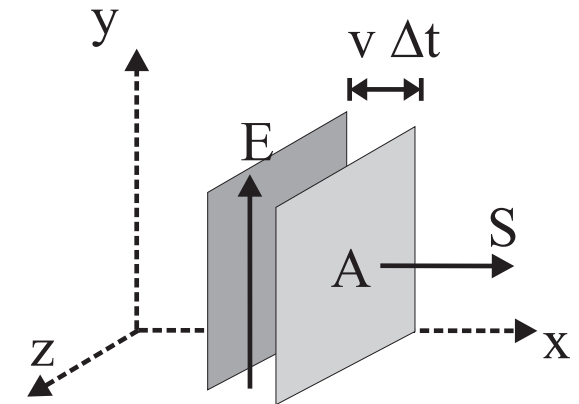
$$\frac{u_E}{u_M} = \frac{\frac{1}{2}\epsilon E^2}{\frac{1}{2}B^2/\mu} = \frac{\mu\epsilon E^2}{B^2} = \mu\epsilon v^2 = 1 \quad (16)$$

- Vi kan alltså skriva EM-vågens energidensitet som en funktion av endast det elektriska fältet

$$u_{EM} = \frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2 = \epsilon E^2 \quad (17)$$

Så vi ser att hälften av energin i en EM-våg är i magnetfältet och hälften i det elektriska fältet.

I figuren beräknar vi energin för EM-vågen i en volymenhet dV .
På tiden ∂t går EM-vågen en sträcka $\partial t \cdot v$, och energin i volymen $A \cdot \partial t \cdot v$ är:



$$\partial W = u_{EM} \partial V = u_{EM} (A \cdot \partial t \cdot v)$$

Vi definierar energin som passerar genom en area A per tidsenhet att vara S , vilket blir

$$S = \frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial t} = u_{EM} v = \epsilon v E^2 = \epsilon v^2 E B = \frac{E B}{\mu} \quad (18)$$

- Enheten för S är W/m^2 , och den är i x -riktning, vinkelrät mot både \mathbf{E} och \mathbf{B} .

För att få med riktningen, blir S en vektor

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (19)$$

som kallas för **Poynting-vektorn**.

- För cosinusvågor, får vi att medel-Poynting vektorn blir

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \langle \epsilon v E^2 \rangle = \epsilon v E_0^2 \langle \cos(kx - \omega t) \rangle = \frac{1}{2} \epsilon v E_0^2 \quad (20)$$

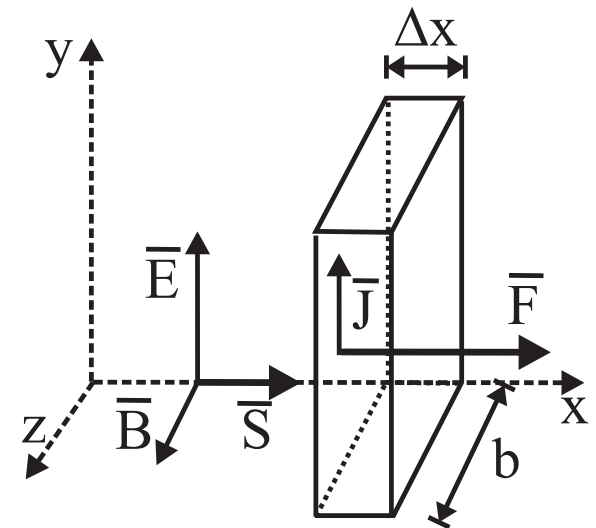
Rörelsemängden för en elektromagnetisk våg

- Betrakta figuren, där en EM-våg träffar materia med fria elektroner.
- EM-vågens oscillerande elfält ger upphov till en ström i materialet: $J = \sigma E$, där J är strömdensiteten, σ konduktiviteten och E den momentana elektriska fältstyrkan för EM-vågen. Strömmen i en liten areaenhet i riktning av elfältet blir

$$I = \text{Area } J = b \Delta x J = b \sigma E \Delta x$$

Denna ström känner en kraft från magnetfältet B i EM-vågen

$$\partial \mathbf{F}_{EM} = I \partial \mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad |\partial \mathbf{F}_{EM}| = ab\sigma |E| |B| \Delta x$$



- Observera att riktningen på denna kraft är alltid i EM-vågens rörelseriktning.

Trycket på materia från en EM-våg är kraften dividerat med arean

$$|P_{EM}| = \frac{|\partial \mathbf{F}_{EM}|}{ab} = \sigma |E| |B| \partial x \quad (21)$$

- Elektromagnetiska vågor har alltså förutom energi också rörelsemängd!
 - Rörelsemängden för massa i rörelse definieras som: mv . Ljuset har ingen massa, men ändå rörelsemängd.

- Vi antar att hela EM-vågens energi absorberas i materialet. Denna energi eller arbetet går åt att trycka in arean A en sträcka ∂x

$$\partial W = F_{EM} \partial x = P_{EM} A \partial x \quad (22)$$

vilket ger att trycket på materialet kan skrivas som (∂V är volymen)

$$P_{EM} = \frac{\partial W}{A \partial x} = \frac{\partial W}{\partial V} = u_{EM}$$

- Detta kan med hjälp av Ekv. (18) [$S = u_{EM} v$] skrivas som en funktion av Poynting vektorn, och vi får att **strålningstrycket** för elektromagnetiska vågor som inkommer vinkelrät och absorberas helt i materialet är

$$P_{EM} = \frac{S}{v} \quad (23)$$

Ifall EM-vågen totalreflekteras, blir strålningstrycket dubbelt större.

Division med ljusets hastighet gör att detta tryck vanligen är mycket liten: solljusets effekt per yta eller Poynting vektorn är ca. 1 kW/m^2 , vilket motsvarar ett mycket litet tryck

$$P_{EM} = \frac{1 \times 10^3 \text{ W/m}^2}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} \approx 0.3 \times 10^{-5} \text{ Pa}$$

Exempel:

En $10 \times 10^{12} \text{ W/m}^2$ laserstråle med tvärsnittsytan av 1 cm^2 ger ett tryck $P_{EM} \approx 10^4 \text{ Pa} \approx 0.1 \text{ atm}$. vilket ger en ganska stor kraft: $F_{EM} \approx 10^4 \text{ Pa} \cdot 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 10 \text{ N} \approx 1 \text{ kg}$ på 1 cm^2 ytan.

Exempel:

6.0 km från en radiosändare är amplituden för elfältet i EM-vågen $E_o = 0.13 \text{ V/m}$.

a) Vad är tidsmedeltalet för energiflödet?

b) Vad är den totala effekten som radiosändaren producerar?

a) Tidsmedeltalet för energiflödet ges av medelvärdet på poynting vektorn

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_o c E_o^2 = \frac{8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} \cdot 3 \times 10^8 \text{ m/s} (0.13 \text{ V/m})^2}{2} \approx 2.24 \times 10^{-5} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

b) Den totala effekten får man som arean på sfären gånger effekt/area (poynting vektorn)

$$P_{Totala} = 4\pi r^2 |S| = 4\pi (6000 \text{ m})^2 \cdot 2.24 \times 10^{-5} \text{ W/m}^2 \approx 10^4 \text{ W} = 10 \text{ kW}$$

Exempel:

En dammpartikel känner en kraft bort från solen p.g.a. solvinden (trycket från EM-strålningen från solen). Hur stor är denna kraft vid jordens avstånd från solen?

Totala effekten för solen	$\approx 4 \times 10^{26} \text{ W}$
Diametern för partikeln	$\approx 1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$
Avstånd Jord - Sol	$\approx 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$
Densiteten för partikeln	$\approx 1.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
Solens massa	$\approx 2 \times 10^{30} \text{ kg}$
Gravitationskonstanten G	$\approx 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

Energiflödet från solen vid jordens avstånd är

$$P_{VidJorden} = \frac{P_{Sol}}{4\pi R^2} \approx 1.4 \text{ kW/m}^2$$

Strålningstrycket från EM-vågorna från solen på dammpartikeln vid jordens avstånd från solen blir

$$P_{EM} = \frac{\langle \mathbf{S} \rangle}{c} \approx \frac{1400 \text{ W}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 1.4 \times 10^{-5} \text{ Pa}$$

Då partikelns area är $\pi(0.5 \times 10^{-6} \text{ m}^2)$, blir kraften på partikel från EM-strålningen

$$F_{EM} = \frac{\langle \mathbf{S} \rangle A}{c} \approx 3.7 \times 10^{-18} \text{ N}$$

Som jämförelse, är gravitationskraften mellan partikeln och solen

$$F_G = G \frac{M_{\text{Sol}} m}{R^2} = G \frac{M_{\text{Sol}} \rho \text{Volym}}{R^2} \approx 4.7 \times 10^{-18} \text{ N}$$

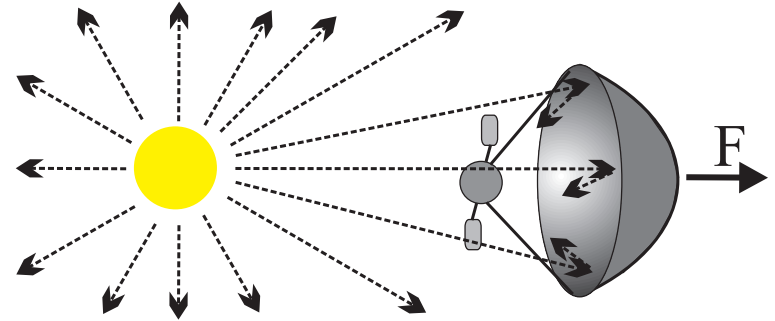
- Så vi ser att 'solvinden' kan vara starkare än gravitationen för små partiklar. Nämnas kan att kometernas svansar består av små dammpartiklar som 'blåser' bort från kometen. Dessa svansar är alltid riktade bort från solen.

Faktisk kom första iden att en 'solvind' existerar från dessa kometsvansar.

Exempel:

En metod för att resa i rymden har varit att man sätter ett 'segel' på en rymdfarkost och låter solvinden accelerera farkosten.

En rymdfarkost med massan 10 ton befinner sig i vila vid jordens avstånd $R_J = 1.5 \times 10^{11}$ m från solen (vars massa är 2×10^{30} kg). Man vill accelerera rymdfarkosten med ett segel som drivs av strålningstrycket från solen. Hur stor måste radien för en rund, masslös segel vara så att rymdfarkostens hastighet vid Plutos medelavstånd, $R_P = 5.9 \times 10^{12}$ m, från solen är $0.01c$? Solens totala strålningseffekt är 4×10^{26} W, gravitationskonstanten $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 och anta att all strålning som träffar segeln reflekteras.



Gravitationskraften på farkosten som en funktion av avståndet till solen är: $F_G = G \frac{M_{\text{Sol}} m}{r^2}$. Vid totalreflektion är strålningstrycket från EM-vågor: $P_{EM} = \frac{2 \langle \mathbf{S} \rangle}{c}$. Kraften p.g.a. strålningen från solen på farkosten som en funktion av avståndet till solen blir

$$F_{EM} = \frac{2 \langle \mathbf{S} \rangle A}{c} = \frac{2A \cdot P_{\text{Sol}}}{c \cdot 4\pi r^2}$$

där A är segelns area. Den totala kraften på rymdfarkosten är

$$F_{\text{Tot}} = F_{EM} - F_G = \frac{1}{r^2} \left(\frac{2A \cdot P_{\text{Sol}}}{c \cdot 4\pi} - GM_{\text{Sol}} m \right) = K \frac{1}{r^2}$$

där alla konstanta termer beskrivs med en parameter K . Arbetet som krafterna gör på farkosten

då den går från Jordens till Plutos avstånd från solen blir

$$W = \int_{R_J}^{R_P} F_{Tot}(r) dr = K \int_{R_J}^{R_P} \frac{dr}{r^2} = -K \left| \frac{1}{r} \right|_{R_J}^{R_P} = K \left[\frac{1}{R_J} - \frac{1}{R_P} \right]$$

Detta arbete går åt att ge farkosten fart: $W = mv^2/2$ vilket ger

$$\frac{2A \cdot P_{Sol}}{c \cdot 4\pi} - GM_{Sol}m = mv^2 / \left(2 \left[\frac{1}{R_J} - \frac{1}{R_P} \right] \right)$$

Vi löser ut arean A : $\frac{A \cdot P_{Sol}}{c \cdot 2\pi} = mv^2 / \left(2 \left[\frac{1}{R_J} - \frac{1}{R_P} \right] \right) + GM_{Sol}m$

$$\Rightarrow A = \frac{c \cdot 2\pi}{P_{Sol}} \left[\frac{mv^2}{2 \left[\frac{1}{R_J} - \frac{1}{R_P} \right]} + GM_{Sol}m \right] = \frac{c \cdot \pi \cdot m}{P_{Sol}} \left[\frac{v^2}{\left[\frac{1}{R_J} - \frac{1}{R_P} \right]} + 2GM_{Sol} \right]$$

Vi sätter in värdena ($v=0.01c$)

$$A = \frac{3 \times 10^8 \pi 10^4}{4 \times 10^{26}} \left[\frac{(0.01 \cdot 3 \times 10^8)^2}{\left[\frac{1}{1.5 \times 10^{11}} - \frac{1}{5.9 \times 10^{12}} \right]} + 2 \cdot 6.67 \times 10^{-11} 2 \times 10^{30} \right] \approx 3.26 \times 10^{10} m^2$$

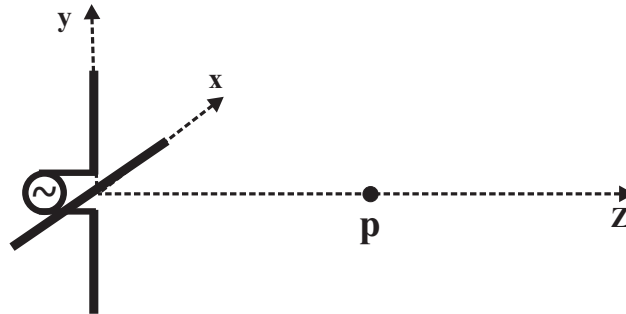
vilket ger att radien på en rund segel ($A = \pi R^2$) skulle bli

$$R = \sqrt{A/\pi} \approx 1.02 \times 10^5 m \approx 100 km$$

-
- Rymdfarkoster med solsegel accelereras alltså långsamt, men har den enorma fördelen att de inte behöver bära med sig sitt bränsle. Därmed är de faktiskt ett attraktivt koncept.
 - Solsegel har vecklats ut i rymden i test, men tillsvidare inte använts för framfart av rymdfarkoster [http://en.wikipedia.org/wiki/Solar_sail

XVIII.2.3. Polarisation av elektromagnetiska vågor

- Elektromagnetiska vågor som emitteras från en simpel lineär antenn är lineärpolariserade, vilket betyder att EM-vågens elfältsvektor hålls i samma plan, och likaså magnetfältsvektorn.
- Anta nu att istället för en lineär antenn, har vi två antenner korsade som i bilden. Antennerna får spänning från två sinusvåg-generatorer med identisk frekvens, men deras fas till varandra kan vara olika.



Vi har valt att den ena antennen är i x - och den andra i y -riktning. EM-vågen som emitteras rör sig i z -riktningen. Vi skall nu se hur elfältskomponenten för EM-vågen ser ut vid en punkt p på z -axeln.

- På ett avstånd z från antennerna blir elfältet för EM-vågen summan av de enskilda komponenterna:

$$\mathbf{E} = E_1 \sin(kz - \omega t) \hat{i} + E_2 \sin(kz - \omega t + \phi) \hat{j}$$

där E_1 och E_2 är amplituden för elfältet från antenn **1**, respektive antenn **2**. Vi byter variabler för att få kortare ekvationer: $kz - \omega t = \theta$, $E_1 = a$ och $E_2 = b$. Vi tittar nu på superpositionen av elfältskomponenten i x - y -planet:

$$\begin{aligned} \Rightarrow x &= a \sin(\theta) \\ y &= b \sin(\theta + \phi) = b \sin(\theta) \cos(\phi) + b \cos(\theta) \sin(\phi) \end{aligned}$$

Eliminering av θ med hjälp av: $\sin(\theta) = x/a$ ger

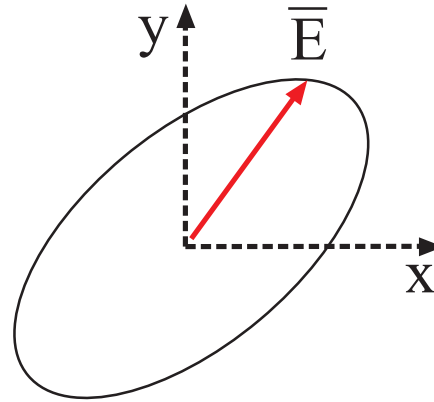
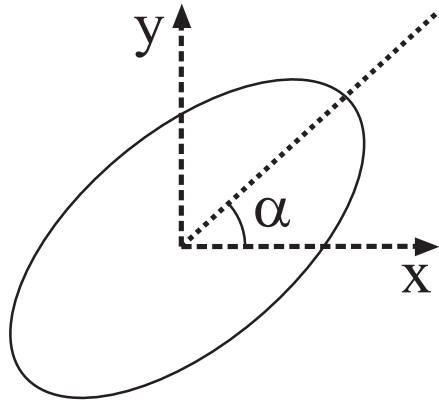
$$y - \frac{bx}{a} \cos(\phi) = b \sin(\phi) \cos(\theta) = b \sin(\phi) \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

där vi har använt likheten: $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \Rightarrow \cos(\theta) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta)}$. Vi kvadrerar båda sidorna och dividerar sedan med b^2

$$\begin{aligned} y^2 - \frac{2ybx}{a} \cos(\phi) + \frac{b^2 x^2 \cos^2(\phi)}{a^2} &= b^2 \sin^2(\phi) - \frac{b^2 x^2 \sin^2(\phi)}{a^2} \\ \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{yx}{ba} \cos(\phi) + \frac{x^2}{a^2} &= \sin^2(\phi) \end{aligned}$$

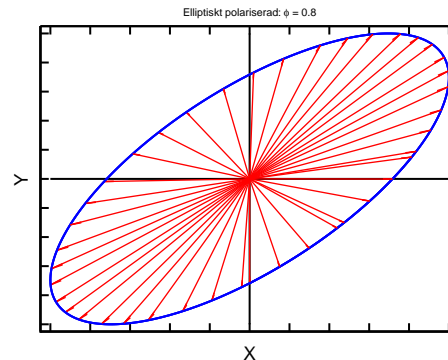
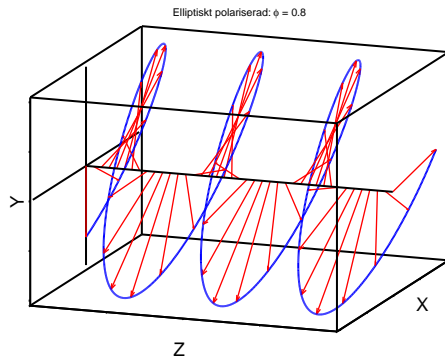
• Ifall källorna är **koherenta** d.v.s. fasskillnaden är konstant ($\phi = \textit{konstant}$) beskriver ekvationen en ellips i x-y-planet, där vinkeln mellan x-axeln och ellipsens huvudaxel är

$$\alpha = \arctan(b/a) = \arctan(E_2/E_1)$$



● Vi säger att EM-vågen är **elliptiskt polariserat**, och märkbart är att elfältskomponenten aldrig är noll.

● Bilderna nedan visar hur elfältskomponenten för EM-vågen rör sig i 3-D rummet.

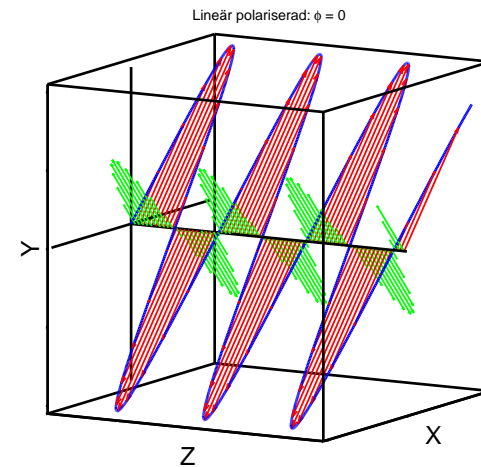


- Ifall fasvinkeln $\phi = 0$, får vi

$$\frac{y^2}{b^2} - 2\frac{yx}{ba} + \frac{x^2}{a^2} = \left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{E_2}{E_1}x$$

- Alltså är EM-vågen **linjärpolariserat**, där elfältskomponenten oscillerar vid en vinkel: $\alpha = \text{atan}(E_2/E_1)$ från x-axeln. I figuren till höger har vi ritat både elfältet (röd, snett uppåt) och magnetfältet (grön, snett åt sidan) för linjärpolariserat ljus.



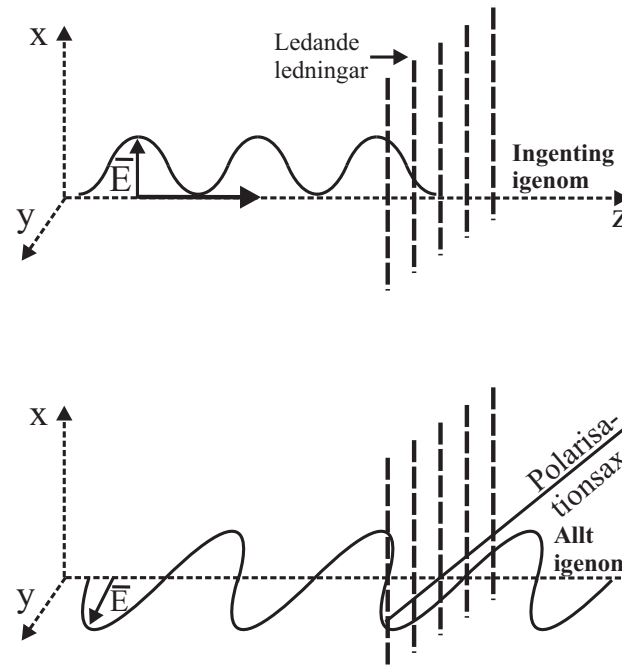
- Då fasvinkeln mellan källorna är: $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$, och $E_1 = E_2 = E$, får vi **cirkulär polariserade** vågor

$$\Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y^2 + x^2 = E^2$$

vilket är cirkelns ekvation. Elfältskomponenten roterar med- eller motsols, vilket betyder att då vågen träffar materia åstadkommer den vridmoment (**EM-vågor kan ha rörelsemängdsmoment!**)

Ifall fasvinkeln mellan källorna varierar kontinuerligt, vilket är fallet då exempelvis 'antennerna' består av ett stort antal oscillerande atomer eller molekyler, kommer EM-vågorna att vara **opolariserade**, vilket exempelvis ljuset från en glödlampa är.

En opolariserad EM-våg kan lineärpolariseras med en polarisator. Man sätter EM-vågen att gå genom en anordning kallad **polarisator**, som består av parallella, långa och tunna, ledande trådar nära varandra. En EM-våg, vars elfälts-komponent är i x-riktning, se bild, absorberas av de fria laddningarna i polarisatorledningarna. Däremot passerar en EM-våg med elfältskomponenten i y-riktning, polarisatorn oförändrad ifall vågens våglängd λ är mycket större än polarisatorledningarnas diameter. Den riktning, där EM-vågens elfältskomponent går oförändrad genom en polarisator, kallas för **polarisationsaxel**.



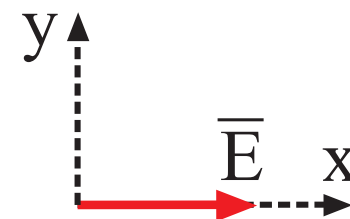
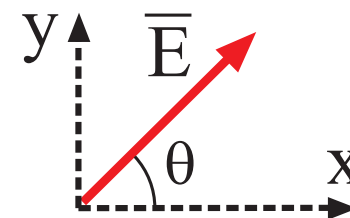
- Synligt ljus, $\lambda \approx 500 \text{ nm}$, behöver mycket tunna polarisationsledningarna, vilket är möjligt med ett skikt av långa polymermolekyler vilka är parallella till varandra.

Anta nu att vi har en EM-våg, vars elfält vinkelrät till dess färdriktning i z-led ges av

$$\mathbf{E} = |E_o| \cos(\theta)\hat{i} + |E_o| \sin(\theta)\hat{j}$$

Polarisatorn absorberar elfältskomponenten i y-led ($|E_o| \sin(\theta)\hat{j} = 0$), vilket ger att vågens elfält efter att den passerat polarisatorn är

$$\mathbf{E} = |E_o| \cos(\theta)\hat{i}$$



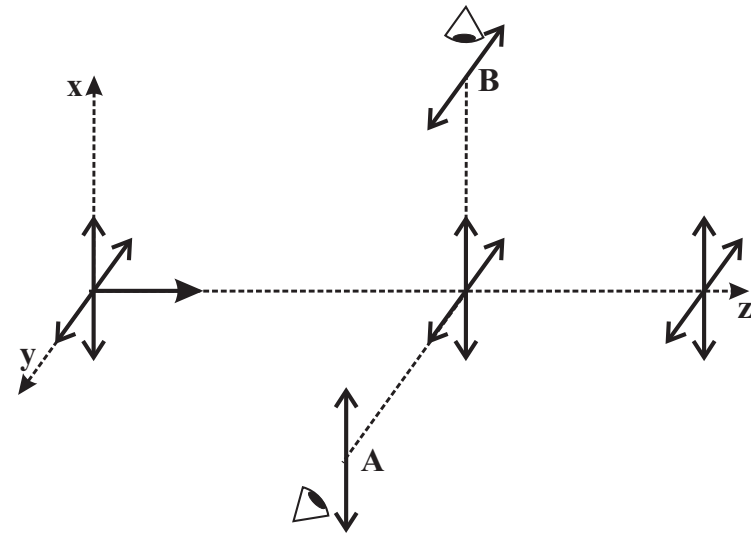
- Tidigare såg vi att **intensiteten** (Poyntingvektorn) för EM-våg är proportionellt till elfältskomponenten i kvadrat, Ekv. (18): $I \propto |E_o|^2$. Intensiteten för en EM-våg efter att den passerat en polarisator ges av **Malus lag**

$$I = I_o \cos^2(\theta) \quad (24)$$

där I_o är intensiteten före polarisatorn, och θ är **polarisationsvinkeln**, vilken är vinkeln mellan EM-vågens elfältskomponent och polarisationsaxel.

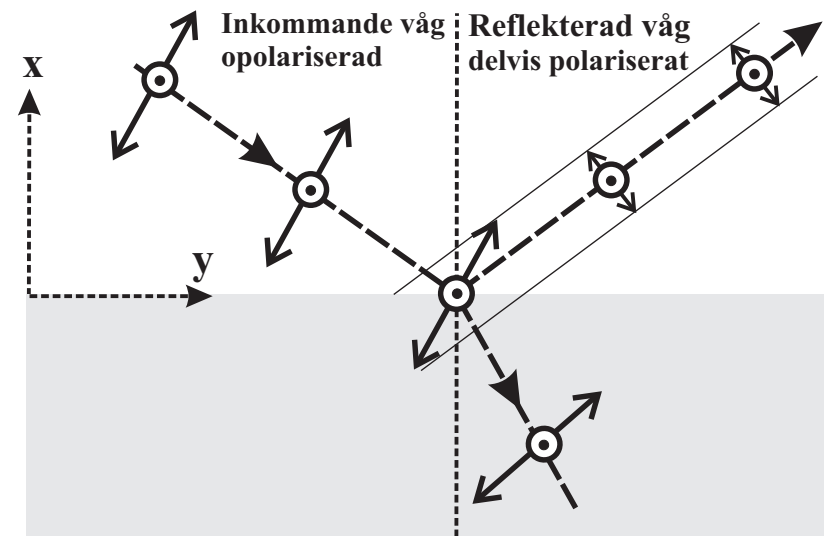
- I dimma eller rök kan man bra se en ljusstråle från sidan. Detta är möjligt eftersom de små vattendropparna eller rökpartiklarna sprider ljuset. EM-vågens elfält gör att laddningarna i de små partiklarna börjar oscillera, och fungera som små antenner genom att sedan stråla ut EM-vågor till sidorna. Eftersom en oscillerande laddning inte kan stråla ut vågor i oscillationsriktningen, kommer de spridda strålarna att vara delvis polariserade.

Se figuren till höger, där en opolariserade EM-vågor går i z-riktning mot höger. Betraktar man de spridda vågorna i punkten *A*, är de polariserade i x-riktning. Inga komponenter i z- eller y-riktning observeras. Liknande, ser man i punkten *B* bara EM-vågor med elfältskomponenten i y-riktning.



XVIII.2.4. Polarisation genom reflektion från ytor

- När opolariserat ljus reflekteras från en jämn yta, kommer en del av ljuset att reflekteras och en del att gå in i materialet (brytning).
- Anta att ljuset som träffar en plan yta har en elfältskomponent parallellt med ytan (går in och ut från sidan), ritad som cirklar. Den andra inkommande komponenten i x-y-planet är ritad som pilar.

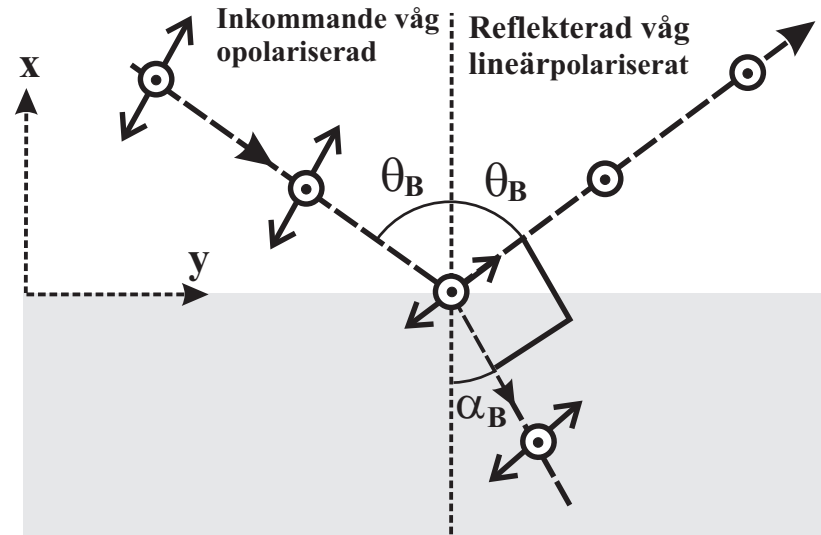


- När detta ljus sedan träffar ytan, kommer en del av ljuset att brytas in i materialet, men en del kommer att reflekteras. Ytatomerna kommer alltså att endera oscillera parallellt med ytan (in och ut från sidan), vilket kan ge reflekterat ljus, där elfältskomponenten inte har minskat nämnvärt. Den andra elfältskomponenten i x-y-planet kan inte reflekteras effektivt, så att det reflekterade ljuset är delvis polariserat.

Bäst ser man detta då vinklarna är så att den reflekterade vågen är vinkelrät till den brutna:

$$\theta_B + \frac{\pi}{2} + \alpha_B = \pi \Rightarrow \alpha_B = -\frac{\pi}{2} + \theta_B$$

vilket enligt Snells brytningslag inträffar då ljus kommer från luft till ett material med bryningsindex n



$$\begin{aligned} 1 \sin(\theta_B) &= n \sin(\alpha_B) = n \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \theta_B\right) = n \cos(\theta_B) \\ \Rightarrow \tan(\theta_B) &= n \end{aligned} \quad (25)$$

där θ_B kallas för Brewster vinkeln. I detta fall är elfältskomponenten i x-y-planet för det reflekterade ljuset lika med noll, och det reflekterade ljuset är lineärpolariserat.

- Vi ser att då ljus reflekteras från hav och andra blanka ytor, har majoriteten av de reflekterade strålarna elfältskomponenten parallellt med jordytan.
- Solglasögon med polarisationsaxel vinkelrät mot jordytan minskar effektivt den parallella komponenten av det reflekterade ljuset.

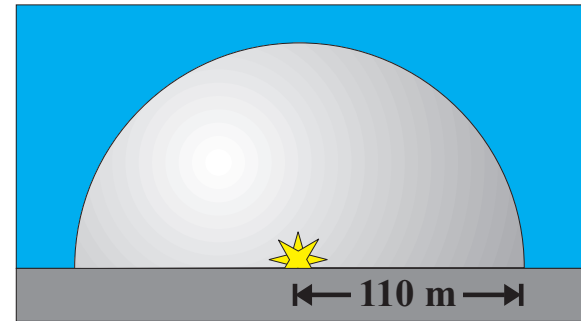
XVIII.2.5. Dimensionsanalys för spridning av ljus

- För att förstå spridning av ljus bättre, skall vi kvalitativt³ härleda hur ljus sprids som en funktion av dess frekvens.
- För att göra detta introduceras en i många områden användbar teknik kallad **dimensionsanalys** (DA).
- Iden är mycket simpel, man har variabler som påverkar en storhet. För att få storhetens funktion, måste enheterna i funktionen ge storhetens enhet: Du har glömt hur man beräknar sträckan, som en funktion av tid ($[t]=s$), och hastighet ($[v]=m/s$). För att få sträckans enhet $[s] = m$, måste man multiplicera hastighet med tiden, och vi får ekvationen: $s = vt$.
 - Men notera att om man skulle försöka liknande resonemang för konstant acceleration, skulle man lätt resonera sig fram till $s = vt^2$, alltså missa en faktor 2!
 - Dimensionsanalys skall alltså användas försiktigt, speciellt prefaktorer kan lätt bli borta.

Exempel:

³Med kvalitativa metoder försöker man förstå karaktären och egenskaperna för något, utan att bevisa det. Motsatsen till kvalitativ är **kvantitativ**, vilket kommer från latinets quantum eller mängd, vilket betyder att man härleder en storhet eller egenskap matematiskt.

Anta att man filmar en atombombssprängning som görs på markytan. Bilden nedan visar hur den halvsfäriska sprängningsfronten, radien 110 m, ser ut 15 ms efter sprängningen.



Uppskatta hur mycket explosionsenergi atombomben hade.

- Problemet verkar vara helt omöjlig att lösa, för inte vet vi hur luften påverkas av explosionen, eller hur snabbt chockvågen breder ut sig.
- Vi skall nu använda dimensionsanalys, vilket Amerikanen G. I. Taylor gjorde då han till myndigheternas häpnad beräknade den frigjorda energin i en atombombsexplosion från en film gjord av explosionen.
- Han gjorde de logiska antaganden att chockvågens radie, $[r]=m$, efter sprängningen beror av:
 - Den frigjorda energin, $[E] = J = \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$
 - Tiden efter sprängningen, $[t] = s$
 - Luftens densitet, $[\rho] = 1.293 \text{ kg}/\text{m}^3$

vilket ger ekvationen för chockvågens radie

$$r = f(E, t, \rho) = K \cdot E^a \cdot t^b \cdot \rho^c$$

där han approximerade konstanten K från chockvågsteorin till 1. heltalen a , b och c skall vi nu bestämma via dimensionsanalys.

- Tittar vi nu på ekvationen från enheterna sett, blir den

$$m = \left(\frac{kg \cdot m^2}{s^2} \right)^a (s)^b \left(\frac{kg}{m^3} \right)^c = (kg^a \cdot kg^c)(m^{2a} \cdot m^{-3c})(s^{-2a} \cdot s^b)$$

$$\Rightarrow$$

$$kg^0 \cdot m^1 \cdot t^0 = kg^{a+c} \cdot m^{2a-3c} \cdot s^{b-2a}$$

Vi ser nu att på vänstra sidan av funktionen har vi inga kg (kg^0), vilket funktionens högra också ger ifall likheten: $a + c = 0$ gäller. Vi får alltså att $a = -c$, vilket vi insätter i den andra termen i funktionens högra sida för att ge den rätta enheten m

$$m^1 = m^{2a-3c} = m^{-2c-3c} = m^{-5c} \quad \Rightarrow \quad c = -1/5 \Rightarrow a = 1/5$$

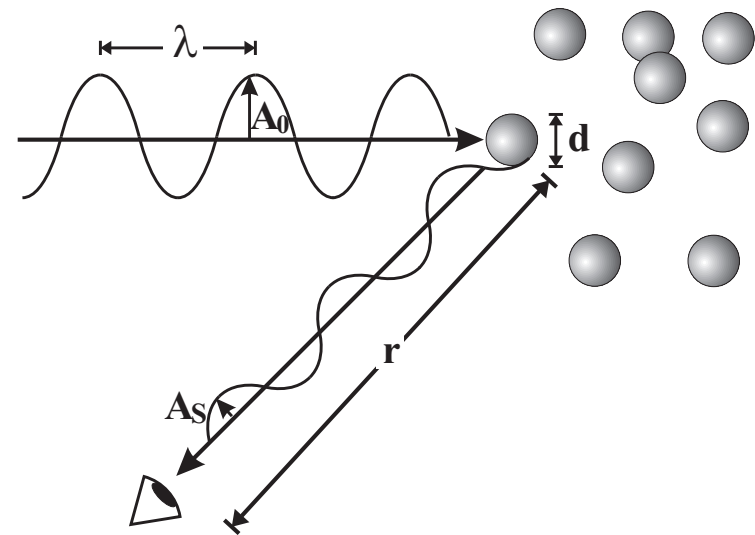
Den sista ekvationen med tiden ger likheten: $b = 2a = 2/5$. Ekvationen för radien är alltså:

$r = E^{1/5} t^{2/5} \rho^{-1/5}$, vilket ger ekvationen för den totala energin:

$E^{1/5} = r \rho^{1/5} / t^{2/5}$, vilket i kortare form ger (+ insättning)

$$E \approx \frac{r^5 \rho}{t^2} \approx \frac{(110 \text{ m})^5 1.293 \text{ kg/m}^3}{(15 \times 10^{-3} \text{ s})^2} \approx 1.4 \times 10^{12} \text{ J} \quad (26)$$

- Atombombens styrka ges av historiska skäl i enheter “ton trotyl” eller “ton TNT”, dvs. energimängden som en ton trinitrotoluen (trotyl) frigör då den exploderar.
- En gram av TNT frigör 980–1100 kalorier. Detta har standardiserats för enkelhets skull till 1000 kalorier, vilket ger att $1 \text{ ton TNT} = 4.2 \times 10^9 \text{ J}$.
- De minsta kärnvapnena har styrkor kring 1 kiloton TNT = 1 kt, de största ungefär $10 \text{ Mt} = 4.2 \times 10^{16} \text{ J}$.



Vi skall nu genom dimensionsanalys härleda hur ljus sprids som en funktion av dess frekvens (Rayleigh 1871). Vi har alltså ljus med amplituden A_0 som sprids från luftens molekyler. Det spridda ljusets amplitud med avståndet r till spridningsstället betecknas med A_S , se bild.

- Eftersom ljusets intensitet bestämmer hur starkt ljuset är, och ljusets intensitet är amplituden i kvadrat, vill vi nu bestämma hur den spridda ljusets amplitud $[A_S] = \text{m}$, beror av följande parametrar

- Luftpartiklarnas diameter: $[d] = \text{m}$
- Inkommande ljusets amplitud: $[A_0] = \text{m}$

- Våglängden för ljuset, $[\lambda] = \text{m}$
- Avståndet från observatören till spridningsstället: $[r] = \text{m}$

Det spridda ljusets amplitud kan nu skrivas som

$$A_S = f(d, A_o, \lambda, r) \quad (27)$$

• Vi har nu ett problem som dimensionsanalysen inte kan lösa. Alla parametrars enhet är meter. För att fortsätta, använder man följande logiska och experimentellt bestämda relationer för det spridda ljusets amplitud A_S :

- Den är proportionerlig till den inkommande amplituden: $A_S \propto A_o$
- Den är inverst proportionerlig till avståndet från spridningsstället: $A_S \propto \frac{1}{r}$
- Den är proportionerlig till de spridande molekylnas volym: $A_S \propto d^3$

Dessa ger nu en ekvation som dimensionsanalys biter på:

$$A_S = K \frac{A_o d^3}{r} \lambda^a$$

där K igen är en konstant som måste bestämmas experimentellt.

För att enheterna i föregående ekvation skall stämma, måste exponenten a vara -2, vilket ger att den spridda ljusets amplitud är inverst proportionerligt till våglängden i kvadrat: $A_S \propto \lambda^{-2}$.

Den spridda intensiteten som man observerar är amplituden i kvadrat, vilket slutligen ger

$$I_S \propto A_S^2 \propto \frac{1}{\lambda^4} \quad (28)$$

Resultatet är att ljus som har kortare våglängd sprids mycket effektivare än ljus med längre våglängd!

- Detta är orsaken till att himlen ser blå ut. Solljuset innehåller ljus av alla våglängder. Det blåa ljuset, med kortare våglängd sprids däremot mycket effektivare än ljusstrålar med längre våglängd, med den påföljden att den omgivande luften ser blå ut.

Intensitetsförhållandet mellan det spridda blåa och röda ljuset är ca. $(700 \text{ nm}/400 \text{ nm})^4 \approx 10$, vilket betyder att det blåa ljusets intensitet är tiofaldig jämfört med det röda ljusets intensitet.

-
- Går solljuset en lång sträcka genom jordens atmosfär, har de kortare våglängdskomponenterna i solljuset minskat, med den påföljden att luften och solen ser röd ut vid kvällsskymningen.

-
- Moln innehåller stora mängder vattendroppar eller iskristaller som effektivt sprider alla våglängdskomponenter, vilket gör att molnen ser vita ut.



Solnedgång över Columbia-floden i Richland, WA, USA