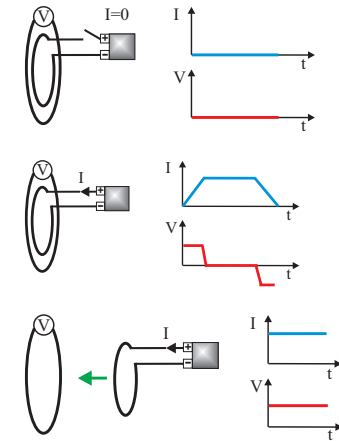


XVII. Elektromagnetisk induktion

- När spolarna är in i varandra och ingen ström går i den mindre spolen, syns ingen spänning i den yttre spolen.
- När spolarna är in i varandra och en ström börjar gå i den mindre spolen, syns en **inducerad** spänning i den yttre spolen.
- När spolarna är in i varandra och strömmen i den mindre spolen är konstant, syns ingen spänning i den yttre spolen.
- Ifall strömmen i den mindre spolen är konstant, och man för den in i den större spolen, syns en **inducerad** spänning i den yttre spolen.
- Ifall alla föregående experiment görs med andra material, med samma form, är den inducerade spänningen konstant, vilket visar att den inducerade spänningen inte beror på materialet, utan bara på formen och magnetfältet.



XVII.1. Induktion

- Elfält accelererar laddningar och magnetiska fält ändrar laddningars rörelseriktning.
- Fenomen som förklarar bl.a. hur mekanisk energi från ett vattenkraftverk omvandlas till elektrisk energi, eller hur ett magnetiskt kreditkort läses, är **elektromagnetisk induktion**.
- Tidiga experiment med elektriska kretsar gav intressanta resultat.
- Experimentet gick ut på att man har en mindre spole i vilken man kan ändra strömmen, och en större spole, från vilken man kan mäta spänningen.

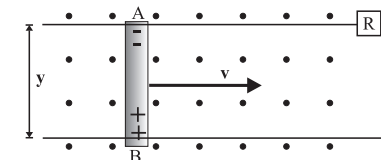
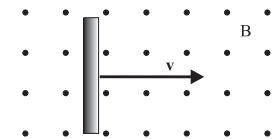
- För att mera kvantitativt se på detta undersöker vi vad som händer i kretsen bredvid, där en ledare rör sig med en hastighet v i ett konstant magnetfält vars riktning är utåt från pappret.

- Nu gör vi en hybrid av makroskopisk och mikroskopisk betraktelse: vi betraktar vad som händer med laddningarna inne i själva ledaren, men hur detta påverkar hela stavens elfält

- Varje laddning q i ledaren påverkas av en magnetisk kraft (Lorentz-kraften):

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

För positiva laddningarna är den magnetiska kraften nedåt och för de negativa laddningar uppåt, vilket leder till att en spänning **induceras** i ledaren.



Arbetet som görs på en laddning som flyttas från punkt **A** till **B** längs ledaren är

$$W_{AB} = \int \mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{l} = |F_m|y = q|v||B|y$$

Potentialen definierades i kapitlet för elektrisk potential, som $U = W/q$, från vilket vi definierar den **inducerade spänningen** i kretsen

$$E_{ind} = \frac{W_{AB}}{q} = |v||B|y \quad (1)$$

- Vi skriver den inducerade spänningen i en annan form med hjälp av ledarens hastighet

$$E_{ind} = Byv = By \frac{dx}{dt} = B \frac{y \cdot dx}{dt} = B \frac{dArea}{dt} = \frac{d\Phi_M}{dt} \quad (2)$$

där Φ_M är det **magnetiska flödet**

$$\Phi_M = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (3)$$

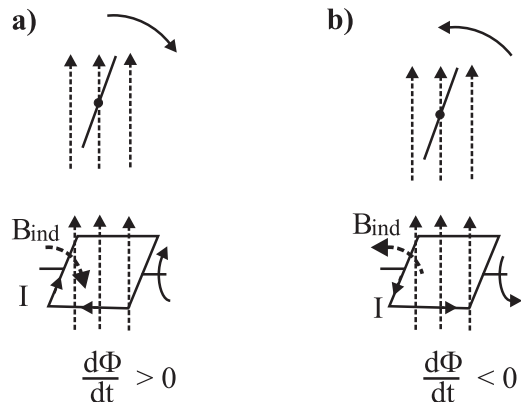
- En spänning inducerad alltså i en krets ifall endera (eller båda) magnetfältet ändras genom en area, eller ifall magnetfältet är konstant men arean förändras.
- Detta kallas **principen av elektromagnetisk induktion**.
- Riktningen för den inducerade spänningen är alltid så att den motverkar flödesändringen, så ekvationen för induktion ges ofta i form av **Faradays induktionslag**

$$E_{ind} = -\frac{d\Phi_M}{dt} \quad (4)$$

- För att veta vilken riktning den inducerade strömmen har, används **Lenz lag**:

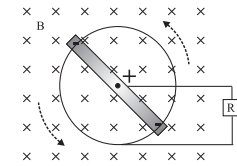
Den inducerade spänningen är sådan att magnetfältet som produceras av den inducerade strömmen motverkar förändringen av det magnetiska flödet genom kretsen

- Detta kan illustreras med följande exempel:



- I fall **a** ökar det magnetiska flödet genom kretsen. Strömmen induceras medsols för att försöka hålla magnetfältet konstant genom kretsen.
- I fall **b** minskar det magnetiska flödet genom kretsen eftersom arean minskar. Nu induceras en ström motsols som försöker motverka flödesminskningen.

Exempel:



En rak metallisk stav roterar kring en axel som är parallell med ett konstant magnetfält, se figuren nedan. Stavens längd är L och vinkelhastigheten är ω . Vad är den inducerade spänningen mellan stavens mitt och ändpunkterna?

För halva staven ($L/2$) är rotationsperioden

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Arean som halva staven far över på ett varv är $Area = \pi(L/2)^2$ vilket ger att arean som halva staven sveper över per tidsenhet blir

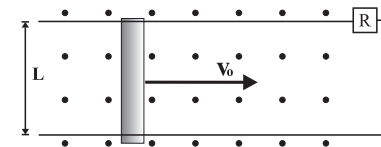
$$\frac{dArea}{dt} = \frac{Area}{T} = \frac{\pi(L/2)^2\omega}{2\pi} = \frac{L^2\omega}{8}$$

vilket ger den inducerade spänningen mellan mitten och ändan som

$$E_{ind} = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -B \frac{dArea}{dt} = -\frac{BL^2\omega}{8}$$

Exempel:

En ledande stav med längden L och massan m glider över en ledande krets (med resistansen R) med begynnelsehastigheten v_0 (se figuren). Ett konstant magnetiskt fält \mathbf{B} existerar normalt mot planet.



1. Bestäm kraften som verkar på staven som en funktion av B , L , R och v
2. Visa att farten för staven avtar som en funktion av tiden enligt

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$$

där $\tau = mR/(B^2L^2)$

3. Visa att den totala väglängd som staven rör sig innan den stannar är: τv_0 .
4. Visa (utan att använda energins bevaringslag) att den totala energiförlusten i motståndet R är lika med stavens ursprungliga kinetiska energi

$$W_R = K = \frac{1}{2}mv_0^2$$

1. Den inducerade spänningen är den magnetiska flödesändringen per tidsenhet för kretsen

$$E_{ind} = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -B\frac{dA}{dt} = -B\frac{L}{dt}dx = -BLv \quad (5)$$

Strömmen i kretsen är: $I = E_{ind}/R$, motsols, vilket ger att kraften på staven är i motsatt håll till hastigheten

$$\mathbf{F} = I\mathbf{dl} \times \mathbf{B} = ILB = -\frac{B^2L^2v}{R}$$

2. Stavens retardation på p.g.a. kraften blir

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2L^2v}{R} \quad (6)$$

Vi löser denna differentialekvation:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v} &= -\frac{B^2L^2}{mR}dt \\ \Rightarrow \int \frac{dv}{v} &= -\frac{B^2L^2}{mR} \int dt \\ \ln(v) &= -\frac{B^2L^2}{mR}t + \text{Konst} \\ v &= e^{-\frac{B^2L^2}{mR}t + \text{Konst}} = e^{\text{Konst}} e^{-\frac{B^2L^2}{mR}t} \end{aligned}$$

Eftersom $v(0) = v_0$ får vi att $e^{\text{Konst}} = v_0$, vilket slutligen ger hastigheten för staven som en funktion av tiden:

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{B^2L^2}{mR}t}$$

3. Totala sträckan som staven rör sig får vi från integralen

$$S = \int_0^\infty v(t)dt = v_0 \int_0^\infty e^{-t/\tau} dt = v_0 \int_0^\infty -\tau e^{-t/\tau} = v_0(0 - (-\tau)) = v_0\tau$$

där $\tau = mR/(B^2L^2)$.

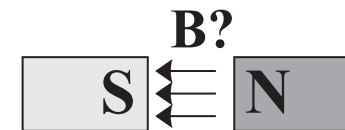
4. Totala arbetet är tidsintegralen för effekten ($I_{ind}(t) = E_{ind}(t)/R$), se Ekv. (5)

$$\begin{aligned} W_R &= \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty E_{ind}(t)I_{ind}(t)dt = \int_0^\infty BLv_0 e^{-t/\tau} \frac{BLv_0 e^{-t/\tau}}{R} dt \\ &= \frac{B^2L^2v_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = \frac{B^2L^2v_0^2}{R} \int_0^\infty -\frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau} \\ &= \frac{B^2L^2v_0^2\tau}{2R} = \frac{B^2L^2v_0^2}{2R} \frac{mR}{B^2L^2} = \frac{1}{2}mv_0^2 \end{aligned}$$

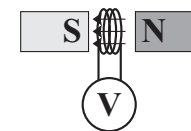
Rörelseenergin har alltså övergått till elektrisk energi via induktion, och förbrukats i motståndet.

Exempel:

Hur kan man mäta den konstanta magnetiska flödesdensiteten mellan den magnetiska syd- och nordpolen i figuren?



Svar: man sätter en krets vars area är lika med polerna och som har N varv in mellan polerna. Ifall arean för polerna är stor och avståndet mellan dem är liten, kan den magnetiska fältstyrkan approximeras vara konstant mellan polerna och noll utanför.

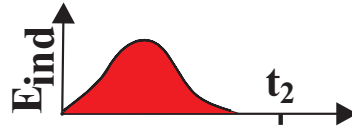


Drar man nu bort kretsen, ändras det magnetiska flödet genom kretsen och en spänning inducerad i den, Ekv. (4):

$$E_{ind} = -\frac{d\Phi_M}{dt}$$

Från detta ser vi att det magnetiska flödet genom en krets mellan tiderna t_1 och t_2 fås från tidsintegralen av den inducerade spänningen

$$\Phi_M = - \int_{t_1}^{t_2} E_{ind}(t) dt \quad (7)$$



Vid tiden noll drar man nu bort kretsen från de magnetiska polerna och mäter samtidigt den inducerade spänningen som en funktion av tiden.

Det totala magnetiska flödet genom kretsen är nu arean under (t, E_{ind}) kurvan

$$\Phi_M = \Phi_M(t') - \Phi_M(0) = - \int_0^{t'} E_{ind}(t) dt$$

Flödet genom kretsen vid tiden noll var:

$$\Phi_M(0) = NB(\pi R^2),$$

vilket ger att den frågade magnetiska flödesdensiteten är:

$$B = \frac{\int_0^{t'} E_{ind}(t) dt}{N\pi R^2}$$

där konstanten, som bara beror av kretsens form, kallas för **självinduktans**

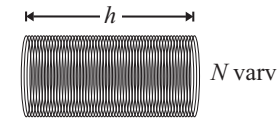
$$L = - \frac{E_{ind}}{dI/dt} \quad [L] = V s/A = H \text{ (Henry)} \quad (8)$$

Den själv-inducerade spänningen i kretsen kan nu skrivas som

$$E_{ind} = -L \frac{dI}{dt} \quad (9)$$

Exempel:

Beräkna självinduktansen för en lång N varv solenoid med längden h och arean A .

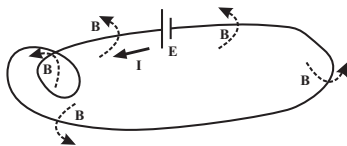


Den magnetiska flödesdensiteten inne i en lång solenoid är konstant (Se: *Elektromagnetismens grunder I*)

$$B = \mu \frac{N}{h} I \quad (10)$$

XVII.2. Självinduktans och spolar

- Betrakta figuren nedan, där en spänningskälla är sluten i en krets.
- Strömmen i kretsen ger upphov till ett magnetfält runt och genom kretsen. Storleken på detta magnetfält är enligt Biot-Savats lag proportionerligt till strömmen: $B \propto I$.



- Det magnetiska flödet genom kretsen är

$$\Phi_M = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \propto I = \text{Konstant} \times I$$

Då alltså strömmen i kretsen ökar, ökar också magnetfältet och det magnetiska flödet genom kretsen. Detta betyder ju att en själv-inducerad spänning uppstår i kretsen:

$$E_{ind} = - \frac{d\Phi_M}{dt} = -\text{Konstant} \times \frac{dI}{dt}$$

där μ är mediets permeabilitet, N är antalet varv, h längden och I är strömmen i solenioden. Det magnetiska flödet genom **ett varv** av solenioden är magnetiska flödesdensiteten gånger arean:

$$\Phi_M = BA = \frac{\mu N I A}{h}$$

Detta ger att den inducerade spänningen genom N varv blir

$$E_{ind} = -N \frac{d\Phi_M}{dt} = - \frac{\mu N^2 A}{h} \frac{dI}{dt}$$

Självinduktansen, eller bara induktansen för en solenoid (också kallad **spole**) är enligt definitionen (8)

$$L = \frac{\mu N^2 A}{h} \quad (11)$$

En komponent med induktans i en krets kallas för en **induktor** eller **spole**, och betecknas av symbolen till höger



Exempel:

Spolen i bilden har 100 varv, är 5 mm lång och har tvärsnittsarean $8 \times 10^{-4} \text{ m}^2$. Hur stor är självinduktansen? Beräkna den inducerade spänningen i en krets med denna spole, då strömmen i kretsen ökar från 0 till 10 A på 5 μs .

$$L = \frac{\mu N^2 A}{h} \approx \frac{4\pi 10^{-7} 100^2 \cdot 8 \times 10^{-4}}{5 \times 10^{-3}} \approx \underline{2 \text{ mH}}$$

$$E_{ind} = -L \frac{dI}{dt} \approx -2 \times 10^{-3} \text{ H} \frac{10 \text{ A}}{5 \times 10^{-6} \text{ s}} \approx \underline{-4000 \text{ V}}$$

XVII.2.0.1. Energin lagrad i en spole

- Då ström börjar gå genom en spole, induceras en motspänning i kretsen.
- Denna inducerade spänning $E_{ind} = L \frac{dI}{dt}$ ger att effekten som behövs för att öka strömmen genom spolen är:

$$P = \frac{dW}{dt} = E_{ind} I = LI \frac{dI}{dt} \quad (12)$$

- Den totala energin som behövs för att strömmen genom en spole skall öka från noll till I , får vi genom att integrera:

$$W_{tot} = \int_0^I LI' dI' = L \int_0^I \frac{I'^2}{2} = \frac{1}{2} LI^2$$

- Denna energi är lagrad i magnetfältet inne i spolen.

Lösningen till denna differentialekvation blir:

$$L \frac{dI}{dt} - RI = E - RI$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{E - RI} = \frac{dt}{L}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dI}{E - RI} = \int \frac{dt}{L}$$

$$\Rightarrow -\frac{\ln(E - RI)}{R} = \frac{t}{L} + konst$$

$$\Rightarrow \ln(E - RI) = -\frac{Rt}{L} + konst'$$

$$\Rightarrow E - RI = e^{-\frac{Rt}{L}} e^{konst'} = K e^{-\frac{Rt}{L}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{R} \left[E - K e^{-\frac{Rt}{L}} \right]$$

där konstanttermen K fås från begynnelsevillkoret: $t = 0, I = 0$

$$I(0) = \frac{1}{R} \left[E - K e^{-\frac{R0}{L}} \right] = \frac{1}{R} [E - K] = 0 \Rightarrow K = E$$

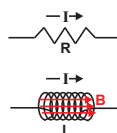
$$\Rightarrow I(t) = \frac{E}{R} \left[1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right]$$

där R/L är tidskonstanten för kretsen.

- Detta är alltså inte samma sak som i ett motstånd R : där förbrukas energi.

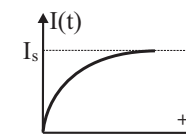
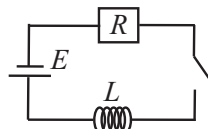
XVII.2.0.2. R-L krets

- Vi skall nu noggrannare undersöka hur en spole påverkar spänning och ström egenskaperna för kretsar.
- Man kan tillämpa Kirchoffs lagar (jfr. Elmag I) också på kretsar med induktorer. Enligt ekvation 9 är en induktans associerad med en skillnad i elektrisk spänning (potential). Detta kan användas på liknande sätt som spänningsskillnaden från resistorer i kretsanalys.



- Betrakta R-L kretsen (R står för motstånd och L för spole).
- Från Kirchoffs andra lag (potentialskillnaderna runt kretsen måste vara noll) får vi då vi går ett varv runt kretsen motsols

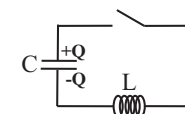
$$E - L \frac{dI}{dt} - RI = 0 \quad (13)$$



Bilden visar hur den tidsberoende strömmen närmar sig saturationsströmmen: $I_s = E/R$. Utan spole skulle strömmen omedelbart då kretsen sluts vara E/R .

XVII.2.0.3. L-C krets

Nedan är en L-C krets ritad, där laddningen på kondensatorn vid tiden $t = 0$ är $\pm Q$.



Då kretsen sluts, börjar en ström gå medsols och kondensatorns laddning minskar. Kirchoffs andra lag ger (för kondensatorn, se: *Elektromagnetismens grunder I*)

$$-\frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt} = 0$$

eftersom $I = dq/dt$ blir detta

$$-L \frac{d^2q}{dt^2} - \frac{q}{C} = 0$$

Detta är differentialekvationen för en harmonisk oscillator med lösningen för laddningen på kondensatorn och strömmen i kretsen som funktion av tiden

$$q(t) = Q \cos(\omega t + \phi) \quad (14)$$

där ϕ är fasvinkeln och ω är vinkelhastigheten

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

• Att detta är en korrekt lösning kan enkelt checkas med insättning i differentialekvationen och derivering

Strömmen är: $dq/dt = -\omega Q \sin(\omega t + \phi)$.

Strömmen och laddningen oscillerar fram och tillbaka. Ingen resistans finns i denna (idealiserade) krets så oscillationen fortgår i all oändlighet.

• Vi har löst en likadan differentialekvation i *Mekanikens grunder*, avsnittet för dämpad periodisk rörelse.

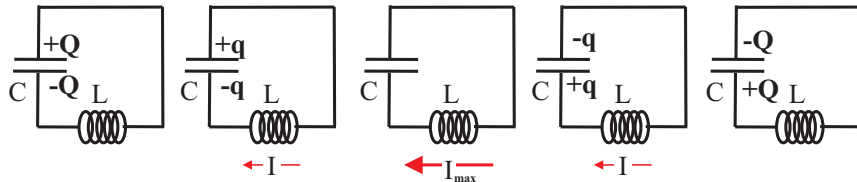
• Lösningen på differentialekvationen ger att laddningen på kondensatorn som en funktion av tiden ges av

$$q(t) = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}}} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega t + \phi) \quad (15)$$

där vinkelhastigheten ges som:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L}} \quad (16)$$

Energien i kretsen lagras i både kondensatorn och spolen:



$$\text{Energien} = \frac{Q^2}{2C} + 0 \quad \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2 \quad 0 + \frac{1}{2}LI_{max}^2 \quad \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2 \quad \frac{Q^2}{2C} + 0$$

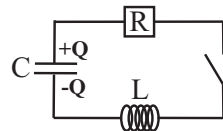
XVII.2.0.4. RCL-krets

• För en krets med ett motstånd (R), kondensator (C) och spole (L), blir Kirchhoffs andra lag (motsols)

$$V_C + V_L + V_R = -\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt} - RI = 0$$

Strömmen I är $\frac{dq}{dt}$, vilket ger följande differentialekvation

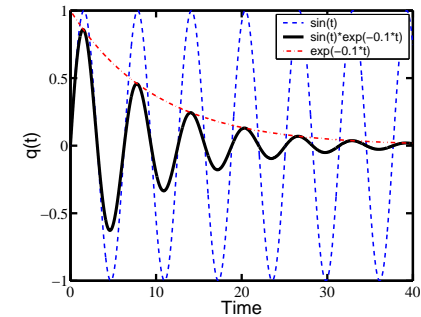
$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$



• Vi ser att kretsen oscillerar med frekvensen ω . Amplituden för oscillationerna avtar p.g.a. att elektrisk energi går förlorad i motståndet (exponenttermen).

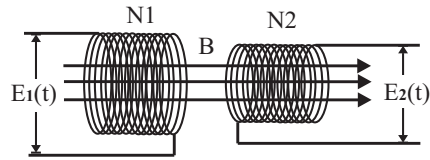
• Ifall R ökar, dör oscillationerna snabbare, och över ett visst värde på R har vi inga oscillationer mera (kretsen är **kritiskt eller överdämpad**).

• RCL-kretsarnas verkliga egenskaper kommer bättre fram i följande kapitel, då växelströmskretsarna introduceras.



XVII.3. Gemensam induktans

- Betrakta figuren nedan, där vi har två spolar (solenoider), där den vänstra spolen drivs av en tidsberoende spänning: $E_1(t)$.



- Den tidsberoende spänningen i spole 1 ger upphov till ett magnetiskt flöde som inducerar en tidsberoende spänning i spole 2, vars storlek beror av antalet varv i spolen och det magnetiska flödet genom den

$$E_2(t) = -N_2 \frac{d\Phi_2}{dt}$$

- Det magnetiska flödet Φ_2 är proportionellt till strömmen i spole 1, $\Phi_2 \propto I_1$, vilket ger att

$$N_2\Phi_2 = \text{Konstant} \cdot I_1(t) = M \cdot I_1(t)$$

vilket vidare ger att den inducerade spänningen i spole 2 kan skrivas som

$$E_2(t) = M \frac{dI_1}{dt} \quad (17)$$

där proportionalitetskonstanten

$$M = \frac{N_2\Phi_2}{I_1(t)} \quad (18)$$

är en konstant som beror av geometrin för spolarna, antal varv, area och deras avstånd från varandra.

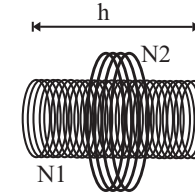
- M kallas för **gemensam induktans** (eng. mutual inductance). $[M] = \text{Wb/A} = \text{Vs/A} = \Omega\text{s} = \text{J/A}^2 = \text{H}$ (henry), vilket är samma enhet som för induktans L !

- Liknande, skulle den inducerade spänningen i spole 1 från spole 2 bli (därför: gemensam induktans)

$$E_1(t) = M \frac{dI_2}{dt}$$

Exempel:

I bilden nedan har vi en solenoid med N_1 varv, arean A och längden h inne i en annan solenoid med N_2 varv. Beräkna den gemensamma induktansen.



Från tidigare, fick vi att inne i en lång solenoid existerar ett konstant magnetfältet

$$B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{L}$$

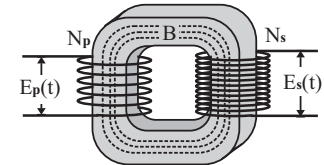
där I_1 är strömmen genom spole 1 som en funktion av tiden. Från ekv. (18) får vi den gemensamma induktansen

$$M = \frac{N_2\Phi_2}{I_1} = \frac{N_2 B_1 A}{I_1} = \frac{N_2 \mu_0 N_1 I_1}{I_1 h} A = \frac{\mu_0 A N_1 N_2}{h} \quad (19)$$

XVII.3.0.5. Transformatorer

- En **transformator** kan användas för att öka eller sänka växelspanning.

- En transformator är ofta byggd så att en primärkrets, N_p varv, och en sekundärkrets, N_s varv, är lindade runt en paramagnetisk metall, där det magnetiska flödet förstärks och går runt metallkärnan, se bild.



- Då en tidsberoende spänning oscillerar i den primära kretsen, uppstår en inducerad spänning i sekundärkretsen och situationen kan analyseras på samma sätt som för **RL-kretsen** tidigare. Kirchoffs andra lag ger att potentialskillnaderna runt kretsen måste vara noll, får vi då vi går ett varv runt kretsen

$$E_p(t) - E_{ind} - RI = 0$$

Den inducerade spänningen är enligt Faradays induktionslag: $E_{ind} = -N_p \frac{d\Phi_M}{dt}$.

Ifall motståndet för kretsen är mycket liten ($R \approx 0$), får vi Kirchoffs andra lag som

$$E_p(t) + N_p \frac{d\Phi_M}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Phi_M}{dt} = -\frac{E_p(t)}{N_p}$$

Denna tidsberoende spänning i **primärkretsen** ger alltså upphov till ett magnetiskt flöde Φ som inducerar en tidsberoende spänning i **sekundärkretsen**

$$E_s(t) = -N_s \frac{d\Phi_M}{dt}$$

Ifall all magnetisk flöde som primärkretsen ger upphov till hålls i metallkärnan, kan vi sammanlä de två sista ekvationerna till **transformatorkvationen**:

$$E_s(t) = \frac{N_s}{N_p} E_p(t) \quad (20)$$

Vi kan alltså transformera en hög spänning till lägre spänning eller en låg spänning till högre spänning!

XVII.3.0.6. Virvelströmmar

- Hur fungerar en induktionsspis?

• Inne i spisen finns en cirkulär växelströmkrets som får till stånd ett magnetfält som oscillerar. Detta magnetfält inducerar en spänning i föremål ovanför spisen. En inducerad ström (**virvelström**) produceras i föremålet: $I_{ind} = E_{ind}/R$ och värmeeffekten blir: $P = E_{ind}I_{ind} = E_{ind}^2/R$. Metall med liten resistans får mycket värmeeffekt och blir heta, däremot en hand med stort elektriskt motstånd värms inte!



[Wikipedia]

Exempel:

- För att bromsa en roterande metallskiva, sätter man skivan mellan två magneter, se bilden. Förklara och rita varför metallskivan bromsas upp.

Då skivan roterar, **ökar** det magnetiska flödet:

$$\Phi_M = B \cdot \text{Area}$$

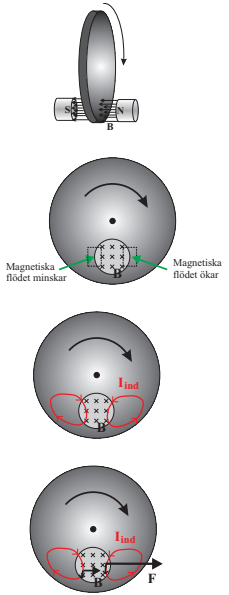
i metallskivan i området till höger om den konstanta magnetfältsområdet. Samtidigt **minskar** det magnetiska flödet i området till vänster.

De magnetiska flödesförändringarna inducerar spänning: $E_{ind} = -\Phi_M/dt$ i metallen. Metallernas goda konduktivitet (litet elektriskt motstånd) gör att virvelströmmar produceras i skivan.

Riktningen på virvelströmmarna ges av Lenz lag: **motsols** i området till höger där det magnetiska flödet minskar och **medsols** i området till vänster där det magnetiska flödet ökar.

De inducerade virvelströmmarna förmedlar en kraft:

$\mathbf{F} = I_{ind}d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$, där I_{ind} är den inducerade virvel-strömmen och $d\mathbf{l}$ är längdelementet längs strömmen. Kraften på skivan från virvelströmmarna i området till höger och vänster är båda riktade mot höger. Dessa krafter ger ett kraftmoment på skivan som retarderar skivans rotation, varför metallskivan bromsas upp.



- Hur fungerar en metalldetektor?

• En elektrisk krets i metalldetektorn ökar momentant magnetfältet i omgivningen.

• Detta föränderliga magnetfält inducerar en spänning i alla föremål i närheten.

• Ifall föremålet är av metall, induceras en ström i den ($I_{ind} = E_{ind}/R$), och när den inducerade virvelströmmen minskar p.g.a. ohmskt motstånd, får detta till stånd ett kortvarigt magnetfält kring metallföremålet.

• Detta inducerar nu en spänning i metalldetektorn, som alltså har detekterat metall i närheten.



[Wikipedia]

XVII.4. Växelström

- Nästan alla kretsar i hemmen fungerar med **växelström**.
- Växelström är behändig eftersom den kan enkelt transformeras till högspänning för att överföra elektricitet, eller till lågspänning som är tryggare för människor att använda.
- Betrakta en cirkulär krets med arean A som roterar i ett konstant magnetfält B . Det maximala magnetiska flödet som går genom kretsen inträffar då kretsen är vinkelrät mot magnetfältet

$$\Phi_{max} = BA$$

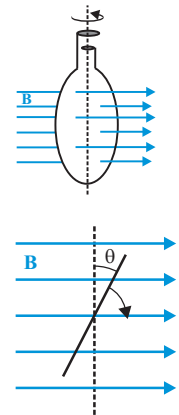
- Det magnetiska flödet genom kretsen som en funktion av vinkeln mellan kretsen och magnetfältet kan skrivas som

$$\Phi(\theta) = \Phi_{max} \cos(\theta) = BA \cos(\theta)$$

- Kretsen roterar med konstant vinkelhastighet ω ($\theta = \omega t$) där t är tiden.

Detta ger magnetiska flödet genom kretsen som en funktion av tiden

$$\Phi = BA \cos(\omega t)$$



- Den inducerade spänningen i kretsen blir:

$$E_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega BA \sin(\omega t) = E_{max} \sin(\omega t)$$

Spänning från en krets som roterar med konstant vinkelhastighet ω blir alltså

$$E = E_0 \sin(\omega t) \quad (21)$$

där $E_0 = \omega BA$. I en krets med motstånd R oscillerar också strömmen med samma vinkelfrekvens: $I = I_0 \sin(\omega t)$, där $I_0 = E_0/R$.

- Observera att medelspänningen och strömmen för växelström är noll

$$\langle E \rangle = E_0 \langle \sin(\omega t) \rangle = 0$$

- Vi definierar därför rms-värdet (Root Mean Square) för växelström

$$E_{rms} = \sqrt{\langle E^2 \rangle} = E_0 \sqrt{\langle \sin^2(\omega t) \rangle} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \quad (22)$$

Medeleffekten ges då som

$$\langle P \rangle = \langle EI \rangle = E_0 I_0 \langle \sin^2(\omega t) \rangle = E_0 I_0 / 2 = E_{rms} I_{rms} \quad (23)$$

För en spole L i en växelströmskrets, ger Kirchhoffs andra lag följande

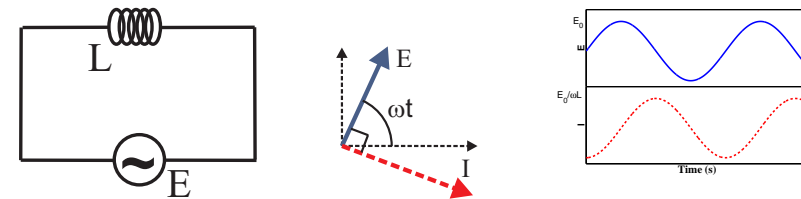
$$E - L \frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{E}{L}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{E}{L} dt = \frac{E_0}{L} \int \sin(\omega t) dt = -\frac{E_0}{L} \frac{\cos(\omega t)}{\omega}$$

där $\cos(\omega t) = -\sin(\omega t - \pi/2)$, och vi får att strömmen är $\pi/2$ eller 90° **efter** spänningen

$$I = \frac{E_0}{\omega L} \sin(\omega t - \pi/2) = \frac{E_0}{X_L} \sin(\omega t - \pi/2) \quad (25)$$

där $X_L = \omega L$ kallas för **reaktansen** för spolen och motsvarar motståndet R .



Fasdiagram för ström och spänning: nu är strömmen $\pi/2$ **efter** spänningen.

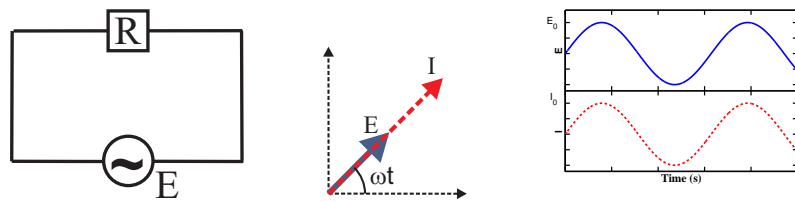
XVII.4.0.9. Kondensator i en växelströmskrets

XVII.4.0.7. Motstånd i en växelströmskrets

- För ett motstånd R i en växelströmskrets, följer strömmen spänningen (de sägs vara i fas)

$$E = E_0 \sin(\omega t)$$

$$I = \frac{E}{R} = \frac{E_0}{R} \sin(\omega t) \quad (24)$$



Fasdiagram för ström och spänning.

XVII.4.0.8. Spole i en växelströmskrets

- Vid likström går ingen ström genom en kondensator!
- Vid växelström laddas och urladdas kondensatorn så att ström verkar passera den (trots att inga elektroner rör sig över gapet)!

Vi har att

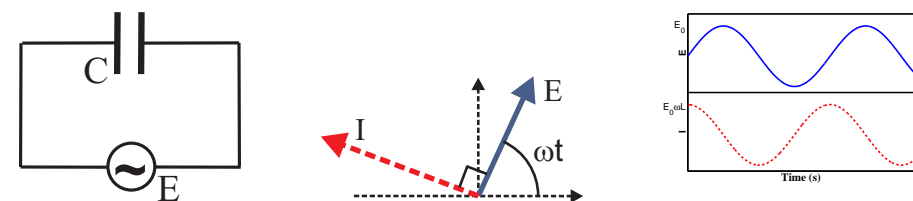
$$q = CE = CE_0 \sin(\omega t)$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \omega CE_0 \cos(\omega t)$$

där $\cos(\omega t) = \sin(\omega t + \pi/2)$, och vi får att strömmen är $\pi/2$ eller 90° **före** spänningen

$$I = E_0 C \omega \sin(\omega t + \pi/2) = \frac{E_0}{X_C} \sin(\omega t + \pi/2) \quad (26)$$

där: $X_C = \frac{1}{\omega C}$ är kondensatorns **reaktans**.



Fasdiagram för ström och spänning, där strömmen är $\pi/2$ **före** spänningen.

XVII.4.0.10. Sammanfattning om växelströmkretsar

Kortare kan man sammanfatta de tre exemplen ovan som att ifall vi har en vaxelström $E = E_o \sin(\omega t)$ i en krets med ett motstånd, en spole eller en kondensator, blir strömmen i kretsen

$$I = \frac{E_o}{|Z|} \sin(\omega t + \phi) \quad (27)$$

där $|Z|$ och ϕ fås från tabellen nedan

Tabell 1: Impedansen och fasvinkeln för R, L eller C i en växelströmkrets

Komponent i kretsen	Impedans Z	Fasvinkeln ϕ
Motstånd	R	0
Spole	$X_L = \omega L$	$-\pi/2$
Kondensator	$X_C = 1/\omega C$	$\pi/2$

Dessa insätts i ekvation (28) vilket ger

$$I_o \left[R \sin(\omega t + \phi) + \cos(\omega t + \phi) \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] = E_o \sin(\omega t) \quad (29)$$

eller kortare (se tabell 1)

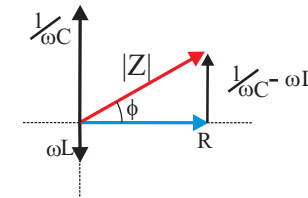
$$I_o [R \sin(\omega t + \phi) + \cos(\omega t + \phi) (X_L - X_C)] = E_o \sin(\omega t) \quad (30)$$

Denna ekvation måste stämma för alla tider t :

1) $\omega t = 0$

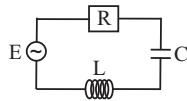
$$\begin{aligned} \Rightarrow R \sin(\phi) + \cos(\phi) (X_L - X_C) &= 0 \\ \Rightarrow \tan(\phi) &= \frac{X_C - X_L}{R} \end{aligned}$$

Vi ser att strömmen inte är i fas med spänningen, utan att vinkeln mellan dem är ϕ



XVII.5. RCL-seriekretsar

• I föregående delkapitel, såg vi hur R, C och L-komponenterna fungerar enskilt i en växelströmkrets. Nu sätter vi alla dessa i serie.



Växelspänningen från spänningskällan är

$$E = E_o \sin(\omega t)$$

Strömmen skriver vi som

$$I = I_o \sin(\omega t + \phi)$$

där koefficienterna I_o och ϕ måste bestämmas. Kirchhoffs andra lag ger att

$$RI + \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = E_o \sin(\omega t) \quad (28)$$

Kondensatorns och spolens ekvationer blir

$$\text{Kondensatorn: } q = \int Idt = -\frac{I_o}{\omega} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\text{Spolen: } \frac{dI}{dt} = I_o \omega \cos(\omega t + \phi)$$

I bilden ovan har vi ritat situationen där $\omega t = 0$. Vi definierar nu **impedansen** för kretsen som en vektor

$$\mathbf{Z} = R + i(1/\omega C - \omega L) \quad (31)$$

som består av en vektor R i reella riktningen och vektorn: $(1/\omega C - \omega L)$ i imaginära riktningen. Längden av \mathbf{Z} eller bara kallad impedansen är

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2} \quad (32)$$

vilket ger den totala effektiva resistansen för kretsen, och har samma enhet som motstånd Ω . Vidare ser vi från figuren att de följande likheterna gäller:

$$\sin(\phi) = \frac{1/\omega C - \omega L}{|Z|} = \frac{X_C - X_L}{|Z|} \quad (33)$$

$$\cos(\phi) = \frac{R}{|Z|} \quad (34)$$

2) Nu väljer vi att titta på Ekv. (30) vid $\omega t = \pi/2$, där $\sin(\omega t) = 1$:

$$I_o \left[R \sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) (X_L - X_C) \right] = E_o$$

Vi använder likheterna: $\sin(\frac{\pi}{2} + \phi) = \cos(\phi)$ och $\cos(\frac{\pi}{2} + \phi) = \sin(-\phi) = -\sin(\phi)$ vilket ger:

$$I_o = \frac{E_o}{[R \cos(\phi) + (X_C - X_L) \sin(\phi)]}$$

Insättning av ekvationerna (33) och (34) ger strömmens maximivärde

$$I_o = \frac{E_o}{\left[R \frac{R}{Z} + (X_C - X_L) \frac{X_C - X_L}{Z} \right]} = \frac{E_o Z}{\left[R^2 + (X_C - X_L)^2 \right]} = \frac{E_o}{|Z|}$$

Vi sammanfattar de viktigaste ekvationerna: Ifall spänningen i en **RCL-krets** ges av

$$E = E_o \sin(\omega t) \quad (35)$$

kan strömmen i kretsen skrivas som

$$I = I_o \sin(\omega t + \phi) \quad (36)$$

där **fasvinkeln** ϕ mellan strömmen och spänningen är

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{X_C - X_L}{R} \right) \quad (37)$$

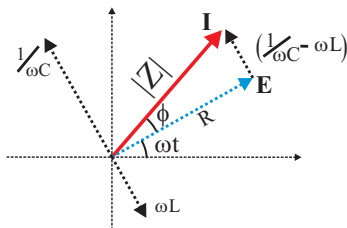
och **strömmens maximivärde** ges av

$$I_o = \frac{E_o}{Z} \quad (38)$$

där **impedansen** för kretsen motsvarande dess effektiva motstånd är

$$Z = \sqrt{R^2 + [X_C - X_L]^2} \quad (39)$$

Nedan i figuren, kan man se hur storheterna kan ges grafiskt.



XVII.5.0.11. Resonans för RCL-kretsar

I föregående kapitel fick vi strömmen i en RCL-krets som

$$I = \frac{E_o}{\sqrt{R^2 + [X_C - X_L]^2}} \sin(\omega t + \phi)$$

Vi ser att strömmen har ett maximum där $[X_C - X_L]^2 = 0$. Vi har alltså resonans när $1/\omega C - \omega L = 0$

$$\Rightarrow \omega = \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (40)$$

vilket kallas för **resonansfrekvens** och är oberoende av värdet R . Vid resonansfrekvensen är strömmen i fas med spänningen

$$I_{res} = \frac{E_o}{R} \sin(\omega_o t) \quad (41)$$

- Ju mindre R är, så ju större är resonansströmmen.

• Det är just denna stora förstärkning av signalen vid en viss frekvens som gör att man kan höra en radiostation.

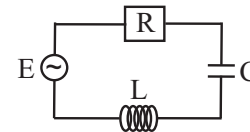
• Antennen i en radio tar emot alla sändningar, men en kanal väljs genom att ställa in värdet på kondensatorn i radion så att RCL-kretsens resonansfrekvens sammanfaller med den frekvens man vill höra.

Exempel:

RCL-kretsens värden är:

- $E_o = 1 \text{ V}$
- $R = 1 \text{ } \Omega$
- $C = 4 \times 10^{-3} \text{ F}$
- $L = 1 \times 10^{-3} \text{ H}$

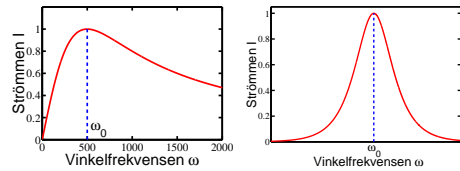
Beräkna resonansfrekvensen och rita strömmen, fasvinkeln ϕ , impedansen Z och spolens och kondensatorns reaktanser: X_L och X_C som funktion av spänningens vinkelfrekvens ω .



Vinkelfrekvensen där resonans sker är:

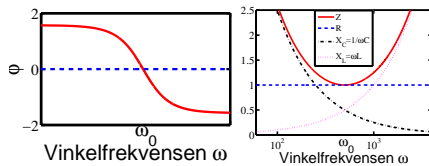
$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \approx 500 \text{ rad/s} \quad (f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} \approx 80 \text{ Hz})$$

Strömmen som funktion av vinkelfrekvensen ges av de två bilderna nedan. Den vänstra bildens x-axel är lineärt ritad, i motsats till den högra, där x-axeln är logaritmisk.



Den vänstra bilden nedan ger fasvinkeln ϕ som en funktion av vinkelfrekvensen. Vi ser att strömmen är i fas med spänningen vid resonansfrekvensen. Vid låga frekvenser dominerar kondensatorns reaktans: $X_C = 1/\omega C$ och strömmen är $\pi/2$ rad före spänningen. Vid höga frekvenser där kondensatorns reaktans helt dominerar av spolens ($X_L = \omega L$), är strömmen $\pi/2$ rad efter spänningen.

Bilden till höger avbildar impedansen Z och spolens och kondensatorns reaktanser: X_L och X_C som funktion av spänningens vinkelfrekvens ω . Vid låga frekvenser dominerar kondensatorns reaktans: $X_C = 1/\omega C$, som sedan avtar snabbt vid höga frekvenser, där spolens reaktans ökar: $X_L = \omega L$. Vid resonans är kretsens impedans lika med resistansen i kretsen: $Z = R$.



och strömmen är i resonans p.g.a. lämplig kombination av induktiv och kapacitiv reaktans. I båda fallen fås $\phi = 0$.

• För att effekten i en ström berör på fasskillnaden ϕ mellan V och I , och denna inte alltid är lätt att bestämma i praktiska fall, använder man i praktiskt bruk ofta också enheten VA (volt-ampere) för att beskriva växelström. Denna storhet, som betecknas helt enkelt VA, definieras som

$$VA = V_{rms} I_{rms} \quad (43)$$

och är alltså lika med effekten P endast ifall $\phi = 0$. Oftast anges VA som kilo-VA och betecknas KVA (notera det stora "K":et!)

Skillnaden mellan effekt och VA är alltså effektfaktorn och definieras i praktiskt bruk som

$$PF = \frac{P}{VA} \quad (44)$$

Uppenbart gäller att

$$PF = \cos \phi \quad (45)$$

[<http://www.powerstream.com/VA-Watts.htm>]

• Typiskt används enheten KVA i reservströmkällor som UPS:ar ("uninterrupted power source").

För att tillverkaren av dessa omöjliga kan i förväg veta vad fassfaktorn i maskinerna som UPS:en kopplas till är, anger de gärna istället kapaciteten som

- KVA, som alltså anger hur mycket effekt UPS:en ger ifall den kopplas till ett rent resistiv system med $\phi = 0$. För alla andra fall ges mindre effekt, och användaren måste veta sin effektfaktor för att veta UPS:ens kapacitet.

XVII.5.0.12. Effektförbrukningen i en RCL-krets

• Elektriska medeleffekten som en RCL-krets förbrukar definieras som

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \langle EI \rangle = \langle E_o \sin(\omega t) I_o \sin(\omega t + \phi) \rangle \\ &= E_o I_o \langle \sin(\omega t) \sin(\omega t + \phi) \rangle \\ &= E_o I_o \langle \sin(\omega t) [\sin(\omega t) \cos(\phi) + \cos(\omega t) \sin(\phi)] \rangle \\ &= E_o I_o \cos(\phi) \langle \sin^2(\omega t) \rangle + E_o I_o \sin(\phi) \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle \\ &= \frac{E_o I_o}{2} \cos(\phi) = \frac{E_o}{\sqrt{2}} \frac{I_o}{\sqrt{2}} \cos(\phi) \\ &= E_{rms} I_{rms} \cos(\phi) \end{aligned} \quad (42)$$

där likheterna: $\sin(\omega t + \phi) = \sin(\omega t) \cos(\phi) + \cos(\omega t) \sin(\phi)$ och $\cos(\omega t) \sin(\omega t) = \frac{1}{2} \sin(2\omega t)$ har använts, och *rms* ger root-mean-square värdet, se ekv. (22).

- Notera att om $\cos \phi = 0$, förbrukar kretsen ingen effekt alls!
- Därmed kallas $\cos \phi$ för effektfaktorn ("power factor") för kretsen.
- Detta skulle innebära att om man vill att de resistiva delarna gör nyttigt arbete (är t.ex. en lampa eller en någon mer avancerad elektronisk grunka), skulle man vid $\cos \phi = 0$ inte åstadkomma någon som helst nyttoeffekt.
 - Därför brukar de flesta växelströmskretsar designas så att $\phi \approx 0 \Rightarrow \cos \phi \approx 1$.
- Den konsumerade effekten är maximal om impedansen är en ren resistans, eller om spänningen

• Vanlig nätström i Finland anges ju ha spänningen 220 V. Detta är i själva verket just rms-spänningen, maximispänningen är alltså högre, ung. 310 V.

Exempel:

En spole har impedansen 30Ω vid frekvensen 100 Hz och impedansen 60Ω vid 500 Hz.

- Beräkna spolens induktans och resistans
- Beräkna fasvinkeln mellan spänningen och strömmen vid vardera frekvensen

a)
Impedansen är

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

vilket ger ekvationerna vid vardera frekvensen

$$\begin{aligned} R^2 &= Z_1^2 - \omega_1^2 \cdot L^2 \\ R^2 &= Z_2^2 - \omega_2^2 \cdot L^2 \end{aligned} \quad (46)$$

Vi löser ut induktansen L

$$\begin{aligned} Z_1^2 - \omega_1^2 \cdot L^2 &= Z_2^2 - \omega_2^2 \cdot L^2 \\ \Rightarrow L^2(\omega_2^2 - \omega_1^2) &= Z_2^2 - Z_1^2 \\ \Rightarrow L &= \sqrt{\frac{Z_2^2 - Z_1^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Z_2^2 - Z_1^2}{f_2^2 - f_1^2}} \\ L &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{60^2 - 30^2}{500^2 - 100^2}} \approx \underline{17 \text{ mH}} \end{aligned}$$

Resistansen för spolen blir

$$R = \sqrt{Z_1^2 - (2\pi f_1)^2 L^2} \approx 28.06 \Omega \approx \underline{28 \Omega}$$

b)

Fasvinkeln mellan spänningen och strömmen ges av

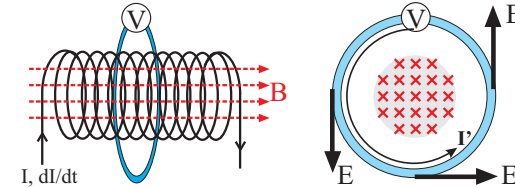
$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-\omega L}{R} \right)$$

vilket ger för de båda fallen att spänningen är före strömmen

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \tan^{-1} \left(\frac{-2\pi f_1 L}{R} \right) \approx \underline{-21^\circ} \\ \phi_2 &= \tan^{-1} \left(\frac{-2\pi f_2 L}{R} \right) \approx \underline{-61^\circ} \end{aligned}$$

XVII.6. Inducerade elektriska fältet

- Vi har lärt oss att när en ledare rör sig i ett magnetfält, induceras en spänning mellan ändorna p.g.a. den magnetiska kraften på laddningarna.
- Ifall ledaren står stilla, induceras ändå en spänning ifall det magnetiska flödet ändras.
- Vad är det nu som får laddningarna att flytta på sig i ledaren?
- I bilden nedan har vi en solenoid (arean A och n_L varv per längd) genom vilken strömmen ökar med hastigheten $d\Phi_M/dt$. Runt solenoiden finns en rund krets med en spänningsmätare.



- Magnetfältet in i solenoiden fick vi tidigare som: $B = \mu_0 n_L I$, så att det magnetiska flödet genom runda kretsen blir

$$E_{ind} = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -\mu_0 n_L A \frac{dI}{dt} \quad (47)$$

- Den inducerade strömmen är $I' = E_{ind}/R$, där R är kretsens resistans.

- Kraften som får laddningarna att röra på sig i kretsen är ett **inducerat elektriskt fält** från det magnetiska flödet som förändras med tiden.
- Vidare, så måste det inducerade fältet vara **icke konservativt**, eftersom när en laddning q går runt kretsen, så måste elfältet gånger laddningen vara lika med den inducerade spänningen

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_{ind} \quad (48)$$

Tankenöt: Skulle ett inducerat elfält finnas runt solenoiden ifall den inte omges av kretsen?

Jo, det skulle det. Det inducerade elfältet som den magnetiska flödesförändringen i solenoiden fått till stånd finns runt solenoiden oberoende om vi har en krets runt den eller inte.

I *elektromagnetismens grunder* I definierades spänningen för ett konstant elfält \mathbf{E} längs en sträcka $\Delta\mathbf{l}$ som: $V = \mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{l}$. Ifall elfältet inte är konstant, blir spänningen integralen: $V = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$.

- Det elektriska fältet är konservativt, eftersom vilken slutna integral som helst blir alltid noll

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (49)$$

Detta utnyttjas i bl.a. Kirchoffs andra lag som ger att spännings- eller potentialskillnaden runt en slutna krets är alltid noll: $\sum_i E_i = 0$.

- Då ekvationerna (47) of (48) förenas ser vi att det inducerade elektriska fältet inte är konservativt

$$E_{ind} = -\frac{d\Phi_M}{dt} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \neq 0 \quad (50)$$

- Den viktiga sammanfattning blir: **Ett föränderligt magnetfält inducerar ett elektriskt fält i rummet**

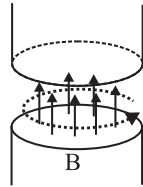
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -\iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (51)$$

där \iint berättar att man integrerar den magnetiska flödesdensiteten \mathbf{B} över en sluten yta. $d\mathbf{A}$ betecknar areaelementet.

Exempel:

- En cyklotronmagnet består av två cirkulära polytor med radien 50 cm. När magneten sätts på, ökar strömmen linjärt under 2 s tills fältet når toppvärdet 2 T. Under denna tid existerar ett inducerat elektriskt fält.

- a)** Beräkna elfältet som en funktion av dB/dt på avståndet r från magnetens mitt. **b)** Beräkna elfältet för $r = 40$ cm. **c)** Upprepa **a**-fallet för r större än magnetens radie R .



a)

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= |\mathbf{E}|2\pi r = -\pi R^2 \frac{dB}{dt} \\ \Rightarrow |\mathbf{E}| &= -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt} \end{aligned}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

Det inducerade elektriska fältet är konstant runt hela ringen

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= |\mathbf{E}|2\pi r \\ \Rightarrow |\mathbf{E}| &= -\frac{\pi r^2}{2\pi r} \frac{dB}{dt} = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \end{aligned}$$

b)

$$\frac{dB}{dt} = \frac{(2 - 0) \text{ T}}{2 \text{ s}} = 1 \text{ T/s}$$

vilket ger det inducerade elfältet

$$|\mathbf{E}| = -\frac{0.4 \text{ m}}{2} 1 \text{ T/s} = -0.2 \text{ V/m}$$

c) $r > R$