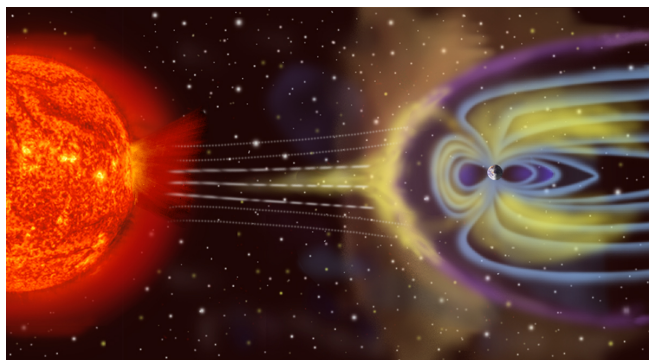


XVI. Magnetiska fält

XVI.1. Magnetism

- Magnetiska fenomen upptäcktes länge sedan och man iaktog att **permanenta magneter** attraherar eller repellerar andra magneter.
- Livet på jorden skyddas från laddade rymdpartiklar av jordens magnetfältet, vilket visuellt kan observeras i fenomenet **norrsken**.

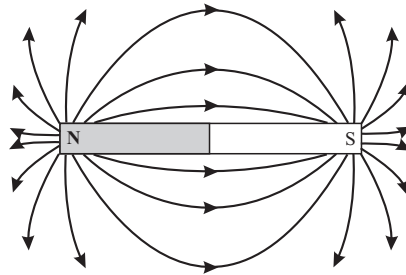


[http://en.wikipedia.org/wiki/File:Magnetosphere_rendition.jpg]

- Nuförtiden används magnetiska krafter i många olika elektriska apparater.
- Man märkte tidigt, att sätter man en bit av ämnet magnetit eller en stavmagnet att flyta på en träbit i vatten, så kommer magneten att rotera tills den är i syd-nord riktning.
- Sätter man järnspån på på en yta nära en magnet, kommer spånen att samla sig till vissa områden så att de kommer att peka mot magnetens två ändor.

- Dessa ändor, kallas för **magnetiska poler**, sydpol och nordpol.

- Nordpol, kallas den magnetiska polen, som svänger sig mot norr (nordsökande pol) i jordens magnetfält.



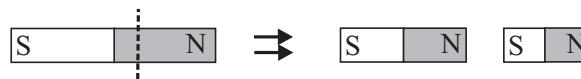
- En **magnetisk dipol** kallas en magnet, som har två poler: **nordpol** och **sydpol**.

- Inga **monopoler** har någonsin påträffats.

- Ifall man för två stavmagneter nära varandra, märker man att: **lika poler repellerar varandra** och **olika poler attraherar varandra**



- Följande exempel visar en olikhet till elektriska fält: Ifall en stavmagnet bryts av, blir båda delarna en ny stavmagnet med syd- och nord-pol.

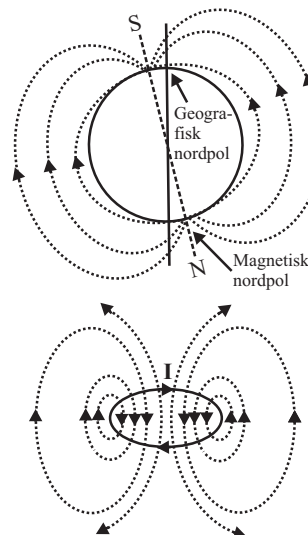


- Ett magnetiskt material är alltså analog till elfältet från en permanent polariserad isolator, som också skulle behålla sin polarisation i både delarna om den tudelas.

- Jorden är en stor magnet, med den magnetiska sydpolen nära den geografiska nordpolen och vice versa.

Det magnetiska fältet från jorden antas uppstå från metalliska magmaströmmar inne i jorden. Under tidernas lopp har magmaströmmen varit olika, vilket också betyder att det magnetiska fältet för jorden har varierat, tom. varit helt omvänt.

- Nedan ser vi det magnetiska fältet runt en strömslinga, vilket påminner om magnetfältet runt jorden.



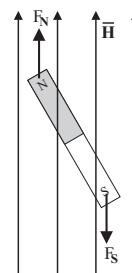
- Vinkeln mellan de magnetiska fältlinjerna och jordytans horisontella plan kallas för **inklination**.

- Magnetfältets inklination vid ekvatorn är 0° och vid polerna 90° .

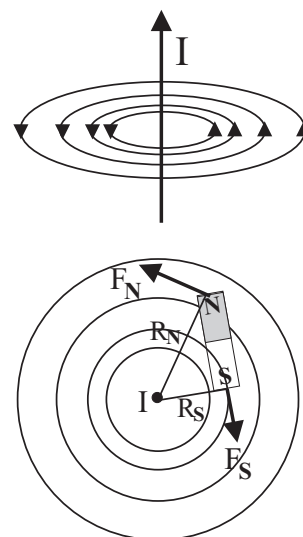
Man antar att vissa djur, exempelvis flyttfåglar kan känna både magnetfältets inklination och magnetfältets storlek. På detta sätt är det möjligt att bestämma både nord-sydlig och öst-västlig riktning!

XVI.2. Magnetiska fältstyrkan

- Sätter man en stavmagnet att flyta på en trädbit i vatten, kommer magneten att rotera tills den är i syd-nord riktning.
- Runt magneten finns ett magnetfält som jorden åstadkommer, som vrider kompassnålen.
- Nordpolen av magneten känner en kraft längs med magnetfältet och sydpolen mot magnetfältet.
- Eftersom bara en vridkraft och ingen horisontell rörelse har observerats, är krafterna på syd- och nord-pol lika stora.



- Man märkte experimentellt att kring en rak ledning med strömmen I , uppstår ett magnetiskt fält.
- Man kan undersöka detta magnetfältets egenskaper genom att sätta en stavmagnet på en roterbar skiva runt ledningen, se bilden.



- Stavmagneternas poler känner en magnetisk kraft i motsatt riktning. Dessa krafter gör att skivan kommer att rotera i den riktning som har det större kraftmomentet.
- Kraftmomentet motsols är $|F_N|R_N$ och medsols $|F_S|R_S$. Det totala kraftmomentet på systemet är summan av dessa

$$M_{tot} = |F_N|R_N - |F_S|R_S$$

Hur noggranna mätningar man än gör, har man inte fått systemet att rotera. Detta betyder att de två kraftmomentena är lika $|F_N|R_N = |F_S|R_S$

$$\Rightarrow \frac{|F_N|}{|F_S|} = \frac{R_S}{R_N}$$

- Detta tyder på att den magnetiska kraften runt en lång strömbärande ledning är inverst proportionell till avståndet R från ledningen: $F = \frac{1}{R}$.

- Den magnetiska kraftens styrka runt ledning är också proportionerligt till strömmens storlek i ledningen: Ökas ledningens ström till det dubbla ($2I$), motsvaras detta av att man sätter två ledningar med vardera strömmen I bredvid varandra, och den magnetiska kraften bör vara samma i båda situationerna.
- Vi har alltså fått att den magnetiska kraften på en magnetisk pol har följande form

$$F_M = k \frac{I}{R}$$

där konstanten k måste ännu bestämmas.

- För att göra detta, tittar vi på hur mycket arbete eller energi går åt att föra en magnetisk pol runt elslingan ett varv.
- Till detta går energin

$$W = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = k \frac{I}{R} 2\pi R = 2\pi k I$$

- Konstanten k 's värde ger hur stark den magnetiska polen är, så vi definierar nu att den **magnetiska polstyrkan** för en pol i en magnet är arbetet att föra polen runt en strömslinga dividerat med strömmen

$$p = \frac{W}{I} \quad (1)$$

- Vi ser då genast att konstanten $k = p/2\pi$. Enheten för polstyrkan är: $[p] = \text{J/A} \equiv \text{Wb}$ (weber).
- Kraften på en pol kring ledningen blir slutligen

$$F_M = \frac{p}{2\pi} \frac{I}{R} \quad (2)$$

- Den **magnetiska fältstyrkan** \mathbf{H} definieras nu som den magnetiska kraften dividerat med magnetiska polstyrkan ¹

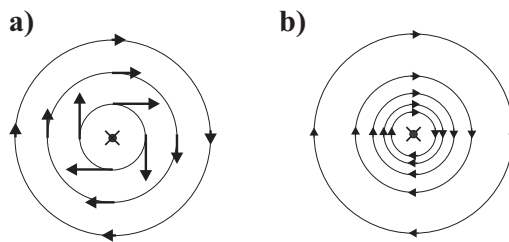
$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{F}_M}{p} \quad [\mathbf{H}] = \frac{\text{N}}{\text{Wb}} = \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (3)$$

- Den magnetiska fältstyrkan på avståndet R från en strömbärande ledning med strömmen I är

$$|\mathbf{H}| = \frac{I}{2\pi R} \quad (4)$$

¹Den elektriska fältstyrkan definierades liknande som den elektriska kraften dividerat med laddningen: $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_E}{Q}$

- De magnetiska fältlinjerna runt ledningen bildar slutna cirklar.
- Detta avbildas vanligen på två olika sätt se **a)** och **b)**, där strömmen är in i pappret.
- I fallet **a)** ser vi att storleken på magnetfältet halveras ifall avståndet fördubblas.
- I fallet **b)** ritas man de magnetiska fältlinjerna tätare där det magnetiska fältet är större.



XVI.3. Amperes Lag

- Arbetet eller energin som går åt att föra en magnetisk pol runt en strömbärande ledning ett varv bestämdes vara

$$W = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi kI = p I$$

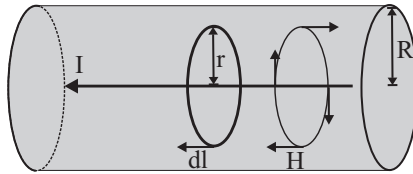
- Detta arbete är oberoende av avståndet till ledningen, vilket fick André Marie Ampère att föreslå att arbetet att föra en magnetisk pol runt en strömbärande ledning ett varv är oberoende av vägen, så länge man hamnar på samma ställe tillbaka.
- Insätter man i föregående ekvation att kraften är lika med magnetiska polen gånger magnetiska fältstyrkan: $\mathbf{F} = \mathbf{H}p$, får vi **Amperes lag**

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{summa}} \quad (5)$$

- Denna ekvation, som liknar *Gauss lag* för elektriska fält, säger att integralen av magnetfältet runt en sluten krets är detsamma som totala strömmen genom kretsen.

Exempel:

Vi har en strömbärande cylindrisk ledare med radien R i vilket går en homogen ström I . Vad är det magnetiska fältet som en funktion av avståndet r från cylinderns mitt?



Strömdensiteten $J = I/\text{Area} = I/(\pi R^2)$ är konstant. In i cylindern är totala strömmen beroende av area som strömmen går igenom. Utanför cylindern är totala strömmen hela tiden I . Vi har alltså två möjligheter: **a)** $r \leq R$ och **b)** $r > R$.

a) $r \leq R$

Inne i ledaren ger strömmen upphov till magnetfält i cirklar som ritats i figuren. Detta magnetfält är alltid parallellt med $d\mathbf{l}$ så att punktprodukten $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H dl \cos(\theta) = H dl$. Så vi får att integralen av magnetfältet runt den slutna cirkeln blir

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = |H| \oint dl = |H| 2\pi r \quad (6)$$

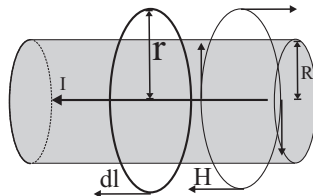
Denna integral måste vara samma som strömmen genom den slutna cirkelns area

$$|H| 2\pi r = J \pi r^2 = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 = \frac{I}{R^2} r^2$$

vilket ger storleken på den magnetiska fältstyrkan som en funktion av avståndet r från cylinderns mitt då $r \leq R$

$$|H| = \frac{I}{2\pi R^2} r$$

b) $r > R$

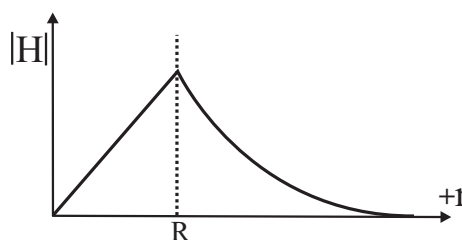


Integralen blir samma som i fall **a)** Ekv. (6), men nu är strömmen genom den slutna cirkelns area hela tiden I , så att storleken på magnetfältet som en funktion av avståndet r från cylinderns mitt då $r > R$ blir

$$|H| = \frac{I}{2\pi r}$$

I bilden nedan har den magnetiska fältstyrkan ritats som en funktion av avståndet till ledningens mitt.

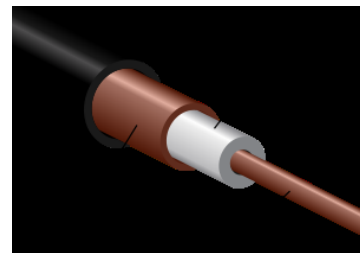
● Observera att vid avståndet $r = R$ ger **a)** och **b)** samma svar.



- Notera att om man har två cylindrar med ytterradier R_1 och R_2 inuti varandra med ström i motsatt riktning $\pm I$, kommer utanför den yttre kabeln $r > R_2$ totala magnetfältet att vara

$$H = \frac{I}{2\pi r} + \frac{-I}{2\pi r} = 0! \quad (7)$$

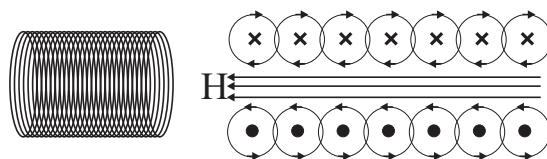
- Detta är principen bakom **koaxialkablar** ! I princip stör de inte omgivningen alls med magnetfält.



[ht

Exempel:

Beräkna den magnetiska fältstyrkan inne i en oändligt lång **solenoid** med strömmen $I = 1$ A och med 5000 varv på 10 cm.



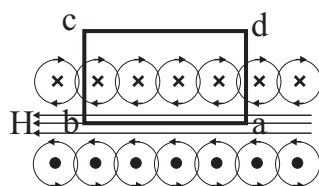
Bilden visar en del av solenoiden. Vi ser att det magnetiska fältlinjerna från ledningarna i solenoidens övre del (strömmen in i sidan) går medsols, och i solenoidens nedre del (strömmen ut från sidan) motsols.

Detta ger att fältlinjerna förstärks inne i solenoiden och tar ut varandra långt utanför solenoiden.

Först beräknar vi **antalet varv i solenoiden per längdenhet**:

$$n_l = \frac{5000 \text{ varv}}{0.1 \text{ m}} = 5 \times 10^4 \text{ varv/m} \quad (8)$$

Vi betraktar sedan figuren nedan, där en del av solenoiden är ritad



Integralen av magnetfältet runt den slutna fyrkanten blir

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H L_{ab} \cos(0) + H \cdot L_{bc} \cos(90) + 0 \cdot L_{cd} + H \cdot L_{da} \cos(90)$$

Denna integral skall vara lika med strömmen genom den slutna fyrkantens area

$$H L_{ab} = L_{ab} n_l I$$

vilket ger storleken på den magnetiska fältstyrkan inne i solenoiden

$$|H| = n_l I = 5 \times 10^4 \text{ m}^{-1} \cdot 1 \text{ A} = 5 \times 10^4 \text{ A/m}$$

Observera att den magnetiska fältstyrkan är konstant inne i solenoiden.

XVI.4. Biot-Savarts lag

- En laddning i rörelse skapar ett magnetiskt fält runt sig.
- Magnetiska fältstyrkan som laddningen q med den konstanta hastigheten v ger upphov till är

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (9)$$

- Ifall vi har en ledare med många laddningar, kan man summera alla enskilda magnetfälten.
- Betrakta en ledare med arean A och laddningsdensiteten ρ ($|\rho| = \text{C/m}^3$). Laddningen i en längd dl i ledaren är densiteten gånger volymen:

$$dQ = \rho A dl$$

- Dessa har drifhastigheten $\mathbf{v} = d\mathbf{l}/dt$ i ledaren. Detta kombinerat med Ekv. (9) ger den magnetiska fältstyrkan från en sträcka dl av ledaren:

$$|d\mathbf{H}| = \frac{1}{4\pi} \frac{dQ\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{dQ(dl/dt) \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{dQ/dt dl \times \hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2} \quad (10)$$

dQ/dt är detsamma som strömmen i ledaren, vilket ger **Biot Savarts lag**

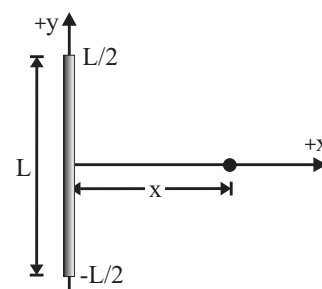
$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (11)$$

- För att få den totala magnetiska fältstyrkan en strömbärande ledare ger upphov till integreras föregående ekvation:

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (12)$$

Exempel:

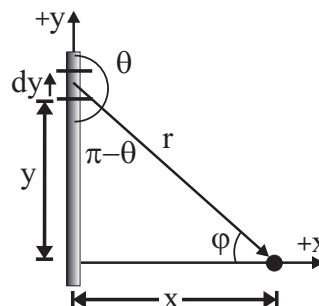
Beräkna den magnetiska fältstyrkan vinkelrät ut från mitten av en L lång ledare på avståndet x från ledaren. Strömmen i ledaren är I uppåt.



Först beräknar vi den infinitesimala fältstyrkan som dy producerar in i sidan.

Biot Savarts lag ger

$$|d\mathbf{H}| = \frac{I dy \times \hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2} = \frac{I dy \sin(\theta)}{4\pi r^2}$$



För att få den totala fältstyrkan (alla i samma riktning in i pappret) integrerar vi över hela ledaren

$$|\mathbf{H}| = \frac{I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{dy \sin(\theta)}{r^2}$$

För att underlätta integrationen, gör vi variabelbytet $dy \Rightarrow d\varphi$. Vi måste alltså uttrycka dy , $\sin(\theta)$ och r som funktion av φ .

Från bilden ser vi att: $\sin(\theta) = \sin(\pi - \theta) = \cos(\varphi)$ och att $r = x / \cos(\varphi)$. Vidare ger bilden:

$$\begin{aligned} \tan(\varphi) &= \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \\ \Rightarrow \frac{dy}{d\varphi} &= x \left(\frac{\cos(\varphi)}{\cos(\varphi)} + \frac{-1 \cdot -\sin(\varphi) \sin(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= x \left(\frac{\cos^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} + \frac{\sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} \right) = \frac{x}{\cos^2(\varphi)} \\ \Rightarrow dy &= \frac{x \cdot d\varphi}{\cos^2(\varphi)} \end{aligned}$$

Insättning av dessa ger den enkla integralen

$$\begin{aligned} |\mathbf{H}| &= \frac{I}{4\pi} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{x \cdot d\varphi \cos^2(\varphi) \cos(\varphi)}{\cos^2(\varphi) x^2} = \frac{I}{4\pi x} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \cos(\varphi) d\varphi \\ &= \frac{I}{4\pi x} \Big|_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \sin(\varphi) = \frac{I}{4\pi x} [\sin(\varphi_0) - \sin(-\varphi_0)] \\ &= \frac{I}{2\pi x} \sin(\varphi_0) = \frac{I}{2\pi x} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

Ifall ledaren är mycket lång (L och $y \gg x$), närmar sig $\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow 1$, vilket ger storleken för magnetfältet som en oändligt lång ledare producerar i en punkt på det vinkelräta avståndet x från ledaren

$$|\mathbf{H}| = \frac{I}{2\pi x}$$

vilket är givetvis samma svar som Amperes lag gav.

XVI.5. Magnetiska flödesdensiteten

- Hittills har vi beräknat den magnetiska fältstyrkan från en ström.
- Nu vill vi bestämma den magnetiska fältstyrkan från en magnetisk pol.
- Analogt till det elektriska flödet², definierar vi att det totala **magnetiska flödet** från en magnetisk pol med polstyrkan p är

$$\phi_M = p \quad [\phi_M] = [p] = \text{Wb} \quad (13)$$

- Detta är alltså det totala antalet magnetiska flödeslinjer som utgår från en magnetisk nordpol eller går in i en magnetisk sydpol.
- Tittar vi på hur stort magnetiskt flöde $\Delta\phi_M$ går genom en areaenhet ΔA , får vi vektorstorheten kallad **magnetiska flödesdensiteten**, **magnetisk induktion** eller bara **magnetfältet**

$$\mathbf{B} = \left[\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi_M}{\Delta A} \right] \hat{n} \quad [\mathbf{B}] = \text{Wb/m}^2 = \text{T (tesla)} \quad (14)$$

där riktingen är vinkelrät mot ytan ΔA . \hat{n} är en enhetsvektor vinkelrät mot ytan och i riktning av de magnetiska fältlinjerna.

²Det totala **elektriska flödet** från en punktladdning Q definieras vara samma som laddningens storlek: $\phi_E = Q$.

- I följande tabell ser vi några approximativa värden för den magnetiska flödesdensiteten i olika system.

System	Magnetfält [T]
Vid ytan av en atomkärna	10^{12}
Största i laboratoriet	10^3
Vid solytan	10^{-2}
Vid jordytan	5×10^{-5}
Radiovågor	10^{-9}
Människokroppen	10^{-10}
I ett skyddat antimagnetist rum	10^{-14}

- Från magnetiska flödesdensiteten får vi den magnetiska fältstyrkan från följande relation

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \quad (15)$$

där **permeabiliteten** μ är beroende av mediet genom vilket det magnetiska flödet går genom.

- Permeabiliteten för vakuum är $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ N/A}^2$ *per definition* och den relative permittiviteten definieras som

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (16)$$

och den magnetiska susceptibiliteten

$$\chi_m = \mu_r - 1 = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \quad (17)$$

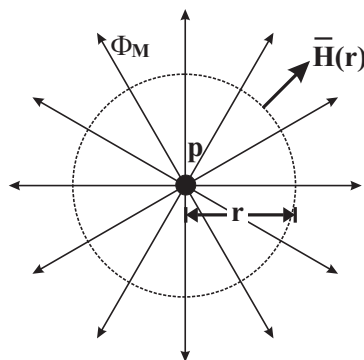
• Här är några exempelvärden (källa: Reitz-Milford-Christie s. 197). Notera att också tecknet kan variera!

System	$\chi_m \times 10^{-5}$
Aluminium	2.1
Vismut Diamant	-2.2
GdCl ₃	-603
Guld	-3.5
Silver	-2.4
Koppar	-0.98
Wolfram	7.6
CO ₂ -gas	-0.019
Kväve-gas	-0.0067
Syre-gas	1.935

• För ferromagnetiska material kan man inte definiera en entydig susceptibilitet

Exempel:

Beräkna magnetiska fältstyrkan från en magnetisk pol med styrkan p som funktion av avståndet r från polen.



Det magnetiska flödet som utgår radiellt från polen är: $\phi_M = p$. Den magnetiska flödesdensiteten på avståndet r , fås då flödet divideras med arean av sfären med radien r från polen

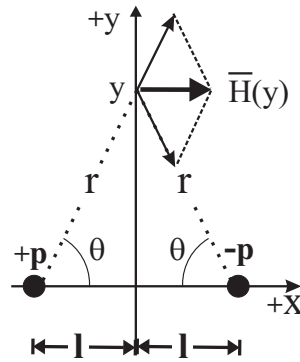
$$\mathbf{B} = \frac{\Delta \phi_M}{\Delta A} = \frac{\phi_M}{4\pi r^2} \hat{r} = \frac{p}{4\pi r^2} \hat{r}$$

Den magnetiska fältstyrkan är slutligen den magnetiska flödes-densiteten dividerat med mediets permeabilitet:

$$\mathbf{H} = \frac{p}{4\pi \mu r^2} \hat{r}$$

Exempel:

En stavmagnet med polerna på avståndet $2l$ från varandra ligger vågrät på x -axeln, med stavmagnetens centrum i origo, se bild. Beräkna den magnetiska fältstyrkan på en godtycklig punkt på y -axeln.



Den magnetiska flödesdensiteten på avståndet r från polerna blir

$$\mathbf{B} = \frac{p}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}_+ + \frac{p}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}_-$$

där $\hat{\mathbf{r}}_+$ och $\hat{\mathbf{r}}_-$ är enhetsvektorer från den magnetiska nordpol, respektive mot sydpol. Vidare ser vi från figuren att: $\hat{\mathbf{r}}_+ = \cos(\theta)\hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta)\hat{\mathbf{j}}$ och att $\hat{\mathbf{r}}_- = \cos(\theta)\hat{\mathbf{i}} - \sin(\theta)\hat{\mathbf{j}}$, vilket ger att den totala magnetiska flödesdensiteten är bara i x-riktning ($\cos(\theta) = l/r$)

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{p}{4\pi r^2} [\cos(\theta)\hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta)\hat{\mathbf{j}}] + \frac{p}{4\pi r^2} [\cos(\theta)\hat{\mathbf{i}} - \sin(\theta)\hat{\mathbf{j}}] \\ &= \frac{p}{4\pi r^2} [2 \cos(\theta)\hat{\mathbf{i}}] = \frac{p}{4\pi r^2} \frac{2l}{r} \hat{\mathbf{i}} \end{aligned}$$

Om vi vidare definierar en vektorstorhet, det **magnetiska dipolmomentet** för en magnet som

$$\mathbf{m} = \frac{2lp}{\mu} \hat{\mathbf{n}} \quad (18)$$

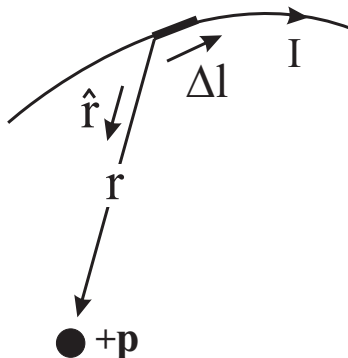
där $\hat{\mathbf{n}}$ är en enhetsvektor från den magnetiska sydpolen ($-p$) mot den magnetiska nordpolen ($+p$), får vi att den magnetiska fältstyrkan på en godtycklig punkt på y-axeln blir

$$\mathbf{H} = \frac{2pl}{4\pi\mu r^3} \hat{\mathbf{i}} = \frac{|\mathbf{m}|}{4\pi r^3} \hat{\mathbf{i}}$$

XVI.6. Magnetisk kraft på en strömbärande ledare

Vi skall nu bestämma kraften på en strömbärande ledare i ett magnetiskt fält.

- Bilden nedan visar en strömbärande ledare med längdelementet Δl på avståndet r från en magnetisk nordpol med polstyrkan p .



- Från kapitlet med Biot Savarts lag, såg vi att ett strömbärande längdelement Δl ger upphov till en magnetisk fältstyrka

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{\Delta \mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

I detta fält känner magnetiska polen kraften

$$\Delta \mathbf{F} = p \Delta \mathbf{H}$$

Enligt Newtons tredje lag, känner längdelementet Δl en lika stor kraft i motsatt riktning

$$\Delta \mathbf{F} = -p \Delta \mathbf{H} = -\frac{pI}{4\pi} \frac{\Delta \mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

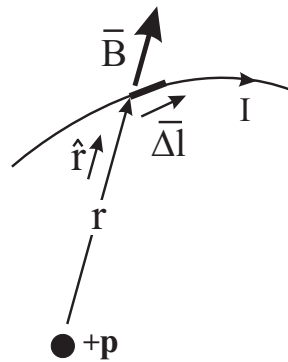
- Riktningen på denna kraft är rakt ut från pappret. Vi flyttar nu origo till den magnetiska polen p och byter riktning på vektorn r : $\mathbf{r} \Rightarrow -\mathbf{r}$. Kraftelementet på längdelementet Δl blir nu

$$\Delta \mathbf{F} = \frac{pI}{4\pi} \frac{\Delta \mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = I \Delta \mathbf{l} \times \left(\frac{p}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}} \right)$$

där termen i parentesen är den magnetiska flödesdensiteten \mathbf{B} från en magnetisk pol.

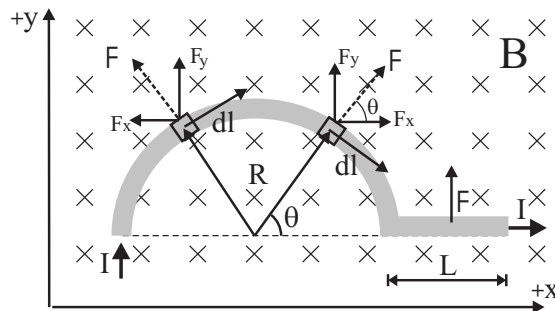
- Slutligen kan vi skriva kraften på ett strömbärande längdelement Δl i ett magnetfält \mathbf{B} som

$$\Delta \mathbf{F} = I \Delta \mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (19)$$



Exempel:

Figuren avbildar en halvcirkelformig ledare med radien R , och en rak del som har längden L i ett magnetfält \mathbf{B} in i pappret. Beräkna kraften på ledaren då det går en ström I i den.



Vi beräknar först kraften på halvcirkeln. I figuren, har vi ritat in två korta delar $d\mathbf{l}$ av halvcirkeln,

på vilka kraften $d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ verkar. Krafterna i x-riktning tar ut varandra och bara kraften i y-riktning kvarstår. Vinkeln mellan x-axeln och kraften F ges av vinkeln θ som går från 0 till π . Kraften i y-riktning på $d\mathbf{l}$ blir då

$$dF_y = |\mathbf{F}| \sin(\theta) = I |d\mathbf{l}| |\mathbf{B}| \sin(\theta) = I \cdot R d\theta \cdot B \cdot \sin(\theta) \quad (20)$$

där längden $dl = R d\theta$. Slutligen får vi den totala kraften som integralen

$$F_y = IRB \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta = 2IRB \quad (21)$$

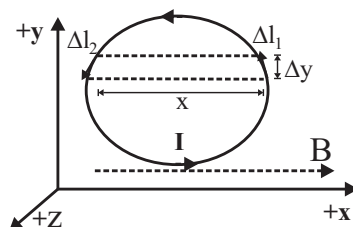
Kraften på den raka delen i y-riktning är: $F_y = ILB$. Den totala kraften, som är i y-riktningen, får vi som summan av dessa:

$$F = IB(2R + L) \quad (22)$$

Vi ser att $2R + L$ är längden av ledaren i x-riktningen!

XVI.7. Strömkrets i ett magnetfält

- För att förstå hur en elektrisk motor fungerar, skall vi betrakta kraften och vridmomentet på en strömkrets i ett magnetfält.
- I figuren ser vi en strömkrets i ett konstant magnetfält i x-axelns riktning.



Strömmen går motsols, och vi betraktar kraften på ett litet längdelement Δl

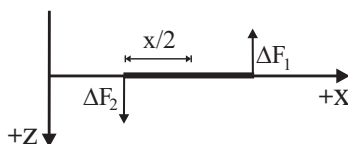
$$\Delta \mathbf{F} = I \Delta \mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

- Storleken av kraften på Δl_1 får vi då som ($\sin(\theta) = \frac{\Delta y}{\Delta l}$)

$$|F_1| = I |\Delta l_1| |\mathbf{B}| \sin(\theta) = I \Delta y B$$

där θ är vinkeln mellan $\Delta \mathbf{l}$ och x-axeln. Kraften på Δl_2 blir samma.

- Ser vi på bilden uppifrån, ser vi att vridmomenten för Δl_1 och Δl_2 är åt samma håll.



- Totala vridmomentet för det lilla segmentet blir då

$$|\Delta T| = IB \Delta y \frac{x}{2} + IB \Delta y \frac{x}{2} = IB \Delta y \cdot x$$

- För hela kretsen får vi vridmomentet genom att summera alla segmenten

$$|T| = IB \sum_{i=1}^n \Delta y \cdot x_i = IBA \quad (23)$$

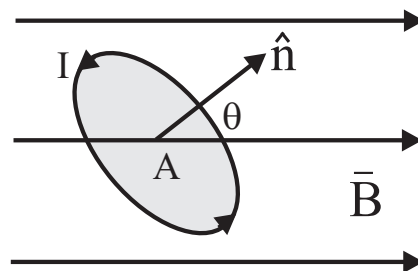
där A är arean för kretsen. Detta är bara det momentana vridmomentet då kretsen är parallellt med magnetfältet.

- Följande ekvationer ger vridmomentet på en krets som är godtyckligt orienterat i ett magnetfält.

- Figuren visar en krets med arean A i ett magnetfält. Vi definierar att \hat{n} är en enhetsvektor som är vinkelrät till arean för kretsen. Ifall vi har en vinkel θ mellan \hat{n} och magnetfältet, blir vridmomentet på kretsen

$$\begin{aligned} |\mathbf{T}| &= I A B \sin(\theta) \\ \mathbf{T} &= I A \hat{n} \times \mathbf{B} \end{aligned}$$

(24)



- Vi definierar att det **magnetiska dipolmomentet** för en sluten krets i ett plan är

$$\mu = I A \hat{n} \tag{25}$$

vilket slutligen ger vridmomentet på kretsen som

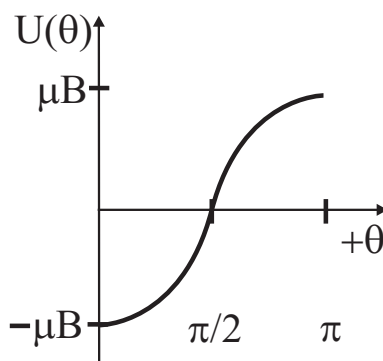
$$\mathbf{T} = \mu \times \mathbf{B} \tag{26}$$

- Vridmomentet i en sluten krets är störst när μ är vinkelrät mot magnetfältet, och noll då de är parallella.

- Så ifall det är möjligt, kommer kretsen att försöka vrida sig så att det magnetiska dipolmomentet pekar i riktning av magnetfältet.

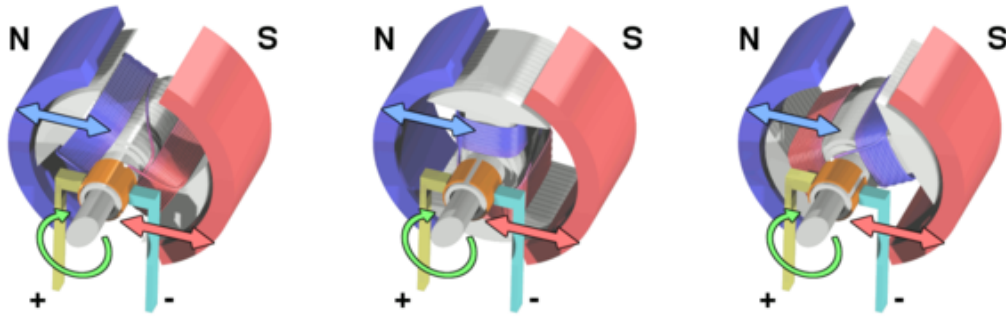
- Den **potentiella energin** för ett dipolmoment i ett magnetfält som en funktion av vinkeln mellan dipolmomentet och magnetfältet är

$$U(\theta) = \int T d\theta = \int |\mu| |B| \sin(\theta) d\theta = -|\mu| |B| \cos(\theta) = -\mu \cdot \mathbf{B} \tag{27}$$



- Detta innebär nu att systemet har ett minimi en viss riktning, så bara med dessa ekvationer åstadkommer man *inte* en elmotor, för systemet skulle bara söka sig till sitt jämviktsläge och stanna där.

- För att åstadkomma en motor med en konstant ström måste man byta på magnetsfältets riktning jämfört med I . Detta kan enklast åstadkommas med att ha en diskontinuerlig del som byter riktningen på strömmen:



[Wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Brushed_DC_electric_motor

När riktningen av fältet byts, sker en mycket snabb förändring i fältet lokalt.

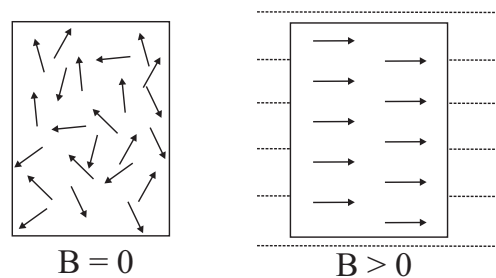
- Detta leder ofta till gnistor, och denna typ av elmotor kallas därför ofta på finska "kipinäköne" (fast officiellare namnet är "tasavirtamoottori")

XVI.8. Magnetiska material

- En magnet och en strömslinga känner en likadan kraft i ett magnetfält. Man kan inte urskilja vilkendera det är. Vanligen indelar man materialen i tre olika klasser, beroende på hur de reagerar på ett yttre magnetfält.

XVI.8.1. Paramagnetiska material

- **Paramagnetiska** material har ett stort antal små permanenta magnetiska dipoler, vilka härrör sig från elektronrörelsen och elektronernas inre dipolmoment. Dessa dipoler är normalt orienterade åt vilket håll som helst (p.g.a. värmerörelsen).
- I ett magnetfält orienterar sig dessa längs med det yttre magnetfältet (lägsta potentiala energin) och magnetfältet inne i materialet kan förstärkas märkbart.



- Magnetiska fältet inne i paramagnetiska material kan skrivas som en summa av det yttre magnetfältet och magnetfältet som induceras av de magnetiska dipolerna

$$B_{inne} = B_{yttre} + B_{magn.dipolerna}$$

- Det inducerade inre magnetfältet är proportionerligt till det yttre fältets storlek

$$B_{magn.dipolerna} = \chi_m B_{yttre} \quad (28)$$

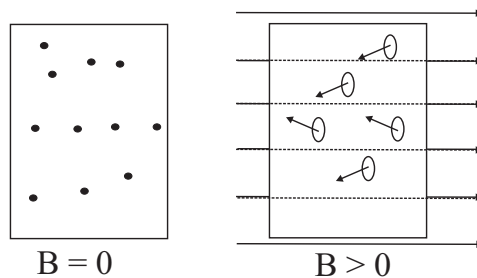
där χ_m är typiskt $\sim 10^{-4} - 10^{-5}$ för paramagnetiska material. Vi får slutligen magnetfältet inne i materialet:

$$B_{inne} = B_{yttre} + \chi_m B_{yttre} = (1 + \chi_m) B_{yttre} \quad (29)$$

XVI.8.2. Diamagnetiska material

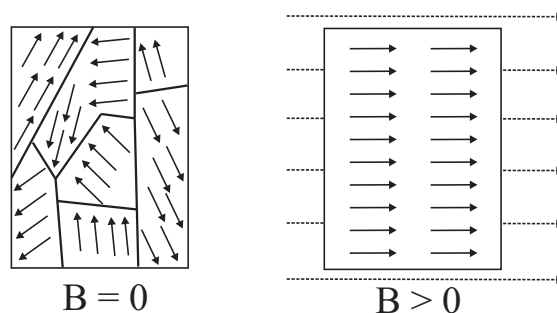
- I många atomer är elektronkonfigurationen sådan att inga permanenta magnetiska dipoler bildas.
- Det yttre fältet kan ändå inducera strömmar i materialet, så att det inducerade dipolmomentena pekar *mot* magnetfältet.

Magnetfältet försvagas därför i **diamagnetiska material**: $\chi_m < 0$.

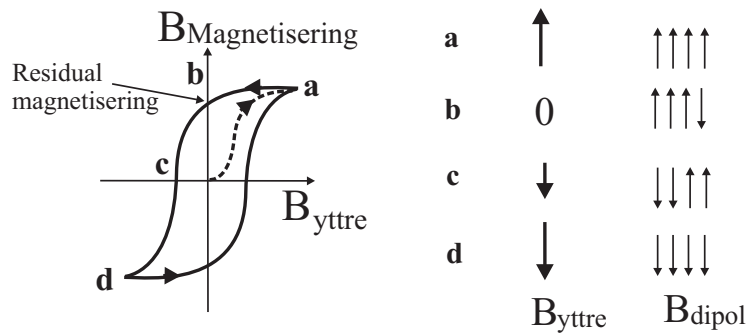


XVI.8.3. Ferromagnetiska material

- Då **ferromagnetiska material** sätts i ett magnetfält, förblir dessa magneter fastän det yttre fältet tas bort (Exempelvis: järn nickel cobolt ..).
- Denna effekt kommer från det att bredvidliggande permanenta magnetiska dipoler påverkar varandra så att den inre energin för materialet är lägre ifall dipolmomentena är parallella. Det totala magnetfältet kan öka dramatiskt $B_{ferromagn} \approx 10^3 \cdot B_{yttre}$



- Ifall materialets temperatur ökar mycket, kommer värmerörelsen att göra att dipolmomenterna inte mera är parallella, och ferromagneten har blivit paramagnetisk.
- Likadant kan paramagneter uppvisa ferromagnetiska egenskaper då de nedkyls.
- Den kritiska temperaturen kallas för **Curie-temperaturen** för detta material.
- Då det yttre magnetfältet tas bort, förblir det ferromagnetiska materialet magnetiskt.
- För att minska på det ferromagnetiska magnetfältet, måste man ha ett yttre fält i motsatt riktning. Detta kallas för **hysteresis**



- I bilden ser vi en hysteresiskurva, där magnetiseringen för det ferromagnetiska materialet ökar, när det yttre fältet ökar (sträckade linjen).
- Det yttre fältet orienterar de magnetiska dipolerna inne i materialet. Snart har alla dipolerna orienterat sig i riktning av det yttre fältet, och fastän yttre fältet ökar, ökar inte magnetiseringen mera (saturation) punkt **a**.
- Vi följer sedan hysteresiskurvan längs med pilarna.
- Nu avtar det yttre fältet, och magnetiseringen avtar något.
- Vid punkt **b** är det yttre fältet noll, men magnetiseringen håller i sig (permanent magnet).
- Efter detta svängs nu det yttre magnetfältet i motsatt riktning, och den börjar småningom svänga de mikroskopiska dipolerna med sig.
- Vid punkt **c** har det yttre fältet svängt ungefär hälften med sig, och det totala magnetiseringen är noll.

- Vid **d** har sedan magnetfältet svängt alla dipolerna åter åt samma håll (liknande som **a**).

XVI.9. Kraften på en laddning i ett magnetfält

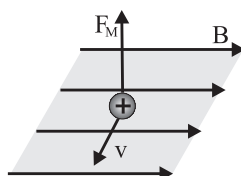
- Vi fick tidigare att kraften på ett strömbärande längdelement Δl i ett magnetfält \mathbf{B} är

$$\Delta \mathbf{F} = I \Delta l \times \mathbf{B}$$

- De som egentligen känner den magnetiska kraften är de mikroskopiska laddningarna i ledningen som rör på sig med hastigheten $\mathbf{v} = \Delta l / \Delta t$.
- Vi får då att strömmen gånger längdelementet blir: $I \cdot \Delta l = \Delta Q / \Delta t \cdot \mathbf{v} \Delta t = \Delta Q \mathbf{v}$.
- Ifall denna laddning ΔQ är bara en punktladdning q får vi att den magnetiska kraften på denna punktladdning är:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (30)$$

där rikningen för kraften fås från högerhandsregeln



Exempel:

- En elektron har hastigheten $\mathbf{v} = (7 \hat{i} + 3 \hat{j} + 2 \hat{k})$ m/s i ett magnetfält $\mathbf{B} = (2.0 \hat{k})$ T. Vad är kraften på elektronen?

Kraften på elektronen är $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ där kryssprodukten blir

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{B} &= (v_y B_z - v_z B_y) \hat{i} + (v_z B_x - v_x B_z) \hat{j} + (v_x B_y - v_y B_x) \hat{k} \\ &= (v_y B_z) \hat{i} + (-v_x B_z) \hat{j} \end{aligned}$$

vilket ger vid insättning av värden

$$\mathbf{F} \approx -1.6 \times 10^{-19} C (3 \cdot 2 \hat{i} - 7 \cdot 2 \hat{j}) \frac{m \cdot N \cdot s}{s \cdot C \cdot m} \approx (-9.6 \hat{i} + 22.4 \hat{j}) \times 10^{-19} N$$

- I förra exemplet beräknade vi kraften på en elektron i ett magnetfält. Denna kraft är alltid vinkelrät mot hastigheten, vilket betyder att kraften också är vinkelrät mot en liten sträcka $d\mathbf{s}$ som elektronen går och totala arbetet ($dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$) är noll.

• Detta betyder att storleken på hastigheten $|v|$ aldrig ändras, endast elektronens riktning: **En laddad partikel rör sig hela tiden med konstant fart i ett magnetfält.**

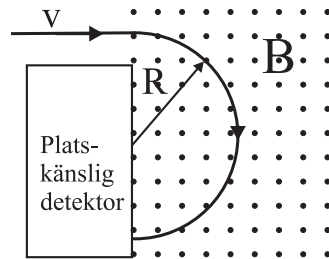
- Detta kan användas i en s.k. **masspektrometer**, där en laddad partikel q med massan m först

accelereras av en potentialskillnad V och får kinetiska energin

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = V \cdot q \quad (31)$$

hastigheten som partikeln har innan den kommer in i ett vinkelrät magnetiskt fält är

$$v = \sqrt{\frac{2qV}{m}} \quad (32)$$



- Det magnetiska fältet är i riktning ut från pappret, så att den magnetiska kraften är alltid mot cirkelns mitt (centripetal kraft) för vilken följande ekvation gäller

$$|F_M| = q|v||B| = m\frac{v^2}{R}$$

från vilken vi får radien för partikeln

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (33)$$

- Detta innebär alltså att beroende på massan kommer partiklarna ut på olika ställen från spektrometern. Alltså kan den användas för att *välja ut* partiklar av önskad massa, eller analysera massdistributionen av vilka som helst laddade partiklar.

• [Masspektrometrar används mycket vittsprätt både inom fysiken och kemien](#)

- Radien kan också skrivas med hjälp av den accelererande potentialen

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{m\sqrt{\frac{2qV}{m}}}{qB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mV}{q}}$$

- I en cyklotron accelereras laddade partiklar med elfält i en cirkelformad bana. Tiden (perioden) för ett varv för partikeln blir

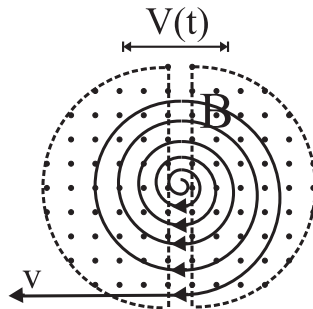
$$T_c = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (34)$$

vilken är oberoende av hastigheten eller radien! Vinkelfrekvensen för cirkelrörelsen blir

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T_c} = \frac{qB}{m} \quad (35)$$

- Partikelns hastighet och därmed också kinetiska energin kan ökas ifall en periodisk spänningskälla som oskillerar med samma vinkelfrekvens, se bilden nedan

$$V(t) = V_o \cdot \sin(\omega_c \cdot t)$$

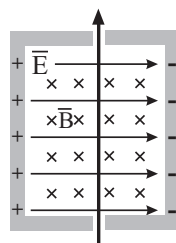


- Då partikelns hastighet ökar och närmar sig ljusets, ökar också partikelns massa.
- Rörelsemängden blir $p = mv / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, vilket betyder att både magnetfältet och vinkelfrekvensen måste modifieras så att cirkelbanor fås. Dessa apparater kallas för *synkrotroner*

När en laddad partikel rör sig samtidigt i ett elfält och magnetfält, känner den två krafter. Den totala kraften, kallad **Lorentz-kraften** är

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (36)$$

- Detta kan användas som *hastighetsfilter* ifall hastigheten för partikeln är vinkelrät till både magnet och elfältet



För att partikeln skall röra sig rakt, måste Lorentz kraften vara noll

$$q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$$

vilket ger hastigheten som partikeln måste ha

$$|\mathbf{v}| = \frac{E}{B} \quad (37)$$

Eftersom laddningen q förkortas bort, fungerar denna hastighetsfilter för både positiva och negativa laddningar.