

Elektromagnetismens grunder II

5 januari 2009, ~/latex/teaching/EM-II/EM_grunder_II.tex

Innehåll

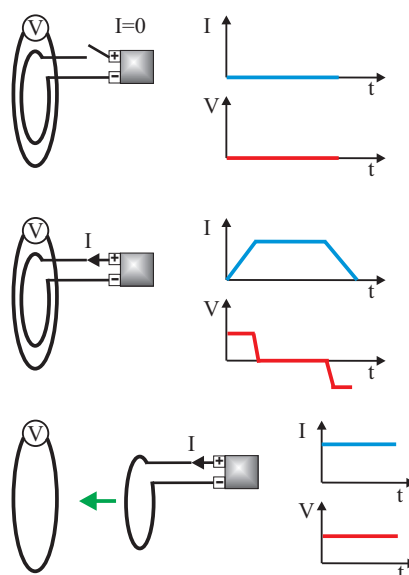
1	Elektromagnetisk induktion	2
1.1	Självinduktans och spolar	8
1.1.1	Energin lagrad i en spole	10
1.1.2	R-L krets	10
1.1.3	L-C krets	11
1.1.4	RCL-krets	12
1.2	Gemensam induktans	13
1.2.1	Transformatorer	15
1.2.2	Virvelströmmar	16
2	Växelström	17
2.1	Motstånd i en växelströmskrets	18
2.2	Spole i en växelströmskrets	18
2.3	Kondensator i en växelströmskrets	19
2.4	RCL-seriekrets	20
2.5	Resonans för RCL-kretsar	23
2.6	Effektförbrukningen i en RCL-krets	24
2.7	Inducerade elektriska fältet	26
3	Maxwells ekvationer och elektromagnetiska vågor	29
3.1	Experimentell observation av EM-vågor	34
3.2	Energi och rörelsemängd för EM-vågor	35
3.3	Polarisation av elektromagnetiska vågor	40

1 Elektromagnetisk induktion

Elfält accelererar laddningar och magnetiska fält ändrar laddningars rörelseriktning. I en elektrisk krets är det batteriet som gör arbete på elektronerna som ger upphov till en ström i kretsen. Hur har batteriet laddats? Hur mekanisk energi från t.ex. ett vattenkraftverk omvandlas till elektrisk energi, hur ett magnetiskt kreditkort läses, går via ett fenomen som kallas för **elektromagnetisk induktion**.

Tidiga experiment med elektriska kretsar gav intressanta resultat. Experimentet gick ut på att man har en mindre spole i vilken man kan ändra strömmen, och en större spole, från vilken man kan mäta spänningen.

1. När spolarna är in i varandra och ingen ström går i den mindre spolen, syns ingen spänning i den yttre spolen.
2. När spolarna är in i varandra och en ström börjar gå i den mindre spolen, syns en **inducerad** spänning i den yttre spolen.
3. När spolarna är in i varandra och strömmen i den mindre spolen är konstant, syns ingen spänning i den yttre spolen.
4. Ifall strömmen i den mindre spolen är konstant, och man för den in i den större spolen, syns en **inducerad** spänning i den yttre spolen.
5. Ifall alla föregående experiment görs med andra material, med samma form, är den inducerade spänningen konstant, vilket visar att den inducerade spänningen inte beror på materialet, utan bara på formen och magnetfältet.

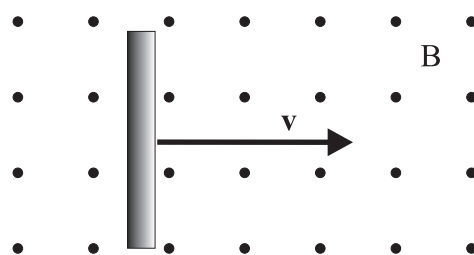


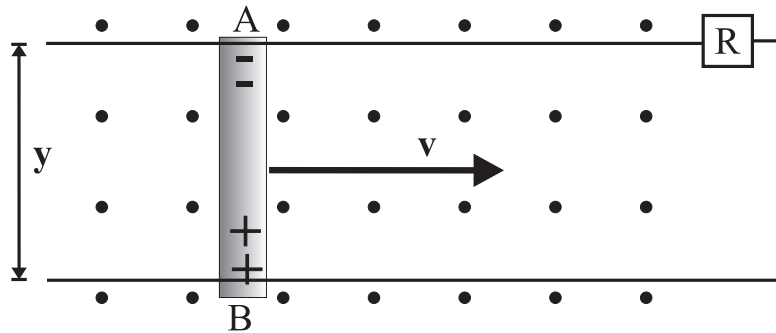
För att mera kvantitativt se på detta undersöker vi vad som händer i kretsen bredvid, där en ledare rör sig med en hastighet v i ett konstant magnetfält vars riktning är utåt från pappret.

Varje laddning q i ledaren påverkas av en magnetisk kraft

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

För positiva laddningarna är den magnetiska kraften nedåt och för de negativa laddningar uppåt, vilket leder till att en spänning induceras i ledaren.





Arbetet som görs på en laddning som flyttas från punkt **A** till **B** längs ledaren är

$$W_{AB} = \int \mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{l} = |F_m|y = q|v||B|y$$

Potentialen definierades i kapitlet för elektrisk potential, som $U = W/q$, från vilket vi definierar den **inducerade spänningen** i kretsen

$$E_{ind} = \frac{W_{AB}}{q} = |v||B|y \quad (1)$$

Vi skriver den inducerade spänningen i en annan form med hjälp av ledarens hastighet

$$E_{ind} = Byv = By \frac{dx}{dt} = B \frac{y \cdot dx}{dt} = B \frac{dArea}{dt} = \frac{d\Phi_M}{dt} \quad (2)$$

där Φ_M är det **Magnetiska flödet**

$$\Phi_M = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (3)$$

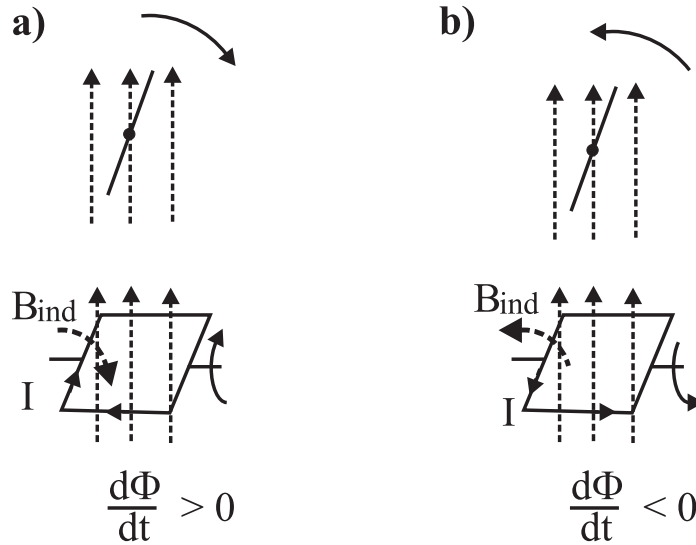
En spänning inducerad alltså i en krets ifall endera (eller bådaddera) magnetfältet ändras genom en area, eller ifall magnetfältet är konstant men arean förändras. Detta kallas för **principen av elektromagnetisk induktion**.

Riktningen för den inducerade spänningen är alltid så att den motverkar flödesändringen, så ekvationen för induktion ges ofta i form av **Faradays induktionslag**

$$E_{ind} = - \frac{d\Phi_M}{dt} \quad (4)$$

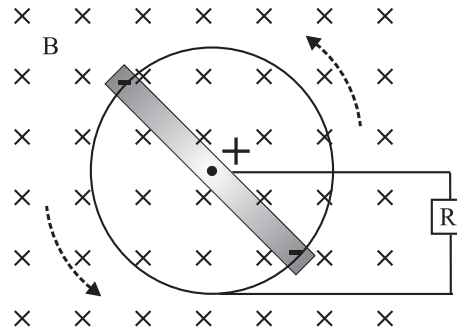
För att veta vilken riktning den inducerade strömmen har, används **Lenzs lag**.

Den inducerade spänningen är sådan att magnetfältet som produceras av den inducerade strömmen motverkar förändringen av det magnetiska flödet genom kretsen



i fall **a** ökar det magnetiska flödet genom kretsen. Strömmen induceras medsols för att försöka hålla magnetfältet konstant genom kretsen. I **b** fallet minskar det magnetiska flödet genom kretsen eftersom arean minskar. Nu induceras en ström motsols som försöker motverka flödesminskningen.

Exempel: En rak metallisk stav roterar kring en axel som är parallell med ett konstant magnetfält, se figuren nedan. Stavens längd är L och vinkelhastigheten är ω . Vad är den inducerade spänningen mellan stavens mitt och ändpunkterna?



För halva staven ($L/2$) är rotationsperioden

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Arean som halva staven far över på ett varv är $Area = \pi(L/2)^2$ vilket ger att arean som halva staven sveper över per tidsenhet blir

$$\frac{dArea}{dt} = \frac{Area}{T} = \frac{\pi(L/2)^2\omega}{2\pi} = \frac{L^2\omega}{8}$$

vilket ger den inducerade spänningen mellan mitten och ändan som

$$E_{ind} = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -B\frac{dArea}{dt} = -\frac{BL^2\omega}{8}$$

Exempel: En ledande stav med längden L och massan m glider över en ledande krets (med resistansen R) med begynnelsehastigheten v_0 (se figuren). Ett konstant magnetiskt fält \mathbf{B} existerar normalt mot planet.

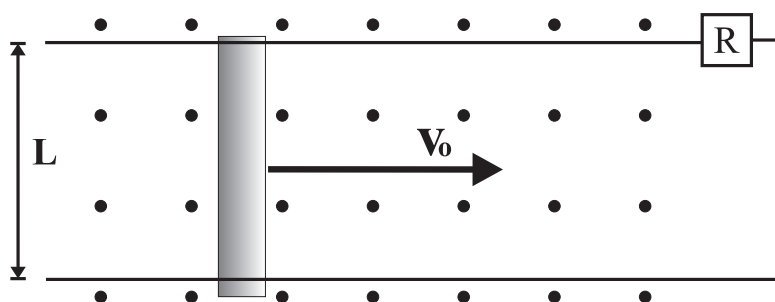
1. Bestäm kraften som verkar på staven som en funktion av B , L , R och v
2. Visa att farten för staven avtar som en funktion av tiden enligt

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$$

där $\tau = mR/(B^2L^2)$

3. Visa att den totala väglängd som staven rör sig innan den stannar är: τv_0
4. Visa att den totala energiförlusten i motståndet R är lika med stavens ursprungliga kinetiska energin

$$W_R = K = \frac{1}{2}mv_0^2$$



1. Den inducerade spänningen är den magnetiska flödesändringen per tidsenhet för kretsen

$$E_{ind} = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -B\frac{dA}{dt} = -B\frac{L dx}{dt} = -BLv \quad (5)$$

Strömmen i kretsen är: $I = E_{ind}/R$, motsols, vilket ger att kraften på staven är i motsatt håll till hastigheten

$$\mathbf{F} = I\mathbf{dl} \times \mathbf{B} = ILB = -\frac{B^2L^2v}{R}$$

2. Stavens retardationen på p.g.a. kraften blir

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2L^2v}{R} \quad (6)$$

Vi löser denna differentialekvation:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{v} &= -\frac{B^2 L^2}{mR} dt \\ \Rightarrow \int \frac{dv}{v} &= -\frac{B^2 L^2}{mR} \int dt \\ \ln(v) &= -\frac{B^2 L^2}{mR} t + Konst \\ v &= e^{-\frac{B^2 L^2}{mR} t + Konst} = e^{Konst} e^{-\frac{B^2 L^2}{mR} t}\end{aligned}$$

Eftersom $v(0) = v_0$ får vi att $e^{Konst} = v_0$, vilket slutligen ger hastigheten för staven som en funktion av tiden:

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{B^2 L^2}{mR} t}$$

3. Totala sträckan som staven rör sig får vi från integralen

$$S = \int_0^\infty v(t) dt = v_0 \int_0^\infty e^{-t/\tau} dt = v_0 \left| -\tau e^{-t/\tau} \right|_0^\infty = v_0 (0 - (-\tau)) = v_0 \tau$$

där $\tau = mR/(B^2 L^2)$.

4. Totala arbetet är tidsintegralen för effekten ($I_{ind}(t) = E_{ind}(t)/R$), se Ekv. (5)

$$\begin{aligned}W_R &= \int_0^\infty P(t) dt = \int_0^\infty E_{ind}(t) I_{ind}(t) dt = \int_0^\infty BLv_0 e^{-t/\tau} \frac{BLv_0 e^{-t/\tau}}{R} dt \\ &= \frac{B^2 L^2 v_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = \frac{B^2 L^2 v_0^2}{R} \left| -\frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau} \right|_0^\infty \\ &= \frac{B^2 L^2 v_0^2 \tau}{2R} = \frac{B^2 L^2 v_0^2}{2R} \frac{mR}{B^2 L^2} = \frac{1}{2} m v_0^2\end{aligned}$$

Rörelseenergin har alltså övergått till elektrisk energi via induktion, och förbrukats i motståndet.

Exempel: Hur kan man mäta den konstanta magnetiska flödesdensiteten mellan den magnetiska syd- och nordpolen i figuren?

Man sätter nu en krets vars area är lika med polerna och som har N varv in mellan polerna. Ifall arean för polerna är stor och avståndet mellan dem är liten, kan den magnetiska fältstyrkan approximeras vara konstant mellan polerna och noll utanför.

Drar man nu bort kretsen, ändras det magnetiska flödet genom kretsen och en spänning inducerad i den, Ekv. (4):

$$E_{ind} = -\frac{d\Phi_M}{dt}$$

Från detta ser vi att det magnetiska flödet genom en krets mellan tiderna t_1 och t_2 fås från tidsintegralen av den inducerade spänningen

$$\Phi_M = -\int_{t_1}^{t_2} E_{ind}(t) dt \quad (7)$$

Vid tiden noll drar man nu bort kretsen från de magnetiska polerna och mäter samtidigt den inducerade spänningen som en funktion av tiden.

Det totala magnetiska flödet genom kretsen är nu arean under (t, E_{ind}) kurvan

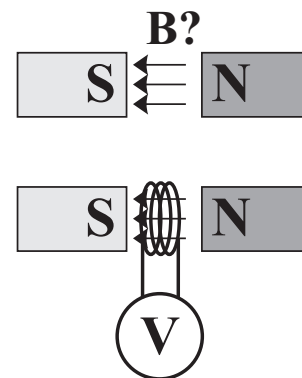
$$\Phi_M = \Phi_M(t') - \Phi_M(0) = -\int_0^{t'} E_{ind}(t) dt$$

Flödet genom kretsen vid tiden noll var:

$$\Phi_M(0) = NB(\pi R^2),$$

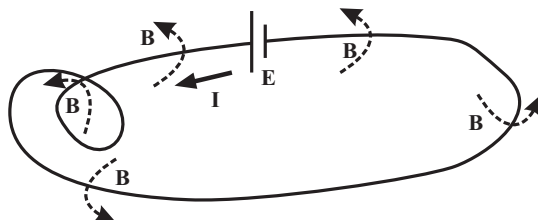
vilket ger att den frågade magnetiska flödesdensiteten är:

$$B = \frac{\int_0^{t'} E_{ind}(t) dt}{N\pi R^2}$$



1.1 Självinduktans och spolar

Betrakta figuren nedan, där en spänningskälla är sluten i en krets. Strömmen i kretsen ger upphov till ett magnetfält runt och genom kretsen. Storleken på detta magnetfält är enligt Biot-Savats lag proportionerligt till strömmen: $B \propto I$.



Det magnetiska flödet genom kretsen är

$$\Phi_M = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \propto I = \text{Konstant } I$$

Då alltså strömmen i kretsen ökar, ökar också magnetfältet och det magnetiska flödet genom kretsen. Detta betyder ju att en själv-inducerad spänning uppstår i kretsen:

$$E_{ind} = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -\text{Konstant} \frac{dI}{dt}$$

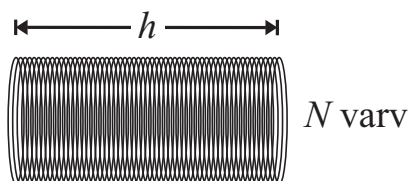
där konstanten, som bara beror av kretsens form, kallas för **självinduktans**

$$L = -\frac{E_{ind}}{dI/dt} \quad [L] = V s/A = H \text{ (henry)} \quad (8)$$

Den själv-inducerade spänningen i kretsen kan nu skrivas som

$$E_{ind} = -L \frac{dI}{dt} \quad (9)$$

Exempel: Beräkna självinduktansen för en lång N varv solenoid med längden h och arean A .



Den magnetiska flödesdensiteten inne i en lång solenoid är konstant (Se: *Elektromagnetismens grunder I*)

$$B = \mu \frac{N}{h} I \quad (10)$$

där μ är mediets permeabilitet, N är antalet varv, h längden och I är strömmen i solenioden. Det magnetiska flödet genom **ett varv** av solenoiden är magnetiska flödesdensiteten gånger arean:

$$\Phi_M = BA = \frac{\mu N I A}{h}$$

Detta ger att den inducerade spänningen genom N varv blir

$$E_{ind} = -N \frac{d\Phi_M}{dt} = -\frac{\mu N^2 A}{h} \frac{dI}{dt}$$

Självinduktansen, eller bara induktansen för en solenoid också kallad **spole** är enligt definitionen (8)

$$L = \frac{\mu N^2 A}{h} \quad (11)$$

En komponent med induktans i en krets kallas för en **induktor** eller **spole**, och betecknas av symbolen till höger



Spolen i bilden har 100 varv, är 5 mm lång och har tvärsnittsarean $8 \times 10^{-4} \text{ m}^2$. Hur stor är självinduktansen? Beräkna den inducerade spänningen i en krets med denna spole, då strömmen i kretsen ökar från 0 till 10 A på 5 μs .

$$L = \frac{\mu N^2 A}{h} \approx \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 8 \times 10^{-4}}{5 \times 10^{-3}} \approx \underline{20 \mu\text{H}}$$

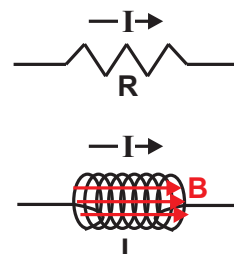
$$E_{ind} = -L \frac{dI}{dt} \approx -20 \times 10^{-6} \text{ H} \frac{10 \text{ A}}{5 \times 10^{-6} \text{ s}} \approx \underline{-40 \text{ V}}$$

1.1.1 Energin lagrad i en spole

Då ström börjar gå genom en spole, induceras en motspänning i kretsen. Denna inducerade spänning: $E_{ind} = L \frac{dI}{dt}$ ger att effekten som behövs för att öka strömmen genom spolen är: $P = \frac{dW}{dt} = E_{ind}I = LI \frac{dI}{dt}$. Den totala energin som behövs för att strömmen genom en spole skall öka från noll till I , får vi då genom att integrera:

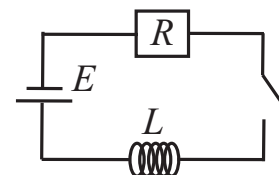
$$W_{tot} = \int_0^I LI' dI' = L \Big|_0^I \frac{I'^2}{2} = \frac{1}{2} LI^2$$

Denna energi är lagrad i magnetfältet inne i spolen. I ett motstånd R förbrukas energi.



1.1.2 R-L krets

Vi skall nu noggrannare undersöka hur en spole påverkar spänning och ström egenskaperna för kretsar. Betrakta R-L kretsen (R står för motstånd och L för spole).

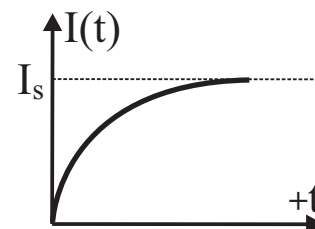


Från Kirschhoffs andra lag (potentialskillnaderna runt kretsen måste vara noll) får vi då vi går ett varv runt kretsen motsols $E - L \frac{dI}{dt} - RI = 0$. Lösningen till denna differentialekvation blir:

$$\begin{aligned} L \frac{dI}{dt} - RI &= E - RI \\ \Rightarrow \frac{dI}{E - RI} &= \frac{dt}{L} \\ \Rightarrow \int \frac{dI}{E - RI} &= \int \frac{dt}{L} \\ \Rightarrow -\frac{\ln(E - RI)}{R} &= \frac{t}{L} + konst \\ \Rightarrow \ln(E - RI) &= -\frac{Rt}{L} + konst' \\ \Rightarrow E - RI &= e^{-\frac{Rt}{L}} e^{konst'} = Ke^{-\frac{Rt}{L}} \\ \Rightarrow I &= \frac{1}{R} \left[E - Ke^{-\frac{Rt}{L}} \right] \end{aligned}$$

där konstanttermen K fås från begynnelsevillkoret: $t = 0, I = 0$

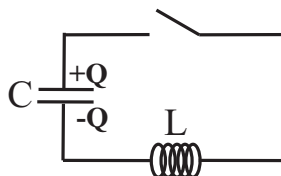
$$\begin{aligned} I(0) &= \frac{1}{R} \left[E - Ke^{-\frac{R \cdot 0}{L}} \right] = \frac{1}{R} [E - K] = 0 \Rightarrow K = E \\ \Rightarrow I(t) &= \frac{E}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right] \end{aligned}$$



där R/L är tidskonstanten för kretsen. Bilden visar hur den tidsberoende strömmen närmar sig saturationsströmmen: $I_s = E/R$. Utan spole skulle strömmen omedelbart då kretsen sluts vara E/R .

1.1.3 L-C krets

Nedan är en L-C krets ritad, där laddningen på kondensatorn vid tiden $t = 0$ är $\pm Q$.



Då kretsen sluts börjar en ström gå medsols och kondensatorns laddning minskar. Kirschhoffs andra lag ger (För kondensatorn, se: *Elektromagnetismens grunder I*)

$$-\frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt} = 0$$

eftersom $I = dq/dt$ blir detta

$$-L \frac{d^2q}{dt^2} - \frac{q}{C} = 0$$

Vilket är differentialekvation för en harmonisk oscillator med lösningen för laddningen på kondensatorn och strömmen i kretsen som funtion av tiden

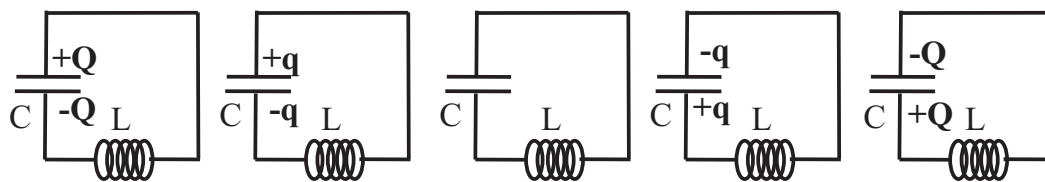
$$q(t) = Q \cos(\omega t + \phi) \quad (12)$$

där ϕ är fasvinkeln och ω är vinkelhastigheten

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Strömmen är: $dq/dt = -\omega Q \sin(\omega t + \phi)$. Strömmen och laddningen oscillerar fram och tillbaka. Ingen resistans finns i kretsen (är det möjligt?), så att oscillationen fortgår i all oändlighet.

Energien i kretsen lagras i både kondensatorn och spolen:



$$\text{Energien} = \frac{Q^2}{2C} + 0$$

$$\frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2$$

$$0 + \frac{1}{2}LI_{max}^2$$

$$\frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2$$

$$\frac{Q^2}{2C} + 0$$

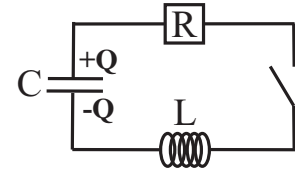
1.1.4 RCL-krets

För en krets med ett motstånd (R), kondensator (C) och spole (L), blir Kirschhoffs andra lag (motsols)

$$V_C + V_L + V_R = -\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt} - RI = 0$$

Strömmen I är $\frac{dq}{dt}$, vilket ger följande differentialekvation

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$



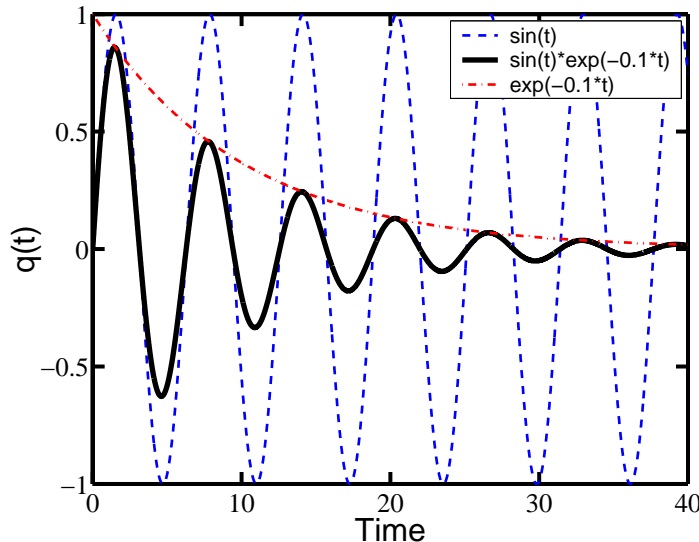
Vi har löst en likadan differentialekvation i *Mekanikens grunder*, avsnittet för dämpad periodisk rörelse. Lösningen på differentialekvationen ger att laddningen på kondensatorn som en funktion av tiden ges av

$$q(t) = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{R^2C}{4L}}} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega t + \phi) \quad (13)$$

där vinkelhastigheten ges som:

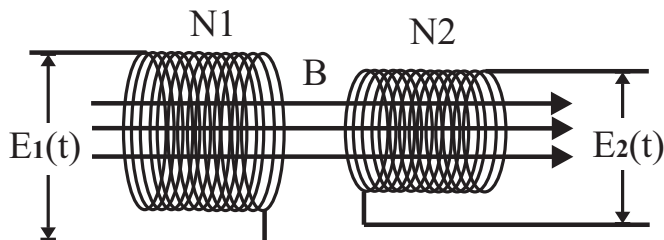
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L}} \quad (14)$$

Vi ser att kretsen oscillerar med frekvensen ω . Amplituden för oscillationerna avtar p.g.a. att elektrisk energi går förlorad i motståndet (exponent termen). Ifall R ökar, dör oscillationerna snabbare, och över ett visst värde på R har vi inga oscillationer mera (kretsen är **kritiskt- eller över-dämpad**). RCL-kretsarnas verkliga egenskaper kommer bättre fram i följande kapitel, då växelströmskretsarna introduceras.



1.2 Gemensam induktans

Betrakta figuren nedan, där vi har två spolar (solenoider), där den vänstra spolen drivs av en tidsberoende spänning: $E_1(t)$.



Den tidsberoende spänningen i spole **1** ger upphov till ett magnetiskt flöde som inducerar en tidsberoende spänning i spole **2**, vars storlek beror av antalet varv i spolen och det magnetiska flödet genom den

$$E_2(t) = -N_2 \frac{d\Phi_2}{dt}$$

Det magnetiska flödet Φ_2 är proportionellt till strömmen i spole **1**, $\Phi_2 \propto I_1$, vilket ger att

$$N_2\Phi_2 = \text{Konstant} \cdot I_1(t) = M \cdot I_1(t)$$

vilket ger att den inducerade spänningen i spole **2** kan skrivas som

$$E_2(t) = M \frac{dI_1}{dt} \quad (15)$$

där proportionalitetskonstanten

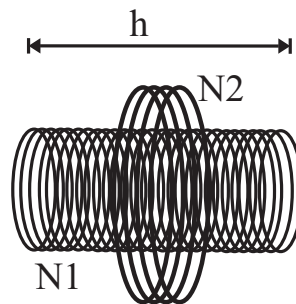
$$M = \frac{N_2\Phi_2}{I_1(t)} \quad (16)$$

är en konstant som beror av geometrin för spolarna, antal varv, area och deras avstånd från varandra. M kallas för **gemensam induktans** (eng. mutual inductance). $[M] = \text{Wb/A} = \text{Vs/A} = \Omega\text{s} = \text{J/A}^2 = \text{H}$ (henry), vilket är samma enhet som för induktans L .

Liknande, skulle den inducerade spänningen i spole **1** från spole **2** bli (därför: gemensam induktans)

$$E_1(t) = M \frac{dI_2}{dt}$$

Exempel: I bilden nedan har vi en solenoid med N_1 varv, arean A och längden h inne i en annan solenoid med N_2 varv. Beräkna den gemensamma induktansen.



Från tidigare, fick vi att inne i en lång solenoid existerar ett konstant magnetfältet

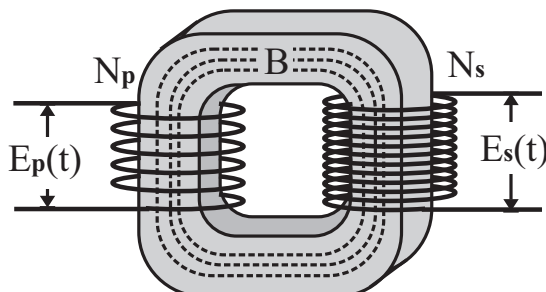
$$B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{L}$$

där I_1 är strömmen genom spole 1 som en funktion av tiden. Från ekv. (16) får vi den gemensamma induktansen

$$M = \frac{N_2 \Phi_2}{I_1} = \frac{N_2 B_1 A}{I_1} = \frac{N_2 \mu_0 N_1 I_1}{I_1 h} A = \frac{\mu_0 A N_1 N_2}{h} \quad (17)$$

1.2.1 Transformatorer

En **transformator** kan användas för att öka eller sänka växelspanning. En transformator är ofta byggd så att en primärkrets, N_p varv, och en sekundärkrets, N_s varv, är lindade runt en paramagnetisk metall, där det magnetiska flödet förstärks och går runt metallkärnan, se bild.



Då en tidsberoende spänning oscillerar i den primära kretsen, uppstår en inducerad spänning i sekundärkretsen och situationen kan analyseras på samma sätt som för **RL-kretsen** tidigare. Kirschhoffs andra lag ger att potentialskillnaderna runt kretsen måste vara noll, får vi då vi går ett varv runt kretsen

$$E_p(t) - E_{ind} - RI = 0$$

Den inducerade spänningen är (Faradays lag): $E_{ind} = -N_p \frac{d\Phi_M}{dt}$. Ifall motståndet för kretsen är mycket liten ($R \approx 0$), får vi Kirschhoffs andra lag som

$$E_p(t) + N_p \frac{d\Phi_M}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Phi_M}{dt} = -\frac{E_p(t)}{N_p}$$

Denna tidsberoende spänningen i **primärkretsen** ger alltså upphov till ett magnetiskt flöde Φ som inducerar en tidsberoende spänning i **sekundärkretsen**

$$E_s(t) = -N_s \frac{d\Phi_M}{dt}$$

Ifall all magnetisk flöde som primärkretsen ger upphov till hålls i metallkärnan, kan vi sammanslå de två sista ekvationerna till **transformatorkvationen**:

$$E_s(t) = \frac{N_s}{N_p} E_p(t) \quad (18)$$

Vi kan alltså transformera en hög spänning till lägre spänning eller en låg spänning till högre spänning.

1.2.2 Virvelströmmar

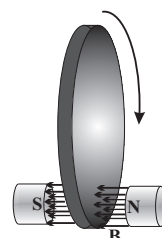
Hur fungerar en induktionsspis?

Inne i spisen finns en cirkulär växelströmkrets som får till stånd ett magnetfält som oscillerar. Detta magnetfält inducerar en spänning i föremål ovanför spisen. En inducerad ström (**virvelström**) produceras i föremålet: $I_{ind} = E_{ind}/R$ och värmeeffekten blir: $P = E_{ind}I_{ind} = E_{ind}^2/R$. Metall med liten resistans får mycket värmeeffekt och blir heta, däremot en hand med stort elektriskt motstånd värms inte!

Hur fungerar en metalledetektor?

En elektrisk krets i metalledektorn ökar momentant magnetfältet i omgivningen. Detta föränderliga magnetfält inducerar en spänning i alla föremål i närheten. Ifall föremålet är av metall, induceras en ström i den ($I_{ind} = E_{ind}/R$), och när den inducerade virvelströmmen minskar p.g.a. ohmskt motstånd, får detta till stånd ett kortvarigt magnetfält kring metallföremålet. Detta inducerar nu en spänning i metalledektorn, som alltså har detekterat metall i närheten.

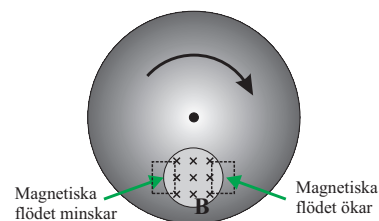
Exempel: För att bromsa en roterande metallskiva, sätter man skivan mellan två magneter, se bilden. Förklara och rita varför metallskivan bromsas upp.



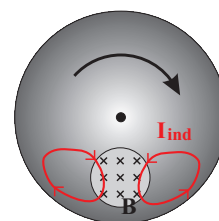
Då skivan roterar, **ökar** det magnetiska flödet:

$$\Phi_M = B \cdot Area$$

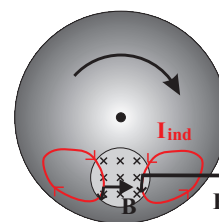
i metallskivan i området till höger om den konstanta magnetfältsområdet. Samtidigt **minskar** det magnetiska flödet i området till vänster.



De magnetiska flödesförändringarna inducerar spänning: $E_{ind} = -\Phi_M/dt$ i metallen. Metallernas goda konduktivitet (litet elektriskt motstånd) gör att virvelströmmar produceras i skivan. Riktningen på virvelströmmarna ges av Letz lag: **motsols** i området till höger där det magnetiska flödet minskar och **medsols** i området till vänster där det magnetiska flödet ökar.



De inducerade virvelströmmarna förmedlar en kraft: $\mathbf{F} = I_{ind}d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$, där I_{ind} är den inducerade virvelströmmen och $d\mathbf{l}$ är längdelementet längs strömmen. Kraften på skivan från virvelströmmarna i området till höger och vänster är båda riktade mot höger. Dessa krafter ger ett kraftmoment på skivan som retarderar skivans rotation, varför metallskivan bromsas upp.



2 Växelström

Nästan alla kretsar i hemmen fungerar med **växelström**. Växelström är behändig eftersom den kan enkelt transformeras till högspänning för att överföra elektricitet, eller till lågspänning som är tryggare för människor att använda.

Betrakta en cirkulär krets med arean A som roterar i ett konstant magnetfält B . Det maximala magnetiska flödet som går genom kretsen inträffar då kretsen är vinkelrät mot magnetfältet

$$\Phi_{max} = BA$$

Det magnetiska flödet genom kretsen som en funktion av vinkeln mellan kretsen och magnetfältet kan skrivas som

$$\Phi(\theta) = \Phi_{max} \cos(\theta) = BA \cos(\theta)$$

Kretsen roterar med konstant vinkelhastighet ω ($\theta = \omega t$) där t är tiden. Detta ger magnetiska flödet genom kretsen som en funktion av tiden

$$\Phi = BA \cos(\omega t)$$

Den inducerade spänningen i kretsen blir:

$$E_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega BA \sin(\omega t) = E_{max} \sin(\omega t)$$

Spänning från en krets som roterar med konstant vinkelhastighet ω blir alltså

$$E = E_0 \sin(\omega t) \quad (19)$$

där $E_0 = \omega BA$. I en krets med motstånd R oscillerar också strömmen med samma vinkelfrekvens: $I = I_0 \sin(\omega t)$, där $I_0 = E_0/R$. Observera att medelspänningen och strömmen för växelström är noll

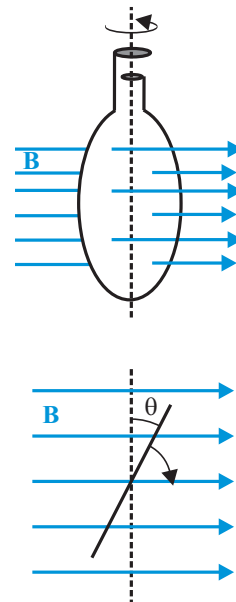
$$\langle E \rangle = E_0 \langle \sin(\omega t) \rangle = 0$$

Vi definierar därför rms-värdet (Root Mean Square) för växelström

$$E_{rms} = \sqrt{\langle E^2 \rangle} = E_0 \sqrt{\langle \sin^2(\omega t) \rangle} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \quad (20)$$

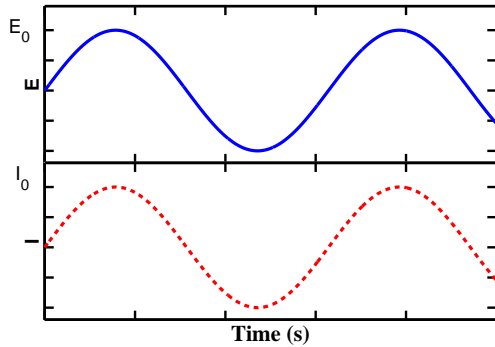
Medeleffekten ges då som

$$\langle P \rangle = \langle EI \rangle = E_0 I_0 \langle \sin^2(\omega t) \rangle = E_0 I_0 / 2 = E_{rms} I_{rms} \quad (21)$$



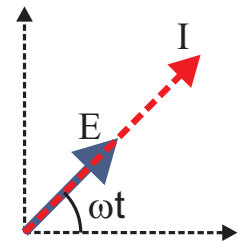
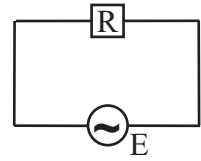
2.1 Motstånd i en växelströmskrets

För ett motstånd R i en växelströmskrets, följer strömmen spänningen (de sägs vara i fas)



$$E = E_0 \sin(\omega t)$$

$$I = \frac{E}{R} = \frac{E_0}{R} \sin(\omega t) \quad (22)$$



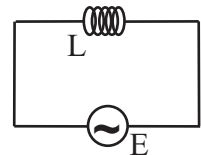
Fasdiagram för ström och spänning

2.2 Spole i en växelströmskrets

För en spole L i en växelströmskrets, ger Kirchhoffs andra lag följande

$$E - L \frac{dI}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dt} = \frac{E}{L}$$

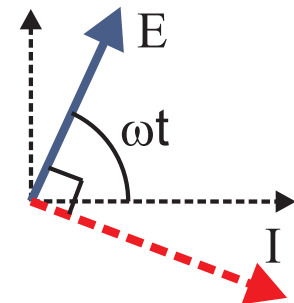
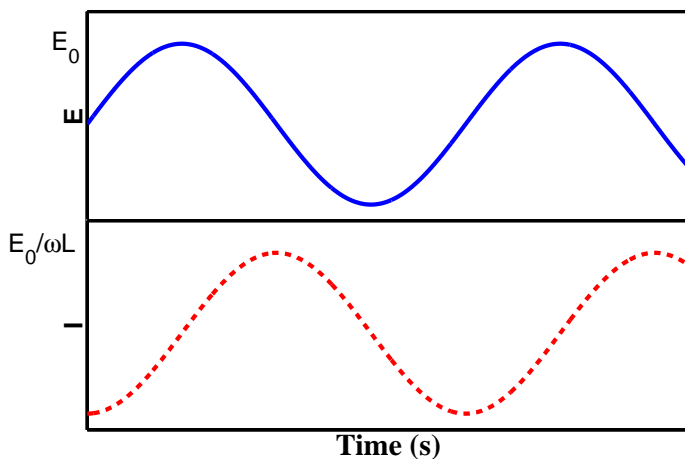
$$\Rightarrow I = \int \frac{E}{L} dt = \frac{E_0}{L} \int \sin(\omega t) dt = -\frac{E_0}{L} \frac{\cos(\omega t)}{\omega}$$



där $\cos(\omega t) = -\sin(\omega t - \pi/2)$, och vi får att strömmen är $\pi/2$ eller 90° **efter** spänningen

$$I = \frac{E_0}{\omega L} \sin(\omega t - \pi/2) = \frac{E_0}{X_L} \sin(\omega t - \pi/2) \quad (23)$$

där $X_L = \omega L$ kallas för **reaktansen** för spolen och motsvarar motståndet R .



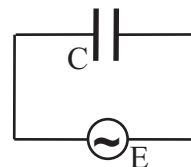
Fasdiagram för ström och spänning, där strömmen är $\pi/2$ **efter** spänningen.

2.3 Kondensator i en växelströmskrets

Vid likström går ingen ström genom en kondensator! Vid växelström laddas och urladdas kondensatorn så att ström 'passerar' den. Vi har att

$$q = CE = CE_0 \sin(\omega t)$$

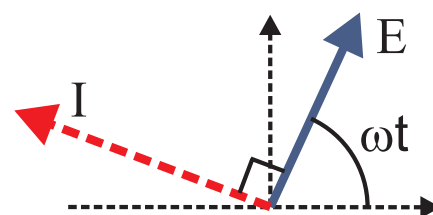
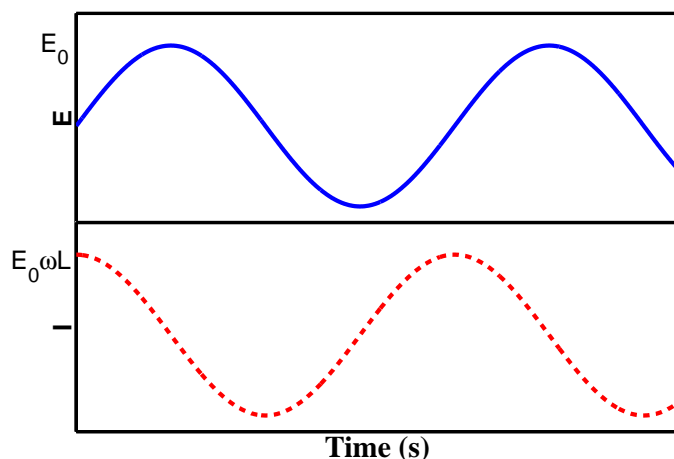
$$I = \frac{dq}{dt} = \omega CE_0 \cos(\omega t)$$



där $\cos(\omega t) = \sin(\omega t + \pi/2)$, och vi får att strömmen är $\pi/2$ eller 90° **före** spänningen

$$I = E_0 C \omega \sin(\omega t + \pi/2) = \frac{E_0}{X_C} \sin(\omega t + \pi/2) \quad (24)$$

där: $X_C = \frac{1}{\omega C}$ är kondensatorns **reaktans**.



Fasdiagram för ström och spänning, där strömmen är $\pi/2$ **före** spänningen.

Kortare kan man sammanfatta de tre exempel ovan som att ifall vi har en vaxelström $E = E_0 \sin(\omega t)$ i en krets med ett motstånd, en spole eller en kondensator, blir strömmen i kretsen

$$I = \frac{E_0}{|Z|} \sin(\omega t + \phi) \quad (25)$$

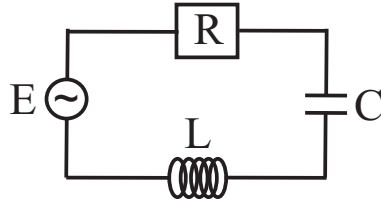
där $|Z|$ och ϕ fås från tabellen nedan

Tabell 1: Impedansen och fasvinkeln för R, L eller C i en växelströmskrets

Komponent i kretsen	Impedans Z	Fasvinkeln ϕ
Motstånd	R	0
Spole	$X_L = \omega L$	$-\pi/2$
Kondensator	$X_C = 1/\omega C$	$\pi/2$

2.4 RCL-seriekrets

I föregående delkapitel, såg vi hur R, C och L-komponenterna fungerar enskilt i en växelströmskrets. Nu sätter vi alla dessa i serie



Växelspänningen från spänningskällan är

$$E = E_o \sin(\omega t)$$

Strömmen skriver vi som

$$I = I_o \sin(\omega t + \phi)$$

där koefficienterna I_o och ϕ måste bestämmas. Kirchhoffs andra lag ger att

$$RI + \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = E_o \sin(\omega t) \quad (26)$$

Kondensatorns och spolens ekvationer blir

$$\text{Kondensatorn : } q = \int I dt = -\frac{I_o}{\omega} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\text{Spolen : } \frac{dI}{dt} = I_o \omega \cos(\omega t + \phi)$$

Dessa insätts i ekvation (26) vilket ger

$$I_o \left[R \sin(\omega t + \phi) + \cos(\omega t + \phi) \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] = E_o \sin(\omega t) \quad (27)$$

eller kortare (se tabell 1)

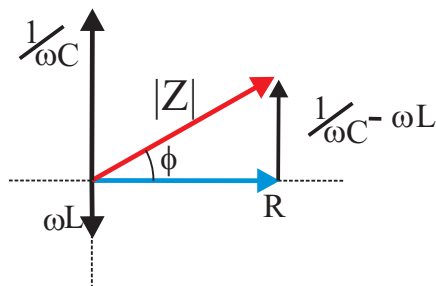
$$I_o [R \sin(\omega t + \phi) + \cos(\omega t + \phi) (X_L - X_C)] = E_o \sin(\omega t) \quad (28)$$

Denna ekvation måste stämma för alla tider t :

1) $\omega t = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow R \sin(\phi) + \cos(\phi) (X_L - X_C) &= 0 \\ \Rightarrow \tan(\phi) &= \frac{X_C - X_L}{R} \end{aligned}$$

Vi ser att strömmen inte är i fas med spänningen, utan att vinkeln mellan dem är ϕ



I bilden ovan har vi ritat situationen där $\omega t = 0$. Vi definierar nu **impedansen** för kretsen som en vektor

$$\mathbf{Z} = R + i(1/\omega C - \omega L) \quad (29)$$

som består av en vektor R i reella riktningen och vektorn: $(1/\omega C - \omega L)$ i imaginära riktningen. Längden av \mathbf{Z} eller bara kallad impedansen är

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2} \quad (30)$$

vilket ger den totala effektiva resistansen för kretsen, och har samma enhet som motstånd Ω . Vidare ser vi från figuren att de följande likheterna gäller:

$$\sin(\phi) = \frac{1/\omega C - \omega L}{|Z|} = \frac{X_C - X_L}{|Z|} \quad (31)$$

$$\cos(\phi) = \frac{R}{|Z|} \quad (32)$$

2) Nu väljer vi att titta på Ekv. (28) vid $\omega t = \pi/2$, där $\sin(\omega t) = 1$:

$$I_o \left[R \sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)(X_L - X_C) \right] = E_o$$

Vi använder likheterna: $\sin(\frac{\pi}{2} + \phi) = \cos(\phi)$ och $\cos(\frac{\pi}{2} + \phi) = \sin(-\phi) = -\sin(\phi)$ vilket ger:

$$I_o = \frac{E_o}{[R \cos(\phi) + (X_C - X_L) \sin(\phi)]}$$

Insättning av ekvationerna (31) och (32) ger strömmens maximivärde

$$I_o = \frac{E_o}{\left[R \frac{R}{|Z|} + (X_C - X_L) \frac{X_C - X_L}{|Z|} \right]} = \frac{E_o Z}{[R^2 + (X_C - X_L)^2]} = \frac{E_o}{|Z|}$$

Vi sammanfattar de viktigaste ekvationerna: Ifall spänningen i en **RCL-krets** ges av

$$E = E_o \sin(\omega t) \quad (33)$$

kan strömmen i kretsen skrivas som

$$I = I_o \sin(\omega t + \phi) \quad (34)$$

där **fasvinkeln** ϕ mellan strömmen och spänningen är

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{X_C - X_L}{R} \right) \quad (35)$$

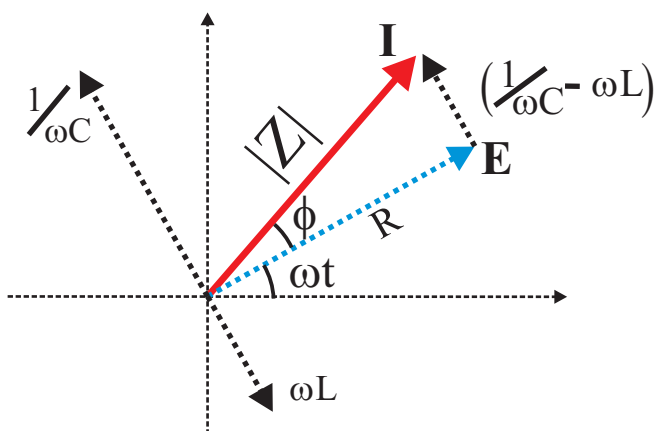
och **Strömmens maximivärde** ges av

$$I_o = \frac{E_o}{Z} \quad (36)$$

där **impedansen** för kretsen motsvarande dess effektiva motstånd är

$$Z = \sqrt{R^2 + [X_C - X_L]^2} \quad (37)$$

Nedan i figuren, kan man se hur storheterna kan ges grafiskt.



2.5 Resonans för RCL-kretsar

I föregående kapitel fick vi strömmen i en RCL-krets som

$$I = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + [X_C - X_L]^2}} \sin(\omega t + \phi)$$

Vi ser att strömmen har ett maximum där $[X_C - X_L]^2 = 0$. Vi har alltså resonans när $1/\omega C - \omega L = 0$

$$\Rightarrow \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (38)$$

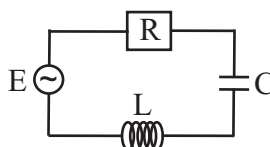
vilket kallas för **resonansfrekvens** och är oberoende av värdet R . Vid resonansfrekvensen är strömmen i fas med spänningen

$$I_{res} = \frac{E_0}{R} \sin(\omega_0 t) \quad (39)$$

Ju mindre R är, så ju större är resonansströmmen. Det är just denna stora förstärkning av signalen vid en viss frekvens som gör att man kan höra en radiostation. Antennen i en radio tar emot alla sändningar, men en kanal väljs genom att ställa in värdet på kondensatorn i radion så att RCL-kretsens resonansfrekvens sammanfaller med den frekvens man vill höra.

Exempel: RCL-kretsens värden är:

- $E_0 = 1 \text{ V}$
- $R = 1 \text{ } \Omega$
- $C = 4 \times 10^{-3} \text{ F}$
- $L = 1 \times 10^{-3} \text{ H}$

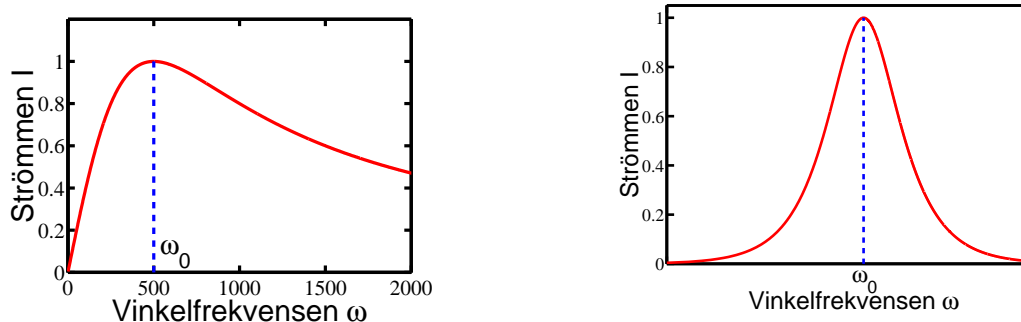


Beräkna resonansfrekvensen och rita strömmen, fasvinkeln ϕ , impedansen Z och spolens och kondensatorns reaktanser: X_L och X_C som funktion av spänningens vinkelfrekvens ω .

Vinkelfrekvensen där resonans sker är:

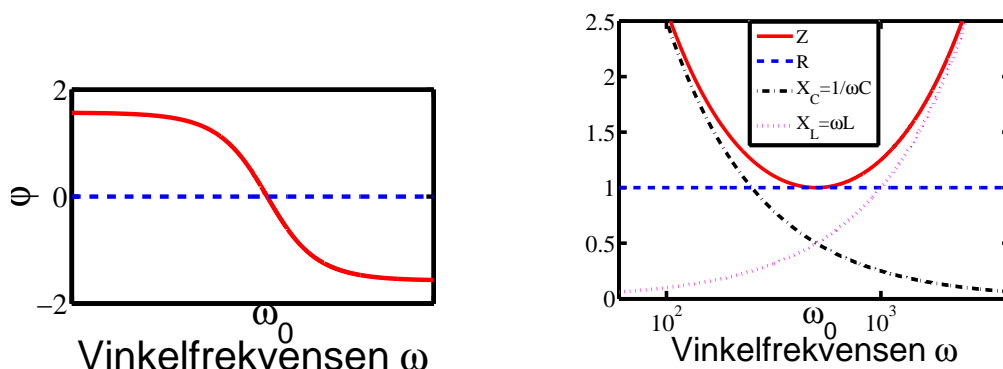
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \approx 500 \text{ rad/s} \quad (f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 80 \text{ Hz})$$

Strömmen som funktion av vinkelfrekvensen ges av de två bilderna nedan. Den vänstra bildens x-axel är lineärt ritad, i motsats till den högra, där x-axeln är logaritmisk.



Den vänstra bilden nedan ger fasvinkeln ϕ som en funktion av vinkelfrekvensen. Vi ser att Strömmen är i fas med spänningen vid resonansfrekvensen. Vid låga frekvenser dominerar kondensatorns reaktans: $X_C = 1/\omega C$ och strömmen är $\pi/2$ rad före spänningen. Vid höga frekvenser där kondensatorns reaktans helt domineras av spolens ($X_L = \omega L$), är strömmen $\pi/2$ rad efter spänningen.

Bilden till höger avbildar impedansen Z och spolens och kondensatorns reaktanser: X_L och X_C som funktion av spänningens vinkelfrekvens ω . Vid låga frekvenser dominerar kondensatorns reaktans: $X_C = 1/\omega C$, som sedan avtar snabbt vid höga frekvenser, där spolens reaktans ökar: $X_L = \omega L$. Vid resonans är kretsens impedans lika med resistansen i kretsen: $Z = R$.



2.6 Effektförbrukningen i en RCL-krets

Elektriska medeleffekten som en RCL-krets förbrukar definieras som

$$\begin{aligned}
 \langle P \rangle &= \langle EI \rangle = \langle E_o \sin(\omega t) I_o \sin(\omega t + \phi) \rangle \\
 &= E_o I_o \langle \sin(\omega t) \sin(\omega t + \phi) \rangle \\
 &= E_o I_o \langle \sin(\omega t) [\sin(\omega t) \cos(\phi) + \cos(\omega t) \sin(\phi)] \rangle \\
 &= E_o I_o \cos(\phi) \langle \sin^2(\omega t) \rangle + E_o I_o \sin(\phi) \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle \\
 &= \frac{E_o I_o}{2} \cos(\phi) = \frac{E_o}{\sqrt{2}} \frac{I_o}{\sqrt{2}} \cos(\phi) \\
 &= E_{rms} I_{rms} \cos(\phi)
 \end{aligned} \tag{40}$$

där likheterna: $\sin(\omega t + \phi) = \sin(\omega t) \cos(\phi) + \cos(\omega t) \sin(\phi)$ och $\cos(\omega t) \sin(\omega t) = \frac{1}{2} \sin(2\omega t)$ har använts, och rms ger root-mean-square värdet, se ekv. (20).

Exempel: En spole har impedansen 30Ω vid frekvensen 100 Hz och impedansen 60Ω vid 500 Hz .

- a) Beräkna spolens induktans och resistans
 b) Beräkna fasvinkeln mellan spänningen och strömmen vid vardera frekvensen

a)

Impedansen är

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

vilket ger ekvationerna vid vardera frekvensen

$$\begin{aligned} R^2 &= Z_1^2 - \omega_1^2 \cdot L^2 \\ R^2 &= Z_2^2 - \omega_2^2 \cdot L^2 \end{aligned}$$

(41)

Vi löser ut induktansen L

$$\begin{aligned} Z_1^2 - \omega_1^2 \cdot L^2 &= Z_2^2 - \omega_2^2 \cdot L^2 \\ \Rightarrow L^2(\omega_2^2 - \omega_1^2) &= Z_2^2 - Z_1^2 \\ \Rightarrow L &= \sqrt{\frac{Z_2^2 - Z_1^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Z_2^2 - Z_1^2}{f_2^2 - f_1^2}} \\ L &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{60^2 - 30^2}{500^2 - 100^2}} \approx \underline{17 \text{ mH}} \end{aligned}$$

Resistansen för spolen blir

$$R = \sqrt{Z_1^2 - (2\pi f_1)^2 L^2} \approx 28.06 \Omega \approx \underline{28 \Omega}$$

b)

Fasvinkeln mellan spänningen och strömmen ges av

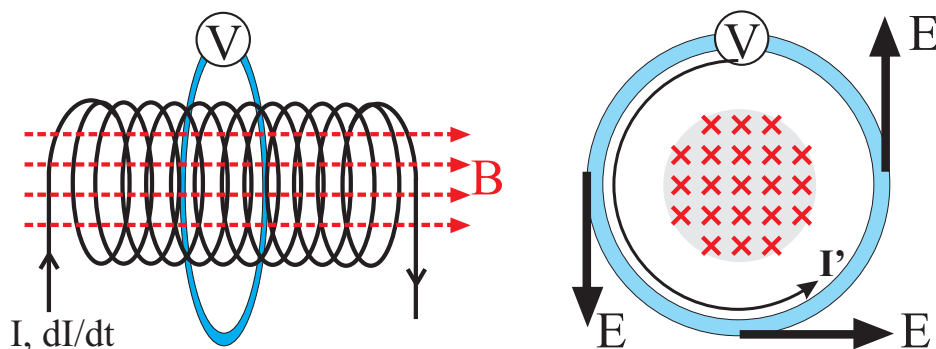
$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-\omega L}{R} \right)$$

Vilket ger för de båda fallen att spänningen är före strömmen

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \tan^{-1} \left(\frac{-2\pi f_1 L}{R} \right) \approx \underline{-21^\circ} \\ \phi_2 &= \tan^{-1} \left(\frac{-2\pi f_2 L}{R} \right) \approx \underline{-61^\circ} \end{aligned}$$

2.7 Inducerade elektriska fältet

Vi har lärt oss att när en ledare rör sig i ett magnetfält, så induceras en spänning mellan ändorna p.g.a. den magnetiska kraften på laddningarna. Ifall ledaren står stilla, så induceras ändå en spänning ifall det magnetiska flödet ändras. Vad är det nu som får laddningarna att flytta på sig i ledaren? I bilden nedan har vi en solenoid (arean A och n_L varv per längd) genom vilken strömmen ökar med hastigheten $d\Phi_M/dt$. Runt solenoiden finns en rund krets med en spänningsmätare.



Magnetfältet in i solenoiden fick vi tidigare som: $B = \mu_0 n_L I$, så att det magnetiska flödet genom runda kretsen blir

$$E_{ind} = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -\mu_0 n_L A \frac{dI}{dt} \quad (42)$$

Den inducerade strömmen är $I' = E_{ind}/R$, där R är kretsens resistans. Kraften som får laddningarna att röra på sig i kretsen är ett **inducerat elektriskt fält** från det magnetiska flödet som förändras med tiden. Vidare, så måste det inducerade fältet vara **icke konservativt**, eftersom när en laddning q går runt kretsen, så måste elfältet gånger laddningen vara lika med den inducerade spänningen

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_{ind} \quad (43)$$

Tankenöt: Skulle ett inducerat elfält finnas runt solenoiden ifall den inte omges av kretsen?

Jo, det skulle det. Det inducerade elfältet som den magnetiska flödesförändringen i solenoiden fått till stånd finns runt solenoiden oberoende om vi har en krets runt den eller inte.

I *elektromagnetismens grunder I* definierades spänningen för ett konstant elfält \mathbf{E} längs en sträcka $\Delta\mathbf{l}$ som: $V = \mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{l}$. Ifall elfältet inte är konstant, blir spänningen integralen: $V = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$. Det elektriska fältet är konservativt, eftersom vilken sluten integral som helst blir alltid noll

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (44)$$

Detta utnyttjas i bl.a. Kirchhoffs andra lag som ger att spännings- eller potentialskillnaden runt en sluten krets är alltid noll: $\sum_i E_i = 0$. Då Ekvationerna (42) of (43) förenas ser vi att det inducerade elektriska fältet inte är konservativt

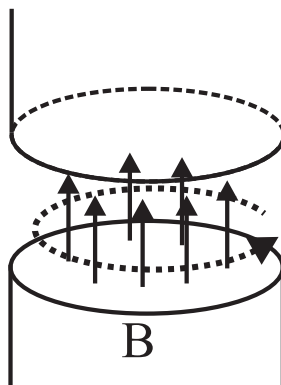
$$E_{ind} = -\frac{d\Phi_M}{dt} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \neq 0 \quad (45)$$

Den viktiga sammanfattning blir: **Ett föränderligt magnetfält inducerar ett elektriskt fält i rummen**

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -\iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (46)$$

där \iint berättar att man integrerar den magnetiska flödesdensiteten \mathbf{B} över en sluten yta. $d\mathbf{A}$ betecknar areaelementet.

Exempel: En cyklotronmagnet består av två cirkulära polytor med radien 50 cm. När magneten sätts på, ökar strömmen lineärt under 2 s tills fältet når toppvärdet 2 T. Under denna tid existerar ett inducerat elektriskt fält. **a)** Beräkna elfältet som en funktion av dB/dt på avståndet r från magnetens mitt. **b)** Beräkna elfältet för $r = 40$ cm. **c)** Upprepa **a**-fallet för r större än magnetens radie R



a)

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

Det inducerade elektriska fältet är konstant runt hela ringen

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= |\mathbf{E}| 2\pi r \\ \Rightarrow |\mathbf{E}| &= -\frac{\pi r^2}{2\pi r} \frac{dB}{dt} = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \end{aligned}$$

b)

$$\frac{dB}{dt} = \frac{(2 - 0) T}{2 s} = 1 T/s$$

vilket ger det inducerade elfältet

$$|\mathbf{E}| = -\frac{0.4 \text{ m}}{2} 1 T/s = \underline{-0.2 \text{ V/m}}$$

c) $r > R$

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= |\mathbf{E}| 2\pi r = -\pi R^2 \frac{dB}{dt} \\ \Rightarrow |\mathbf{E}| &= -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt} \end{aligned}$$

3 Maxwells ekvationer och elektromagnetiska vågor

I detta kapitel lär vi oss att förstå hur **elektromagnetiska** vågor (ex. ljus) kan fortplantas i vakuum och andra media. Elektromagnetiska vågor är t.ex. radiovågor, synligt ljus, röntgenstrålning och gammastrålning.

Vi har lärt oss att beräkna det elektriska fältet från stationära laddningar och det magnetiska fältet från konstanta strömmar. När sedan dessa fält blir tidsberoende, kommer de att bero av varandra; ett magnetfält som förändras inducerar ett elektriskt fält och vice versa.

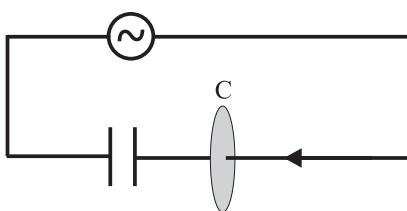
För att förstå hur dessa fält växelverkar, så sammanfattar vi de elektromagnetiska lagarna vi lärt oss hittills.

- (1) Gauss lag (elektrostatik) $\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon}$
- (2) Gauss lag (magnetism) $\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \sum_i p_i$
- (3) Amperes lag $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu I$
- (4) Faradays lag $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -\frac{d}{dt} (\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A})$

I ekvation (3), ger en ström upphov till ett magnetfält. På samma sätt borde en ström av monopoler (ifall de finns) ge upphov till ett elektriskt fält i ekvation (4), vilket ger att (3) och (4) blir

- (3) Amperes lag $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu I$
- (4) Faradays lag $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = I_M - \frac{d}{dt} (\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A})$

där $I_M = \frac{dp}{dt}$ skulle vara den magnetiska strömmen. Jämför vi nu Amperes lag. Ekv. (3) med Faradays lag Ekv. (4), ser vi att de inte är symmetriska. Betrakta bilden nedan, där till en växelströmkrets har en kondensator blivit adderat.



Vi använder Amperes lag som ger att magnetfältet runt cirkeln C med radien r , blir

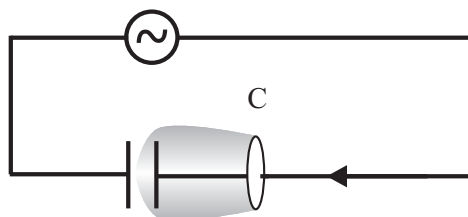
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = |\mathbf{B}|2\pi r = \mu I \quad \Rightarrow |\mathbf{B}| = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

där strömmen I kan skrivas som en areaintegral av strömdensiteten

$$I = \oiint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$$

där \mathbf{J} är strömdensiteten $[\mathbf{J}] = \text{A/m}^2$.

Nu kan vi välja att ytan istället för en platt circler dras som en påse runt kondensatorn, se bilden nedan.



I detta fall är strömmen genom påsytan ($I = \iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$) lika med noll, så att Ampères lag ger att magnetfältet runt ledningen är noll. Ett magnetfält finns dock där eftersom växelström hela tiden går i ledaren. Ampères lag Ekv. (3) är alltså otillräcklig för att beskriva situationen i detta fall. Ett tips till vad som saknas kan man få då man jämför ekvationerna (3) och (4). I Ekv. (4) ger en magnetisk flödesförändring upphov till ett elfält: $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -\frac{d}{dt} (\iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A})$
 På samma sätt kunde en elektrisk flödesförändring ge upphov till ett magnetfält. Detta är just vad som sker, så att till Ampères lag Ekv. (3) bör adderas den elektriska flödestermen

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \epsilon \frac{d}{dt} \left(\iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \right)$$

Ampères lag, som efter denna modifikation kallas **Ampere-Maxwells lag** blir

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \mu \left(I + \frac{d\Phi_E}{dt} \right) \\ &= \mu \left(I + \epsilon \frac{d}{dt} \iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \right) \\ &= \mu(I + I_D) \end{aligned}$$

där termen I_D kallas för **förskjutningsströmmen** (Eng. displacement current). Ser vi på nytt på kondensatorexemplet ovan, är det elektriska flödet vid tidpunkten t mellan kondensatorplattorna: $\Phi_E = \epsilon \iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ lika med laddningen q på plattorna enligt Gauss lag Ekv. (1). Detta ger då att förskjutningsströmmen mellan kondensatorplattorna blir just samma ström som går i ledningen: $I_D = \frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{dq}{dt} = I$.

Vi kan nu slutligen sammanfatta alla lagarna, kallade **Maxwells lagar** följande:

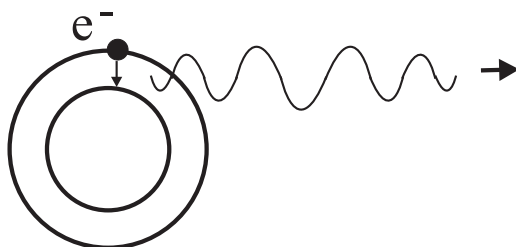
- (1) Gauss lag (elektrostatik) $\iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon}$
- (2) Gauss lag (magnetism) $\iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$
- (3) Ampere-Maxwells lag $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu \left(I + \epsilon \frac{d}{dt} \iint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \right)$
- (4) Faradays lag $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$

där vi lämnat bort termerna som de fria magnetiska monopolen skulle ge upphov till ifall de skulle finnas.

Från dessa lagar ser vi att en laddning i vila producerar ett elfält omkring sig men inget magnetfält. En laddning i rörelse ger upphov till både ett elektriskt och magnetiskt fält. För att producera **elektromagnetiska vågor**, måste en laddning vara i **accelererad rörelse**. Faktiskt är det så att en accelererande

laddning alltid strålar ut elektromagnetiska vågor, vilka är magnetiska och elektriska störningar som fortplantas i ett icke ledande medium.

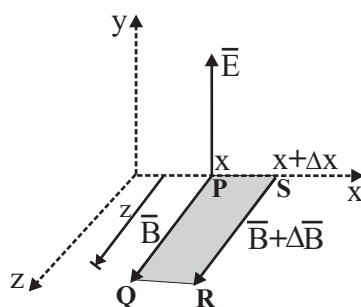
I figuren nedan ser vi en schematisk bild av hur en elektron sänder iväg en elektromagnetisk störning (foton) då den 'faller' från en högre energibana till en lägre.



Vi skall nu härleda den elektromagnetiska vågekvationen med hjälp av Maxwells lagar. I den elektromagnetiska vågen finns inga källor: $I = 0$ och $q = 0$. så ekvationerna (3) och (4) blir

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu\epsilon \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (47)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_M}{dt} \quad (48)$$



Vi betraktar figuren ovan, där vi har ett elfält i y-riktningen och ett magnetfält i z-riktningen. Magnetfältet ändras från plats x till $x + \Delta x$ från B till $B + \Delta B$. Vi använder nu ekv. (47)

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_P^Q \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_Q^R \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_R^S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_S^P \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (49)$$

$$= Bz - z(B + \Delta B) = -z\Delta B \quad (50)$$

Detta skall vara lika med tidsförändringen av det elektriska flödet i samma ekvation

$$\mu\epsilon \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu\epsilon \frac{d(\mathbf{E} \cdot \mathbf{A})}{dt} = \mu\epsilon A \frac{dE}{dt} = \mu\epsilon \Delta x z \frac{dE}{dt}$$

vilket ger

$$-z\Delta B = \mu\epsilon \Delta x z \frac{dE}{dt} \Rightarrow \frac{\delta B}{\delta x} = -\mu\epsilon \frac{\delta E}{\delta t} \quad (51)$$

Likadant, genom att använda Ekv. (48) får vi

$$\frac{\delta E}{\delta x} = -\frac{\delta B}{\delta t} \quad (52)$$

Vi multiplicerar Ekv. (51) med $\delta/\delta x$ och Ekv. (52) med $\delta/\delta t$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta x} \frac{\delta B}{\delta x} &= -\mu\epsilon \frac{\delta}{\delta x} \frac{\delta E}{\delta t} \\ \frac{\delta}{\delta t} \frac{\delta E}{\delta x} &= -\frac{\delta}{\delta t} \frac{\delta B}{\delta t} \end{aligned}$$

Vilket ger

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 B}{\delta x^2} &= -\mu\epsilon \frac{\delta}{\delta x} \frac{\delta E}{\delta t} \\ \frac{\delta}{\delta t} \frac{\delta E}{\delta x} &= -\frac{\delta^2 B}{\delta t^2} \end{aligned}$$

Vi sätter ihop dessa ekvationer för att få den **endimensionella vågekvationen** för magnetfältet

$$\frac{\delta^2 B}{\delta t^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\delta^2 B}{\delta x^2} \quad (53)$$

där $\frac{1}{\mu\epsilon} = v^2$, vilket ger hastigheten i x-riktningen för den **transversella** magnetiska vågen

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \lambda f \quad (54)$$

där λ är **våglängden** och f är **frekvensen** för vågen. I vakuum blir denna hastighet

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = 299792458 \text{ m/s} \approx 3.0 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (55)$$

där c är *ljusets hastighet i vakuum*.

Elfältets vågekvation får man liknande magnetfältets, då man multiplicerar ekv. (51) med $\delta/\delta t$ och ekv. (52) med $\delta/\delta x$:

$$\frac{\delta^2 E}{\delta t^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\delta^2 E}{\delta x^2} \quad (56)$$

Vi kan alltså beskriva magnetfältet och elfältet som sinusvågor (eller cosinus) som rör sig +x riktning

$$\mathbf{E}(x, t) = \hat{j}E_0 \sin(kx - \omega t) \quad (57)$$

$$\mathbf{B}(x, t) = \hat{k}B_0 \sin(kx - \omega t) \quad (58)$$

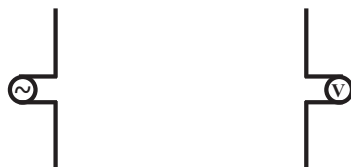
där $k = 2\pi/\lambda$ är **vågtalet** och $\omega = 2\pi f$ är **vinkelfrekvensen**. Förhållandet mellan elfältets och magnetfältets maximivärden fås då cosinusvågorna deriveras enligt Ekv. (52)

$$\begin{aligned} \frac{\delta E}{\delta x} &= -\frac{\delta B}{\delta t} \\ -|E_0|k \sin(kx - \omega t) &= -[-|B_0|(-\omega) \sin(kx - \omega t)] \\ \Rightarrow |E_0| &= \frac{\omega}{k}|B_0| = \frac{2\pi f \lambda}{2\pi}|B_0| \end{aligned}$$

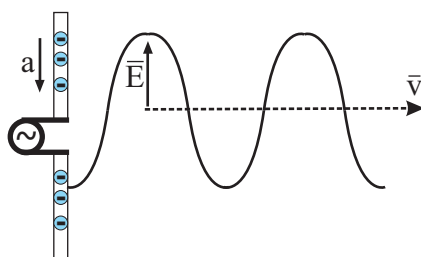
$\Rightarrow E_0 = v B_0 $	(59)
------------------------------	------

3.1 Experimentell observation av EM-vågor

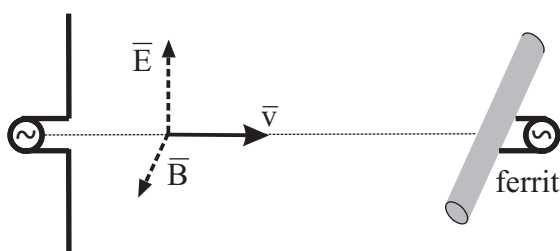
Vi sätter två ledande antenner ¹ parallellt som i figuren.



Till den vänstra antennen kopplar man en spänningskälla vars spänning ändras som en funktion av tiden som en sinusfunktion. Laddningarna i antennen oscillerar i takt med sinusspänningen. Då laddningar accelererar eller retarderar, ger de upphov till ett tidsberoende elektriskt fält, som i detta fall också är av sinusform. Detta tidsberoende elfält fortplantas i alla riktningar med elfältskomponenten lodrät, se bilden nedan.



Detta oscillerande elfält kan nu experimentellt observeras med en annan antenn. De fria laddningarna i den andra antennen börjar oscillera i takt med elfältet och producerar en spänning som kan förstärkas och signalen har nu skickats från en plats till en annan med ljusets hastighet. Vidare, har man visat experimentellt att en antenn gjord av ferrimagnetiskt material ² som är placerad vinkelrät mot både EM-vågens rörelseriktning och elfält kan också användas för att detektera det oscillerande magnetfältet i en EM-våg, se bild.



Experiment har alltså visat att elfältet och magnetfältet för en EM-våg är vinkelrät mot varandra. TV- och radio-signaler med våglängden kring 1 m skickas och mottas på detta sätt. EM-vågor, där det oscillerande elfältet (och magnetfältet) alltid är i samma riktning, kallas för **lineärpolariserat** ljus.

¹En antenn kallas en strålningskomponent som används för att sända och motta radiosignaler. För att antennen skall vara effektiv, måste den vara utformad och dimensionerad så att resonans uppnås med den radiofrekvens man vill motta eller sända.

²Ferrimagnetiskt material kallas ett magnetiskt material som inte har elektrisk ledningsförmåga och där de magnetiska momentena för atomerna i olika undergitter är motsatt riktade.

3.2 Energi och rörelsemängd för EM-vågor

Energidensiteten i ett elektriskt fält

Den totala energin som är lagrad i en kondensator finns i det elektriska fältet mellan kondensatorplattorna. Vi skall uppskatta **energidensitet**, u_E för denna. Energidensitet definierar vi här som energi per volymenhet

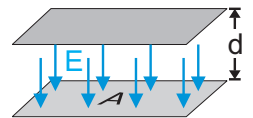
$$u = \frac{W}{V_{olym}} \quad [u] = J/m^3$$

För en kondensator, som är uppbyggd av parallella plattor, fick vi att elfältet var ungefär konstant mellan plattorna, och att kapacitansen är $\epsilon A/d$. Där A är arean och d avståndet mellan plattorna. Volymen mellan plattorna är: $V_{olym} = A \cdot d$. Energidensiteten för det elektriska fältet mellan plattorna får vi då som

$$u_E = \frac{W_E}{V_{olym}} = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{A \cdot d}$$

Storleken på elfältet får vi från potentialskillnaden mellan plattorna: $V = E \cdot d$, vilket tillsammans med ekvationen för kapacitansen $C = \epsilon A/d$ ger

$$u_E = \frac{\frac{1}{2}(\epsilon A/d)(E \cdot d)^2}{A \cdot d} = \frac{1}{2}\epsilon E^2$$



Denna ekvation ger också allmänt energidensiteten för ett elektriskt fält.

Energidensiteten i ett magnetiskt fält

Energien lagrad i ett magnetiskt fält får vi genom att betrakta en spole. Spolens induktans: $L = \mu n_l^2 l A$ ekv. (11), och den konstanta magnetiska flödesdensiteten inne i spolen: $B = n_l I \mu$ (Härleddes med hjälp av Amperes lag för en *solenoid* i EM-I). Den totala energin lagrad i spolen med strömmen I bestämdes vara:

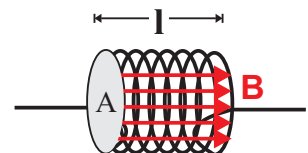
$$W_L = \frac{1}{2}LI^2$$

Denna energi är lagrad i magnetfältet som omger spolen. Detta ser vi genom att insätta spolens induktans: L och den konstanta magnetiska flödesdensiteten B in i den totala energiformeln

$$W_M = \frac{1}{2}\mu n_l^2 l A \left(\frac{B}{\mu n_l} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{l A B^2}{\mu}$$

där n_l är antalet varv per längdenhet, A arean och l är längden för spolen. Energidensiteten för ett magnetiskt fält blir

$$u_M = \frac{W_M}{V_{olym}} = \frac{\frac{1}{2} \frac{l A B^2}{\mu}}{A l} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$



Energidensiteten i en elektromagnetisk våg

De elektromagnetiska vågorna har energi både i det elektriska och magnetiska fältet. Den totala energidensiteten (energi/volym) för en elektromagnetisk våg kan skrivas i många olika former:

$$u_{EM} = \frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}[ED + HB] = \frac{1}{2}[\epsilon E^2 + B^2/\mu] \quad (60)$$

där vi använt likheterna: Elektriska flödesdensiteten $D = \epsilon E$ (E är elektriska fältstyrkan), och att: Magnetiska flödesdensiteten $B = \mu H$ (H är den magnetiska fältstyrkan).

Vidare ser vi från ekvationerna (59) [$|E| = v|B|$] och (54) [$v^2 = 1/(\mu\epsilon)$] att energin för en EM-våg är jämnt fördelat mellan el- och magnetfältet i ett icke-ledande medium:

$$\frac{u_E}{u_M} = \frac{\frac{1}{2}\epsilon E^2}{\frac{1}{2}B^2/\mu} = \frac{\mu\epsilon E^2}{B^2} = \mu\epsilon v^2 = 1 \quad (61)$$

Vi kan alltså skriva EM-vågens energidensitet som en funktion av endast det elektriska fältet

$$u_{EM} = \frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2 = \epsilon E^2 \quad (62)$$

Så vi ser att hälften av energin i en EM-våg är i magnetfältet och hälften i det elektriska fältet.

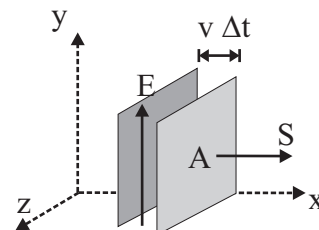
I figuren beräknar vi energin för EM-vågen i en volymenhet dV . På tiden Δt går EM-vågen en sträcka $\Delta t \cdot v$, och energin i volymen $A \cdot \Delta t \cdot v$ är:

$$\Delta W = u_{EM}\Delta V = u_{EM}(A \cdot \Delta t \cdot v)$$

Vi definierar energin som passerar genom en area A per tidsenhet att vara S , vilket blir

$$S = \frac{1}{A} \frac{\Delta W}{\Delta t} = u_{EM}v = \epsilon v E^2 = \epsilon v^2 EB = \frac{EB}{\mu} \quad (63)$$

Enheten för S är W/m^2 , och den är i x -riktning, vinkelrät mot både \mathbf{E} och \mathbf{B} . För att få med riktningen, blir S en vektor



$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (64)$$

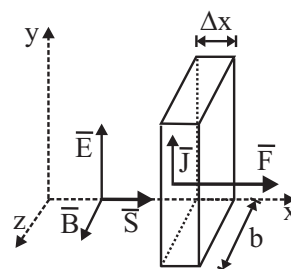
som kallas för **Poynting vektorn**. För sinusvågor, får vi att medelpoynting vektorn blir

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \langle \epsilon v E^2 \rangle = \epsilon v E_0^2 \langle \cos(kx - \omega t) \rangle = \frac{1}{2} \epsilon v E_0^2 \quad (65)$$

Rörelsemängden för en elektromagnetisk våg

Betrakta figuren, där en EM-våg träffar materia med fria elektroner. EM-vågens oscillerande elfält ger upphov till en ström i materialet: $J = \sigma E$, där J är strömdensiteten, σ konduktiviteten och E den momentana elektriska fältstyrkan för EM-vågen. Strömmen i en liten areaenhet i riktning av elfältet blir

$$I = \text{Area } J = b\Delta x J = b\sigma E\Delta x$$



Denna ström känner en kraft från magnetfältet B i EM-vågen

$$\Delta \mathbf{F}_{EM} = I\Delta \mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad |\Delta \mathbf{F}_{EM}| = ab\sigma |E||B|\Delta x$$

Observera att riktningen på denna kraft är alltid i EM-vågens rörelseriktning. Trycket på materia från en EM-våg är kraften dividerat med arean

$$|P_{EM}| = \frac{|\Delta \mathbf{F}_{EM}|}{ab} = \sigma |E||B|\Delta x \quad (66)$$

Elektromagnetiska vågor har alltså förutom energi också rörelsemängd!³

Vi antar att hela EM-vågens energi absorberas i materialet. Denna energi eller arbetet går åt att trycka in arean A en sträcka Δx

$$\Delta W = F_{EM}\Delta x = P_{EM}A\Delta x \quad (67)$$

vilket ger att trycket på materialet kan skrivas som (ΔV är volymen)

$$P_{EM} = \frac{\Delta W}{A\Delta x} = \frac{\Delta W}{\Delta V} = u_{EM}$$

Detta kan med hjälp av Ekv. (63) [$S = u_{EM}v$] skrivas som en funktion av Poynting vektorn, och vi får att **strålningstrycket** för elektromagnetiska vågor som inkommer vinkelrät och absorberas helt i materialet är

$$P_{EM} = \frac{S}{v} \quad (68)$$

Ifall EM-vågen totalreflekteras, blir strålningstrycket dubbelt större.

Division med ljusets hastighet gör att detta tryck vanligen är mycket liten: Solljusets effekt per yta eller Poynting vektorn är ca. 1 kW/m^2 , vilket motsvarar ett mycket litet tryck

$$P_{EM} = \frac{1 \times 10^3 \text{ W/m}^2}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} \approx 0.3 \times 10^{-5} \text{ Pa}$$

En $10 \times 10^{12} \text{ W/m}^2$ laserstråle med tvärsnittsytan av 1 cm^2 ger ett tryck $P_{EM} \approx 10^4 \text{ Pa} \approx 0.1 \text{ atm}$. vilket ger en ganska stor kraft: $F_{EM} \approx 10^4 \text{ Pa} \cdot 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 10 \text{ N} \approx 1 \text{ kg}$ på 1 cm^2 ytan.

³Rörelsemängden för massa i rörelse definieras som: mv . Ljuset har ingen massa, men ändå rörelsemängd.

Exempel: 6.0 km från en radiosändare är amplituden för elfältet i EM-vågen $E_0 = 0.13 \text{ V/m}$.

a) Vad är tidsmedeltalet för energiflödet?

b) Vad är den totala effekten som radiosändaren producerar?

a) Tidsmedeltalet för energiflödet ges av medelvärdet på poynting vektorn

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 = \frac{8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} \cdot 3 \times 10^8 \text{ m/s} \cdot (0.13 \text{ V/m})^2}{2} \approx 2.24 \times 10^{-5} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

b) Den totala effekten får man som arean på sfären gånger effekt/area (poynting vektorn)

$$P_{Totala} = 4\pi r^2 |\mathbf{S}| = 4\pi (6000 \text{ m})^2 \cdot 2.24 \times 10^{-5} \text{ W/m}^2 \approx 10^4 \text{ W} = 10 \text{ kW}$$

Exempel: En dammpartikel känner en kraft bort från solen p.g.a. solvinden (trycket från EM-strålningen från solen). Hur stor är denna kraft vid jordens avstånd från solen?

Totala effekten för solen	$\approx 4 \times 10^{26} \text{ W}$
Diametern för partikeln	$\approx 1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$
Avstånd Jord - Sol	$\approx 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$
Densiteten för partikeln	$\approx 1.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
Solens massa	$\approx 2 \times 10^{30} \text{ kg}$
Gravitationskonstanten G	$\approx 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

Energiflödet från solen vid jordens avstånd är

$$P_{VidJorden} = \frac{P_{Sol}}{4\pi R^2} \approx 1.4 \text{ kW/m}^2$$

Strålningstrycket från EM-vågorna från solen på dammpartikeln vid jordens avstånd från solen blir

$$P_{EM} = \frac{\langle \mathbf{S} \rangle}{c} \approx \frac{1400 \text{ W}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 1.4 \times 10^{-5} \text{ Pa}$$

Då partikelns area är $\pi(0.5 \times 10^{-6} \text{ m})^2$, blir kraften på partikel från EM-strålningen

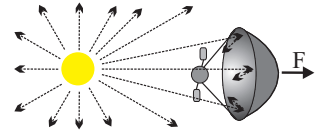
$$F_{EM} = \frac{\langle \mathbf{S} \rangle A}{c} \approx 3.7 \times 10^{-18} \text{ N}$$

Som jämförelse, är gravitationskraften mellan partikeln och solen

$$F_G = G \frac{M_{Sol} m}{R^2} = G \frac{M_{Sol} \rho V_{olym}}{R^2} \approx 4.7 \times 10^{-18} \text{ N}$$

Så vi ser att 'solvinden' kan vara starkare än gravitationen för små partiklar. Nämnas kan att kometernas svansar består av små dammpartiklar som 'blåser' bort från kometen. Dessa svansar är alltid riktade bort från solen. Faktisk kom första iden att en 'solvind' existerar från dessa kometsvansar.

Exempel: En ide för att resa i rymden har varit att man sätter en 'segel' på en rymdfarkost och låter solvinden accelerera farkosten.



En rymdfarkost med massan 10 ton befinner sig i vila vid jordens avstånd $R_J = 1.5 \times 10^{11}$ m från solen (vars massa är 2×10^{30} kg). Man vill accelerera rymdfarkosten med en segel som drivs av strålningstrycket från solen. Hur stor måste radien för en rund, masslös segel vara så att rymdfarkostens hastighet vid Plutos medelavstånd, $R_P = 5.9 \times 10^{12}$ m, från solen är $0.01c$? Solens totala strålningseffekt är 4×10^{26} W, gravitationskonstanten $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 och anta att all strålning som träffar segeln reflekteras.

Gravitationskraften på farkosten som en funktion av avståndet till solen är: $F_G = G \frac{M_{Sol}m}{r^2}$.

Vid totalreflektion är strålningstrycket från EM-vågor: $P_{EM} = \frac{2\langle S \rangle}{c}$.

Kraften p.g.a. strålningen från solen på farkosten som en funktion av avståndet till solen blir

$$F_{EM} = \frac{2 \langle S \rangle A}{c} = \frac{2A \cdot P_{Sol}}{c \cdot 4\pi r^2}$$

där A är segelns area. Den totala kraften på rymdfarkosten är

$$F_{Tot} = F_{EM} - F_G = \frac{1}{r^2} \left(\frac{2A \cdot P_{Sol}}{c \cdot 4\pi} - GM_{Sol}m \right) = K \frac{1}{r^2}$$

där alla konstanta termer beskrivs med en parameter K . Arbetet som krafterna gör på farkosten då den går från Jordens till Plutos avstånd från solen blir

$$W = \int_{R_J}^{R_P} F_{Tot}(r) dr = K \int_{R_J}^{R_P} \frac{dr}{r^2} = -K \left| \frac{1}{r} \right|_{R_J}^{R_P} = K \left[\frac{1}{R_J} - \frac{1}{R_P} \right]$$

Detta arbete går åt att ge farkosten fart: $W = mv^2/2$ vilket ger

$$\frac{2A \cdot P_{Sol}}{c \cdot 4\pi} - GM_{Sol}m = mv^2 / \left(2 \left[\frac{1}{R_J} - \frac{1}{R_P} \right] \right)$$

Vi löser ut arean A: $\frac{A \cdot P_{Sol}}{c \cdot 2\pi} = mv^2 / \left(2 \left[\frac{1}{R_J} - \frac{1}{R_P} \right] \right) + GM_{Sol}m$

$$\Rightarrow A = \frac{c \cdot 2\pi}{P_{Sol}} \left[\frac{mv^2}{2 \left[\frac{1}{R_J} - \frac{1}{R_P} \right]} + GM_{Sol}m \right] = \frac{c \cdot \pi \cdot m}{P_{Sol}} \left[\frac{v^2}{\left[\frac{1}{R_J} - \frac{1}{R_P} \right]} + 2GM_{Sol} \right]$$

Vi sätter in värdena ($v=0.01c$)

$$A = \frac{3 \times 10^8 \pi 10^4}{4 \times 10^{26}} \left[\frac{(0.01 \cdot 3 \times 10^8)^2}{\left[\frac{1}{1.5 \times 10^{11}} - \frac{1}{5.9 \times 10^{12}} \right]} + 2 \cdot 6.67 \times 10^{-11} 2 \times 10^{30} \right] \approx 3.26 \times 10^{10} \text{ m}^2$$

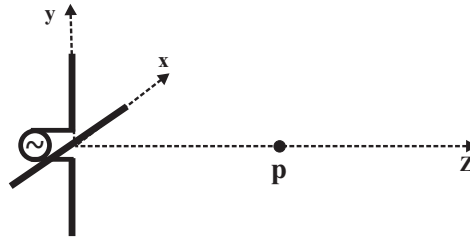
vilket ger att radien på en rund segel ($A = \pi R^2$) skulle bli

$$R = \sqrt{A/\pi} \approx 1.02 \times 10^5 \text{ m} \approx 100 \text{ km}$$

3.3 Polarisation av elektromagnetiska vågor

Elektromagnetiska vågor som emitteras från en simpel lineär antenn är lineärpolariserade, vilket betyder att EM-vågens elfältsvektor hålls i samma plan, och likaså magnetfältsvektorn.

Anta nu att istället för en lineär antenn, har vi två antenner korsade som i bilden. Antennerna får spänning från två sinusvåg-generatorer med identisk frekvens, men deras fas till varandra kan vara olika.



Vi har valt att den ena antennen är i x- och den andra i y-riktning. EM-vågen som emitteras rör sig i z-riktningen. Vi skall nu se hur elfältskomponenten för EM-vågen ser ut vid en punkt p på z-axeln.

På ett avstånd z från antennerna blir elfältet för EM-vågen summan av de enskilda komponenterna:

$$\mathbf{E} = E_1 \sin(kz - \omega t) \hat{i} + E_2 \sin(kz - \omega t + \phi) \hat{j}$$

där E_1 och E_2 är amplituden för elfältet från antenn **1**, respektive antenn **2**. Vi byter variabler för att få kortare ekvationer: $kz - \omega t = \theta$, $E_1 = a$ och $E_2 = b$. Vi tittar nu på superpositionen av elfältskomponenten i x-y-planet:

$$\begin{aligned} \Rightarrow x &= a \sin(\theta) \\ y &= b \sin(\theta + \phi) = b \sin(\theta) \cos(\phi) + b \cos(\theta) \sin(\phi) \end{aligned}$$

Eliminering av θ med hjälp av: $\sin(\theta) = x/a$ ger

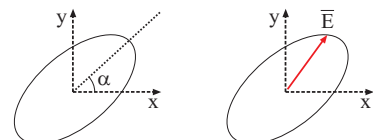
$$y - \frac{bx}{a} \cos(\phi) = b \sin(\phi) \cos(\theta) = b \sin(\phi) \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

där vi har använt likheten: $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \Rightarrow \cos(\theta) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta)}$. Vi kvadrerar båda sidorna och dividerar sedan med b^2

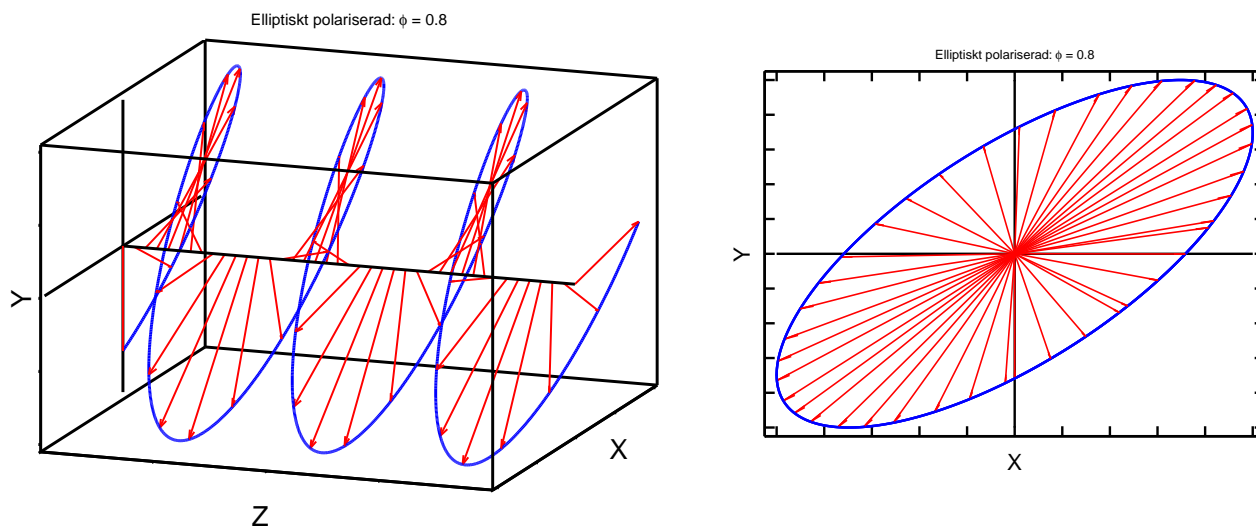
$$\begin{aligned} y^2 - \frac{2ybx}{a} \cos(\phi) + \frac{b^2 x^2 \cos^2(\phi)}{a^2} &= b^2 \sin^2(\phi) - \frac{b^2 x^2 \sin^2(\phi)}{a^2} \\ \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{yx}{ba} \cos(\phi) + \frac{x^2}{a^2} &= \sin^2(\phi) \end{aligned}$$

Ifall källorna är **koherenta** d.v.s. fasskillnaden är konstant ($\phi = \text{konstant}$) beskriver ekvationen en ellips i x-y-planet, där vinkeln mellan x-axeln och ellipsens huvudaxel är

$$\alpha = \text{atan}(b/a) = \text{atan}(E_2/E_1)$$



Vi säger att EM-vågen är **elliptiskt polariserat**, och märkbart är att elfältskomponenten aldrig är noll. Bilderna nedan, visar hur elfältskomponenten för EM-vågen rör sig i 3-D rummet.

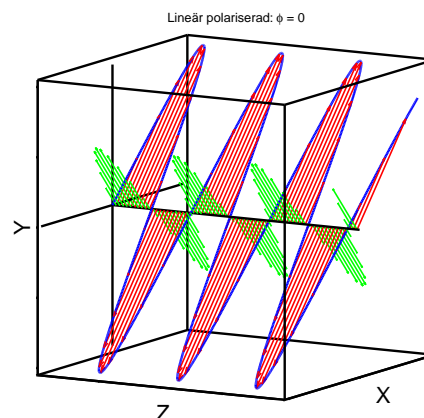


Ifall fasvinkeln $\phi = 0$, får vi

$$\frac{y^2}{b^2} - 2\frac{yx}{ba} + \frac{x^2}{a^2} = \left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{E_2}{E_1}x$$

Alltså är EM-vågen **lineärpolariserat**, där elfältskomponenten oscillerar vid en vinkel: $\alpha = \text{atan}(E_2/E_1)$ från x-axeln. I figuren bredvid, har vi ritat både elfältet (röd, snett uppåt) och magnetfältet (grön, snett åt sidan) för lineärpolariserat ljus.



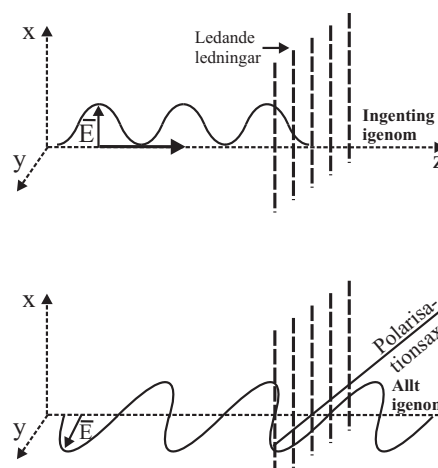
Då fasvinkeln mellan källorna är: $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$, och $E_1 = E_2 = E$, får vi **cirkulär polariserade** vågor

$$\Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y^2 + x^2 = E^2$$

vilket är cirkelns ekvation. Elfältskomponenten roterar med- eller motsols, vilket betyder att då vågen träffar materia åstadkommer den vridmoment (**EM-vågor kan ha rörelsemängdsmoment.**)

Ifall fasvinkeln mellan källorna varierar kontinuerligt, vilket är fallet då exempelvis 'antennerna' består av ett stort antal oscillerande atomer eller molekyler, kommer EM-vågorna att vara **opolariserade**, vilket exempelvis ljuset från en glödlampa är.

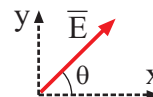
En opolariserad EM-våg kan lineärpolariseras med en polarisator. Man sätter EM-vågen att gå genom en anordning kallad **polarisator**, som består av parallella, långa och tunna, ledande trådar nära varandra. En EM-våg, vars elfälts-komponent är i x-riktning, se bild, absorberas av de fria laddningarna i polarisatorledningarna. Däremot passerar en EM-våg med elfältskomponenten i y-riktning, polarisatorn oförändrad ifall vågens våglängd λ är mycket större än polarisatorledningarnas diameter. Den riktning, där EM-vågens elfältskomponent går oförändrad genom en polarisator, kallas för **polarisationsaxel**.



Synligt ljus, $\lambda \approx 500 \text{ nm}$, behöver mycket tunna polarisationsledningar, vilket är möjligt med ett skikt av långa polymermolekyler vilka är parallella till varandra.

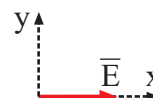
Anta nu att vi har en EM-våg, vars elfält vinkelrät till dess färdriktning i z-led ges av

$$\mathbf{E} = |E_o| \cos(\theta) \hat{i} + |E_o| \sin(\theta) \hat{j}$$



Polarisatorn absorberar elfältskomponenten i y-led ($|E_o| \sin(\theta) \hat{j} = 0$), vilket ger att vågens elfält efter att den passerat polarisatorn är

$$\mathbf{E} = |E_o| \cos(\theta) \hat{i}$$



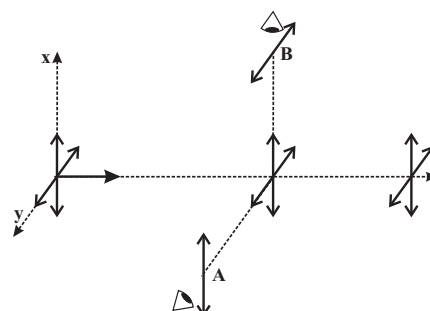
Tidigare såg vi att **intensiteten** (Poyntingvektorn) för EM-våg är proportionellt till elfältskomponenten i kvadrat, Ekv. (63): $I \propto |E_o|^2$. Intensiteten för en EM-våg efter att den passerat en polarisator ges av **Malus lag**

$$I = I_o \cos^2(\theta) \tag{69}$$

där I_o är intensiteten före polarisatorn, och θ är **polarisationsvinkeln**, vilken är vinkeln mellan EM-vågens elfältskomponent och polarisationsaxel.

I dimma eller rök kan man bra se en ljusstråle från sidan. Detta är möjligt eftersom de små vattendropparna eller rökpartiklarna sprider ljuset. EM-vågens elfält gör att laddningarna i de små partiklarna börjar oscillera, och fungera som små antenner genom att sedan stråla ut EM-vågor till sidorna. Eftersom en oscillerande laddning inte kan stråla ut vågor i oscillationsriktningen, kommer de spridda strålarna att vara delvis polariserade.

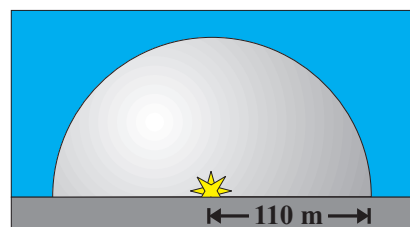
Se figuren, där en opolariserade EM-vågor går i z-riktning mot höger. Betraktar man de spridda vågorna i punkten A, är de polariserade i x-riktning. Inga komponenter i z- eller y-riktning observeras. Liknande, ser man i punkten B bara EM-vågor med elfältskomponenten i y-riktning.



För att förstå spridning av ljus bättre, skall vi kvalitativt⁴ härleda hur ljus sprids som en funktion av dess frekvens.

För att göra detta introduceras en i många områden användbar teknik kallad **dimensionsanalys** (DA). Iden är mycket simpel, man har variabler som påverkar en storhet. För att få storhetens funktion, måste enheterna i funktionen ge storhetens enhet: Du har glömt hur man beräknar sträckan, som en funktion av tid ($[t]=s$), och hastighet ($[v]=m/s$). För att få sträckans enhet $[s] = m$, måste man multiplicera hastighet med tiden, och vi får ekvationen: $s = vt$.

Exempel: Anta att man filmar en atombombssprängning som görs på markytan. Bilden nedan visar hur den halvsfäriska sprängningsfronten, radien 110 m, ser ut 15 ms efter sprängningen.



Approximera hur mycket explosionsenergi atombomben hade.

Problemet verkar vara helt omöjlig att lösa, för inte vet vi hur luften påverkas av explosionen, eller hur snabbt chockvågen breder ut sig. Vi skall nu använda dimensionsanalys, vilket Amerikanen G. I. Taylor gjorde då han till myndigheternas häpnad beräknade den frigjorda energin i en atombombsexplosion från en film gjord av explosionen.

Han gjorde de logiska antaganden att chockvågens radie, $[r]=m$, efter sprängningen beror av:

- Den frigjorda energin, $[E] = J = kg \cdot m^2/s^2$
- Tiden efter sprängningen, $[t] = s$
- Luftens densitet, $[\rho] = 1.293 kg/m^3$

vilket ger ekvationen för chockvågens radie

$$r = f(E, t, \rho) = K \cdot E^a \cdot t^b \cdot \rho^c$$

där han approximerade konstanten K från chockvågsteorin till 1. heltalen a , b och c skall vi nu bestämma via dimensionsanalys.

Tittar vi nu på ekvationen från enheterna sett, blir den

$$\begin{aligned} m &= \left(\frac{kg \cdot m^2}{s^2} \right)^a (s)^b \left(\frac{kg}{m^3} \right)^c = (kg^a \cdot kg^c)(m^{2a} \cdot m^{-3c})(s^{-2a} \cdot s^b) \\ &\Rightarrow \\ kg^0 \cdot m^1 \cdot t^0 &= kg^{a+c} \cdot m^{2a-3c} \cdot s^{b-2a} \end{aligned}$$

Vi ser nu att på vänstra sidan av funktionen har vi inga kg (kg^0), vilket funktionens högra också ger ifall likheten: $a + c = 0$ gäller. Vi får alltså att $a = -c$, vilket vi insätter i den andra termen i funktionens högra sida för att ge den rätta enheten m

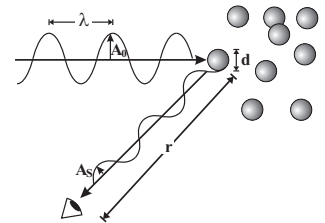
$$m^1 = m^{2a-3c} = m^{-2c-3c} = m^{-5c} \quad \Rightarrow \quad c = -1/5 \Rightarrow a = 1/5$$

⁴Med kvalitativa metoder försöker man förstå karaktären och egenskaperna för något, utan att bevisa det. Motsatsen till kvalitativ är **kvantitativ**, vilket kommer från latinets quantum eller mängd, vilket betyder att man härleder en storhet eller egenskap matematiskt.

Den sista ekvationen med tiden ger likheten: $b = 2a = 2/5$. Ekvationen för radien är alltså: $r = E^{1/5} t^{2/5} \rho^{-1/5}$, vilket ger ekvationen för den totala energin: $E^{1/5} = r \rho^{1/5} / t^{2/5}$, vilket i kortare form ger (+ insättning)

$$E \approx \frac{r^5 \rho}{t^2} \approx \frac{(110 \text{ m})^5 1.293 \text{ kg/m}^3}{(15 \times 10^{-3} \text{ s})^2} \approx 1.4 \times 10^{12} \text{ J} \quad (70)$$

Vi skall nu genom dimensionsanalys härleda hur ljus sprids som en funktion av dess frekvens (Rayleigh 1871). Vi har alltså ljus med amplituden A_o som sprids från luftens molekyler. Det spridda ljusets amplitud med avståndet r till spridningsstället betecknas med A_S , se bild.



Eftersom ljusets intensitet bestämmer hur starkt ljuset är, och ljusets intensitet är amplituden i kvadrat, vill vi nu bestämma hur den spridda ljusets amplitud $[A_S] = \text{m}$, beror av följande parametrar

- Luftpartiklarnas diameter: $[d] = \text{m}$
- Inkommande ljusets amplitud: $[A_o] = \text{m}$
- Våglängden för ljuset, $[\lambda] = \text{m}$
- Avståndet från observatören till spridningsstället: $[r] = \text{m}$

Det spridda ljusets amplitud kan nu skrivas som

$$A_S = f(d, A_o, \lambda, r) \quad (71)$$

Vi har nu ett problem som dimensionsanalysen inte kan lösa. Alla parametrars enhet är meter. För att fortsätta, använder man följande logiska och experimentellt bestämda relationer för det spridda ljusets amplitud A_S :

- Den är proportionerlig till den inkommande amplituden: $A_S \propto A_o$
- Den är inverst proportionerlig till avståndet från spridningsstället: $A_S \propto \frac{1}{r}$
- Den är proportionerlig till de spridande molekylernas volym: $A_S \propto d^3$

Dessa ger nu en ekvation som dimensionsanalys biter på:

$$A_S = K \frac{A_o d^3}{r} \lambda^a$$

där K igen är en konstant som måste bestämmas experimentellt. För att enheterna i föregående ekvation skall stämma, måste exponenten a vara -2 , vilket ger att den spridda ljusets amplitud är inverst proportionerlig till våglängden i kvadrat: $A_S \propto \lambda^{-2}$. Den spridda intensiteten som man observerar är amplituden i kvadrat, vilket slutligen ger

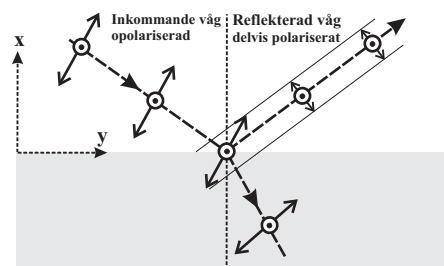
$$I_S \propto A_S^2 \propto \frac{1}{\lambda^4} \quad (72)$$

Resultatet är att ljus som har kortare våglängd sprids mycket effektivare än ljus med längre våglängd. Detta är orsaken till att himlen ser blå ut. Solljuset innehåller ljus av alla våglängder. Det blåa ljuset, med kortare våglängd sprids däremot mycket effektivare än ljusstrålar med längre våglängd, med den påföljden att den omgivande luften ser blå ut. Intensitetsförhållandet mellan det spridda blåa och röda ljuset är ca. $(700 \text{ nm}/400 \text{ nm})^4 \approx 10$, vilket betyder att det blåa ljusets intensitet är tiofaldig jämfört med det röda ljusets intensitet.

Går solljuset en lång sträcka genom jordens atmosfär, har de kortare våglängdskomponenterna i solljuset minskat, med den påföljden att vid kvällsskymningen, ser solen röd ut.

Moln innehåller stora mängder vattendroppar eller iskristaller som effektivt sprider alla våglängdskomponenter, vilket gör att molnen ser vita ut. Mjök är vit av samma orsak, där spridning av ljus sker från den stora mängden av mycket små fettdroppar.

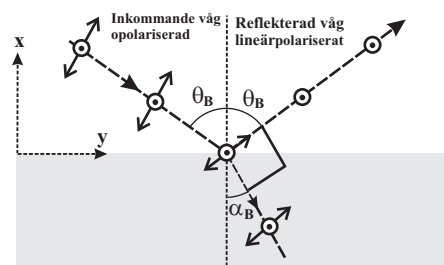
När opolariserat ljus reflekteras från en jämn yta, kommer en del av ljuset att reflekteras och en del att gå in i materialet (brytning).



Anta att ljuset som träffar en plan yta, har en elfältskomponent parallellt med ytan (går in och ut från sidan), ritad som cirklar. Den andra inkommande komponenten i x-y-planet är ritad som pilar. När detta ljus sedan träffar ytan, kommer en del av ljuset att brytas in i materialet, men en del kommer att reflekteras. Ytatomerna kommer alltså att endera oscillera parallellt med ytan (in och ut från sidan), vilket kan ge reflekterat ljus, där elfältskomponenten inte har minskat nämnvärt. Den andra elfältskomponenten i x-y-planet kan inte reflekteras effektivt, så att det reflekterade ljuset är delvis polariserat.

Bäst ser man detta då vinklarna är så att den reflekterade vågen är vinkelrät till den brutna:

$$\theta_B + \frac{\pi}{2} + \alpha_B = \pi \Rightarrow \alpha_B = -\frac{\pi}{2} + \theta_B$$



vilket enligt Snells brytningslag inträffar då ljus kommer från luft till ett material med brytningsindex n

$$\begin{aligned} 1 \sin(\theta_B) &= n \sin(\alpha_B) = n \sin(-\frac{\pi}{2} + \theta_B) = n \cos(\theta_B) \\ \Rightarrow \tan(\theta_B) &= n \end{aligned} \tag{73}$$

där θ_B kallas för Brewster vinkeln. I detta fall är elfältskomponenten i x-y-planet för det reflekterade ljuset lika med noll, och det reflekterade ljuset är lineärpolariserat.

Vi ser att då ljus reflekteras från hav och andra blanka ytor, har majoriteten av de reflekterade strålarna elfältskomponenten parallellt med jordytan. Solglasögon med polarisationsaxel vinkelrät mot jordytan, minskar effektivt den parallella komponenten av det reflekterade ljuset.