XV. Elektriska fält

För tillfället vet vi av bara fyra olika fundamentala krafter i universum. Dessa är:

• **Gravitationskraften**

 •Bekant från mekaniken-kursen

• Den **elektromagnetiska kraften**

 •Detta kapitels ämne, orsaken till att elektronerna och atomkärnorna bildar neutrala atomer

 •Också den grundläggande växelverkan bakom det att atomerna binds till varandra $\Longrightarrow$ all materialfysik och kemi

• Den **starka växelverkan**

 •Orsak till att atomkärnorna hålls ihop

• Den **svaga växelverkan**

 •Spelar roll vid sönderfall av atomkärnor $\Longleftrightarrow$ radioaktivitet

De två sista krafterna är mindre bekanta och deras verkan kan bara iakttas på mycket små avstånd.

De tre sistnämna krafterna kombineras till en enda (komplicerad) kraft i den s.k. standardmodellen för partikelfysiken.

XV.1. Kraften mellan laddningar: Coulombs lag

På basen av empiriska observationer, som sträcker sig bak till 1700-talet, vet man följande.

• Både gravitations- och den elektromagnetiska kraften har oändligt lång räckvidd.

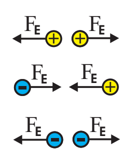
• Gravitationskraften är alltid attraktiv, men den elektromagnetiska kraften kanvara antingen attraktiv eller repulsiv.

• Stabila partiklar kan ha en egenskap kallad *elektrisk laddning*.

• Två olika sorts laddning, kallad **positiv** eller **negativ** laddning.

• Lika laddningar **repellerar** varandra och olika laddningar **attraherar** varandra.

Ifall vi har två laddningar q_1 och q_2 på ett avstånd r från varandra är den elektromagnetiska kraften, kallad **Coulombs lag** mellan dessa partiklar



$$\mathbf{F}_E = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{1}$$

där ϵ är **mediets permittivitet** och $\hat{\mathbf{r}}$ enhetsvektorn för vektorn som sammanbinder de två partiklarna.

I vakuum har vi permittiviteten $\epsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12}$ C^2/N·m^2. En användbar konstant är

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9.0\times 10^9 \frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}$$

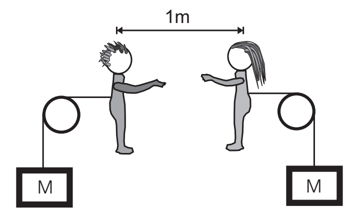
• Den fundamentala enhetsladdningen hittar man hos en elektron och en proton, vilket beskrivs med bokstaven **e**.

• Det approximativa värdet för enhetsladdningen är e=1.6022 $\times 10^{-19}$ C, där C står för enheten *Coulomb*.

För att förstå hur stark den elektromagnetiska kraften är, skall vi göra en approximativ jämförelse mellan denna kraft och gravitationskraften.

Exempel

Anta att vi har en pojke och en flicka 1 m från varandra, och pojken har 1 kg extra protoner i sig, och flickan en motsvarande antal extra elektroner. Hur stora massor måste vi hänga i repen, för att gravitationskraften på jordytan skall balansera den elektromagnetiska kraften?



Lösning

Massan för en proton $\approx 2 \times 10^{-27}$ kg $\Rightarrow$ 1kg motsvarar 1/2 $\times 10^{-27}$ $\approx 5 \times 10^{26}$ protoner

Den elektriska kraften är då

$$|F_E| \quad \approx \quad \frac{(5\times 10^{26})^2(1.6\times 10^{-19})^2}{4\cdot 3.14\cdot 8.85\times 10^{-12}} \approx 6\times 10^{25}N$$

På jordytan borde vi då ha en motsvarande gravitationskraft

$$F_G \approx M \cdot g = F_E$$

$\Rightarrow$ M $\approx \frac{F_E}{g} \approx 6 \times 10^{24}$ kg vilket är ungefär massan för jorden !!

Exempel.

I en He-atomkärna finns två protoner och två neutroner. Storleken av kärnan är ungefär 1 fm (femtometer), så man kan anta att medelavståndet mellan protonerna är det samma. Beräkna en lägre gräns för styrkan som den **starka** växelverkan måste ha för att hålla kärnan ihop.

Lösning

Insättning ger:

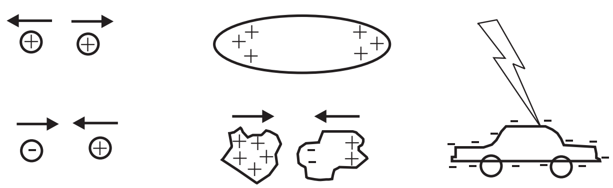
$$|F_E| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{1\times10^{-15^2}} = 230\ \mathrm{N} \tag{2}$$

vilket är enormt om man tänker på att det är fråga om två nukleoner!

• Ordet *elektrisk* härstammar från det grekiska ordet för bärnsten ($\eta\lambda\epsilon\kappa\tau\rho o\nu$, eng. amber), vilken har den egenskapen att ifall den gnids emot päls, så kan den attrahera andra objekt.

Vad detta betyder är att bärnstenen har blivit statiskt **laddad**.

• Exempel på olika situationer med laddning.



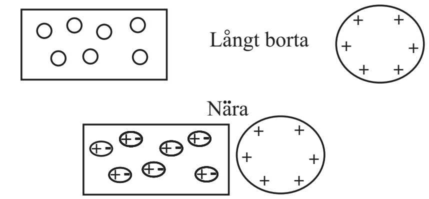
• Lika laddningar repellerar varandra, motsatta laddningar attraherar

• Mellan en laddad kropp och en $neutral$ kropp kan en attraktiv kraft **induceras**

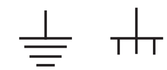
- I detta fall förflyttar sig de negativa laddningarna mot, och motsvarande de positiva laddningarna bort, från den positiva kroppen.

• Krafter kan även induceras ifall kroppen är en **isolator, vilket betyder att den inte har mobila laddningar, leder inte ström**.

- Detta sker genom **polarisation** av isolatorn, vilket betyder att de positiva och negativa laddningarna i de neutrala atomerna eller molekylerna rör sig en aning mot eller från den positiva kroppen:



Hela jorden kan tänkas vara en väldigt stor ledande kropp som är laddningsneutral, d.v.s. de positiva och de negativa laddningarnas antal är lika. Ifall en positivt laddad ledare kopplas till jorden med en ledare, kommer motsvarande antal negativa laddningar att flöda från jorden till den positivt laddade ledaren, som blir neutral. Man säger att kroppen är "jordad". Elektriska symboler som betecknar att något är jordat, ses i figuren bredvid.



XV.2. Den mikroskopiska tolkningen av elektrisk ström

• I kapitel 14, definierades ström som orsak till kraften mellan två ledningar.

• Vi skall nu koppla ihop ström med laddningar i rörelse.

• I ledare, som t.ex. koppar och silver, rör sig fria elektroner hela tiden med en hastighet av ungefär 10^6 m/s.

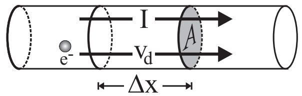
- Ingen elektrisk ström går i ledaren utan yttre spänning, eftersom de fria elektronernas rörelseriktning är kaotisk, d.v.s. de rör sig åt vilket håll som helst.
- Men då en spänningskälla (batteri) kopplas till en ledare, känner de fria elektronerna en kraft i riktningen av ledaren. Konsekvensen av detta är att, förutom den oordnade rörelsen, får de fria elektronerna en **drifthastighet** längs ledaren, som kallas för **ström**.

• Ström definieras som laddning dQ som går genom en area under ett tidsintervall dt

$$\boxed{I = \frac{dQ}{dt} \qquad [I] = \mathrm{C/s} = \mathrm{A\ (ampere)}} \tag{3}$$

Exempel:

Vi skall uppskatta hur stor drifthastigheten för elektronerna i en koppartråd är. Trådens diameter är 1 mm, och strömmen i tråden är 1 A. Elektrondensiteten i koppar $\rho^- \approx 10^{29}$ elektroner/m^3.



Lösning

Arean för tråden är: $A = \pi(d/2)^2$. På tiden Δt går elektronerna (med laddningen $|e|$) en sträcka $\Delta x = v_d \Delta t$. Summaladdning som går genom den gråa ytan A i figuren på tiden Δt blir volymen gånger laddningsdensiteten:

$$\Delta Q = \Delta V \cdot \rho^- \cdot |e| = A \cdot \Delta x \cdot \rho^- \cdot |e| = A \cdot v_d \Delta t \cdot \rho^- \cdot |e|$$

Vi får strömmen som laddning per tidsenhet

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \mathrm{A} \cdot v_d \cdot \rho^- \cdot |e|$$

Detta ger en uppskattning på drifthastigheten för elektronerna i koppartråden

$$v_d = \frac{I}{A \cdot \rho^- \cdot |e|} \approx \frac{1\ A}{3.14 \cdot (0.5 \times 10^{-3}\mathrm{m})^2 10^{29}\mathrm{m}^{-3} 1.6 \times 10^{-19} C} \approx 10^{-4}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0.1\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}}$$

- Alltså, då en strömbrytare till en lampa kopplas på, börjar elektronerna sakta driva längs den elektriska ledningen.
- Ifall ledningens längd från strömbrytaren till lampan är 10 m, räcker detta ca. 10 m / $10^{-4}\mathrm{m/s} = 10^5\mathrm{s}$, vilket är längre tid än en dag!

- Vardaglig erfarenheten visar dock att lampan tänds i samma ögonblick som strömbrytaren trycks
- Detta tyder på att mekanismen med vilken ström fortplantas är *inte* elektronernas drift.
- Vad som sker då en spänningskälla (batteri) kopplas till en ledare, är att ett **elektriskt fält** skapas och fortplantas med nära ljusets hastighet i ledaren.
- De fria elektronerna i hela ledningen känner en kraft nästan samtidigt p.g.a. detta elektriska fält.

- Innan vi närmare bekantar oss med detta nya fält, bör man nämna att en ström i en ledare kan också bero av att positiva laddningar rör på sig.
- Som sammanfattning, blir den totala strömmen i en ledare

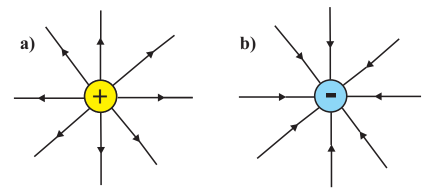
$$I = \rho^+ \cdot |e| v_d^+ A + \rho^- \cdot |e| v_d^- A \tag{4}$$

där ρ är densiteten för laddningar i rörelse med drifthastigheten v_d som går genom en ledare med arean A. $^+$ eller $^-$ berättar ifall laddningarna är positiva eller negativa.

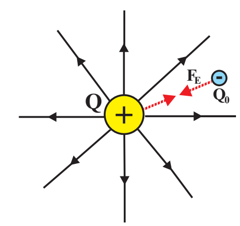
- Positiva laddningar kan vara joniserade atomer eller s.k. hål.

XV.3. Elektriska fältstyrkan och flödesdensiteten

- Det fält som förmedlar den elektriska kraften, kallar vi för ett **elektriskt fält**.
  - Analogt till detta, definierades **gravitationsfältet** som det fält som förmedlar gravitationskraften.
- **a)** positiv laddning från vilken ett elektriskt fält utgår
- **b)** negativ laddning till vilken de elektriska fältlinjerna går.



Man kan nu sätta en annan laddning i ett elfält, och beräkna **Coulomb**- eller den **elektriska kraften** på denna laddning:



$$\mathbf{F}_E = \frac{Q \cdot Q_0}{4\pi\epsilon r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

- Storleken på det elektriska fältet från Q får vi från ekvationen

$$\mathbf{E} = \lim_{Q_0 \to 0} \frac{\mathbf{F}}{Q_0}$$

- Den **elektriska fältstyrkan**, eller också kallad **elektriska fältet** eller bara **elfältet** från en punktladdning definieras då som

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\hat{\mathbf{r}}} \tag{5}$$

- Jamför: tidigare hade vi att gravitationskraften på jordytan kan skrivas som $F_G = m \cdot g$, vilket ger gravitationsfältet nära jordytan: $\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}_G}{m}$

Exempel:

En punktladdning, $q = 10.0$ nC, befinner sig vid origo. Beräkna den elektriska fältstyrkan vid punkten:
a) ($x = 1.0$ m och $y = 0$)
b) ($x = 3.0$ m och $y = 4.0$ m)

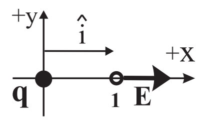
Det elektriska fältet runt en punktladdning ges av: $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}\hat{\mathbf{r}}$

Lösning

a)

Vektorn från origo till punkten (1,0) ges av: $|r| = 1.0$ m och $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{i}}$, och vi får den elektriska fältstyrkan i denna punkt

$$\mathbf{E} \approx \frac{9.0 \times 10^9 N \cdot m^2/C^2 \cdot 10.0 \times 10^{-9} C}{(1m)^2}\hat{\mathbf{i}} = 90.0\,\frac{N}{C}\hat{\mathbf{i}}$$



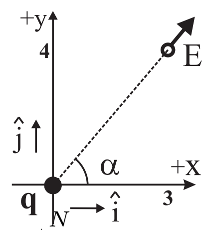
b)

Avståndet från origo till punkt (3.0,4.0) är: $|r| = \sqrt{(3.0\ m)^2 + (4.0\ m)^2} = 5.0$ m, och riktningen blir

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|r|} = \frac{3.0\ m\ \hat{\mathbf{i}} + 4.0\ m\ \hat{\mathbf{j}}}{5\ m} = 0.6\ \hat{\mathbf{i}} + 0.8\ \hat{\mathbf{j}}$$

Det elektriska fältet i punkten **b)** blir alltså:

$$\mathbf{E} \approx \frac{9.0 \times 10^9 N \cdot m^2/C^2 \cdot 10 \times 10^{-9} C}{(5\ m)^2}(0.6\ \hat{\mathbf{i}} + 0.8\ \hat{\mathbf{j}}) \approx (2.16\ \hat{\mathbf{i}} + 2.\ldots)\frac{N}{C}$$

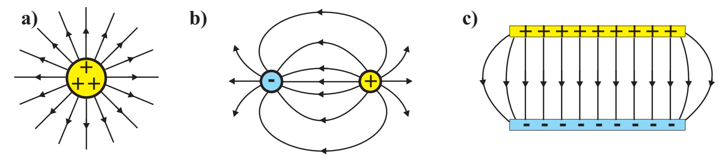


Ett annat sätt att räkna är att beräkna magnituden av elfältet i punkten **b)**:

$$|\mathbf{E}| \approx \frac{9.0 \times 10^9 N \cdot m^2/C^2 \cdot 10 \times 10^{-9} C}{(5\ m)^2} = 3.6\ \frac{N}{C}$$

Riktningen för elfältet får man från vinkeln mellan vektorn och x-axeln $cos(\theta) = \frac{3m}{5m} = \frac{|\mathbf{E}_x|}{|\mathbf{E}|}$, vilket ger x- och y-komponententerna:
$|\mathbf{E}_x| = \frac{3}{5}|\mathbf{E}| = 2.16\ \frac{N}{C}$
$|\mathbf{E}_y| = \sqrt{\mathbf{E}^2 - \mathbf{E_x}^2} = 2.88\ \frac{N}{C}$

• Det elektriska fältet som omger en laddning, definierar man att börjar från en positiv laddning och går in i negativ laddning



• Det totala **elektriska flödet** från en punktladdning Q definieras vara samma som laddningens storlek

$$\boxed{\phi_E = \frac{Q}{\epsilon}} \qquad (6)$$

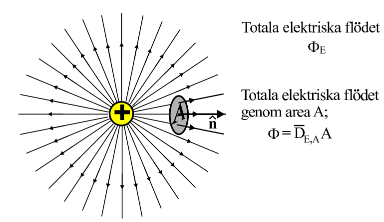
Detta är alltså totala 'antalet flödeslinjer' som utgår från en laddning.

Notera att det finns två konventioner om detta: antingen $\phi_E = Q$ eller $\phi_E = Q/\epsilon$. Den senare följer den i elektrodynamikboken Eisberg-Resnick och används därmed här.

• För att få storleken och riktningen på den elektriska fältstyrkan, definierar vi ytterligare en storhet som kallas **elektriska flödesdensiteten:** (eng. "electric fluc density" eller "electric displacement"):

$$\mathbf{D} = \epsilon\left[\lim_{\Delta A \to 0}\frac{\Delta\phi_E}{\Delta A}\right]\hat{\mathbf{n}} \qquad (7)$$

där ΔA är en area och $\hat{\mathbf{n}}$ är en enhetsvektor i riktning av flödeslinjerna vinkelrät mot ytan ΔA.



• Den **elektriska flödesdensiteten** ger bara hur många av de alla flödeslinjerna från laddningen Q genomkorsar en area A på olika avstånd från laddningen.

• Den slutliga storleken på det **elektriska fältet** beror sedan av mediet runt laddningen.

• Mediets omgivning ger man som tidigare med ϵ, som är mediets **permittivitet**.

  • I vakuum har vi permittiviteten ϵ_0.

• Det elektriska fältet får man slutligen från ekvationen

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} \qquad (8)$$

• Tidigare fick vi storleken och riktningen på elfältet från en punktladdning genom att dividera Coulombkraften med laddningen, se ekv. (5).

Exempel.

Vi bestämmer pånytt detta elfält genom att se på laddningens flödeslinjer.

Det totala elektriska flödet (antal flödeslinjer) från en punktladdning Q är: $\phi_E = Q/\epsilon$. Vid avståndet r från laddningen är sfärens area: $A = 4\pi r^2$. Alla flödeslinjer från laddningen korsar denna area, vilket ger det elektriska flödet på avståndet r från laddningen

$$\mathbf{D}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

där $\hat{\mathbf{r}}$ ger att riktningen är utåt från laddningen. Slutligen blir storleken på det elektriska fältet eller elfältet $\mathbf{D}$ dividerat med mediet runt laddningen

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

XV.4. Det elektriska fältet från många laddningar eller från laddningsdistributioner

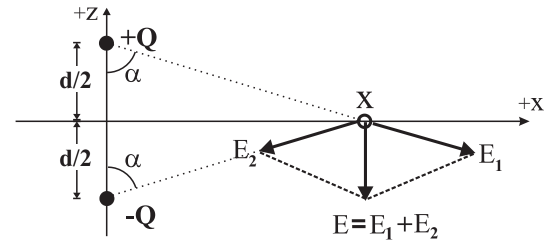
• Vad händer ifall vi har flera laddningar som alla har ett eget elfält?

• I detta fall kan man beräkna det totala elfältet genom **superpositionsprincipen**, d.v.s. summera ihop alla elfältsvektorer till en resultant vektor:

$$\boxed{\mathbf{E} = \mathbf{E_1} + \mathbf{E_2} + \mathbf{E_3} + \ldots \qquad (9)}$$

Exempel:

Två lika stora laddningar, ena positiv $+Q$ och den andra negativ $-Q$, befinner sig på avståndet d från varandra. Den positiva laddningen befinner sig $d/2$ ovanför och den negativa laddningen $d/2$ nedanför x-axeln. Ge en ekvation för det elektriska fältet på en godtycklig punkt på x-axeln.



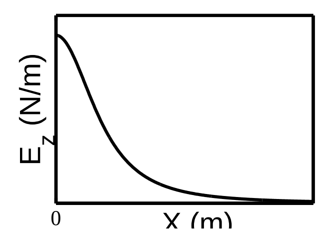
Lösning

Från figuren ser vi att elfältets x-komponenter tar ut varandra, och vi får det resulterande elfältet endast i z-riktningen. Avståndet från vardera laddningen till punkten på x-axeln är $\sqrt{x^2 + d^2/4}$. Elfältet i z-riktningen från bägge laddningarna blir då

$$E_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon}\left[\frac{Q}{x^2 + d^2/4}cos(\alpha) + \frac{Q}{x^2 + d^2/4}cos(\alpha)\right]$$

där, $cos(\alpha) = (d/2)/\sqrt{x^2 + d^2/4}$, vilket slutligen ger:

$$E_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q \cdot d}{(x^2 + d^2/4)^{3/2}}$$



Elfältet är inverst proportionellt till avståndet upphöjt till 3

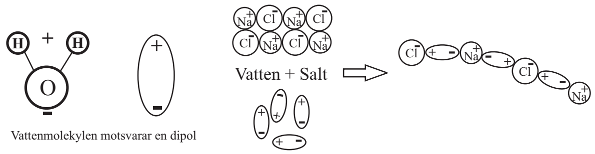
$$E_z \propto \frac{1}{x^3}$$

• Kombinationen av två lika stora, men motsatt laddade laddningar kallas en **elektrisk dipol**

• Dipoler har en mycket viktig roll i naturen.

• T.ex. vattenmolekylen kan approximeras att vara en dipol, och de neutrala molekylerna eller atomerna i en isolator polariseras till dipoler i ett elfält.

- Vattnet är därför ett utmärkt lösningsmedel för joniska atomer.
- Till exempel salt NaCl, dissocieras till positiva Na^+ och negativa Cl^- joner, vilka dras till vattenmolekylens negativa, respektive positiva del. På detta sätt hålls Na^+ och Cl^- joner lösta från varandra.

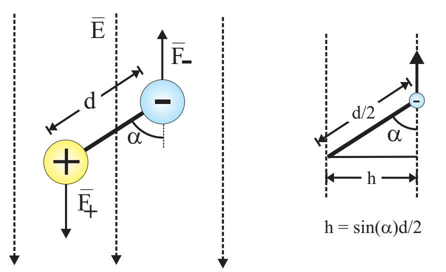


- Biologiska material har också en massa permanenta dipoler i sig

- Växelverkan mellan dessa sinsemellan, och med vatten (som alltid finns närvarande i biologiska system) har en stor inverkan på biologiska materials struktur, och därmed liv

Ifall vi sätter en dipol i ett elektriskt fält, blir summan av krafterna på den negativa och positiva laddningen lika med noll.

- Magnituden för båda är $|F| = q \cdot E$. Däremot påverkar krafterna dipolen inte i samma linje, så att det totala vridmomentet inte är lika med noll, se bilden:



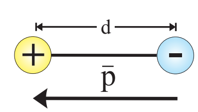
- Vridmomentet på dipolen blir

$$
\begin{aligned}
\tau &= h \cdot \mathbf{F}_- + h \cdot \mathbf{F}_+ = \mathbf{F}_- \frac{d}{2} sin(\alpha) + \mathbf{F} + -\frac{d}{2} sin(\alpha) = \mathbf{F}_- \cdot d\ sin(\alpha) \\
&= qE \cdot d\ sin(\alpha)
\end{aligned}
$$

där d är avståndet mellan laddningarna $\pm q$, E är det elektriska fältet och α är vinkeln mellan dipolen och elfältet.

Nu definierar vi en mycket viktig storhet som kallas för **elektriska dipolmomentet** som längden mellan laddningarna på dipolen gånger laddningens storlek

$$\mathbf{p} = q \cdot \mathbf{d} \tag{10}$$



- Detta är en vektor, vars riktning är från den negativa till den positiva laddningen. Vridmomentet på dipolen kan slutligen skrivas som

$$\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \tag{11}$$

Effekten på vridmomentet är att vrida dipolmomentet i elfältets riktning. Elfältet gör alltså arbete genom att vrida dipolen. Arbetet som görs av elfältet då den vrider dipolen en infinitesimal vinkel $-d\alpha$ är

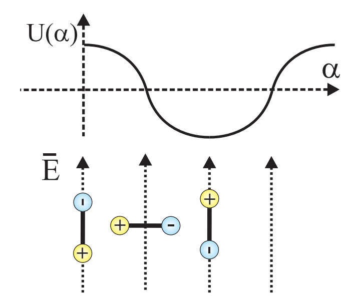
$$dW = \tau \cdot -d\alpha = -pEsin(\alpha)d\alpha$$

Totala arbetet från vinkeln α_1 till α_2 blir då

$$W = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (-pEsin(\alpha))d\alpha = pE[cos(\alpha_2) - cos(\alpha_1)]$$

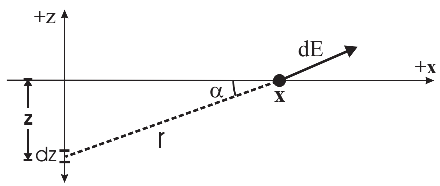
Vi definierar att den potentiella energin är noll då dipolen är orienterad vinkelrät mot elfältet: $\mathbf{p} \perp \mathbf{E}$, $\alpha = 90°$. Detta ger den potentiella energin för dipolen som en funktion av vinkeln

$$U(\alpha) = -pE\ cos(\alpha) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \tag{12}$$



Exempel:

I detta exempel beräknar vi elfältet på x-axeln från en oändligt lång stav med **laddningsdensiteten λ, $[\lambda] = C/m$**.



Lösning

I detta fall tar z-komponenterna ut varandra, så vi har kvar att beräkna det totala elfältet i x-riktningen. Från bilden får vi att dE från laddningen $dQ = \lambda \cdot dz$ blir

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{dQ}{r^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon}\frac{dz}{r^2}$$

x-komponenten av denna blir

$$dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon}\frac{cos(\alpha)dz}{r^2}$$

Det totala elfältet får vi genom att integrera över hela staven

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cos(\alpha)dz}{r^2}$$

Men här beror ju α på r, så vi kan inte integrera direkt.

För att underlätta integreringen, försöker vi få alla termer i integralen som en funktion av vinkeln α

$$tan(\alpha) = \frac{z}{x} \Rightarrow z = x \cdot tan(\alpha) = x\frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)}$$

vilket vi deriverar med avseende av α

$$\frac{dz}{d\alpha} = x\left[\frac{cos(\alpha)}{cos(\alpha)} + \frac{sin(\alpha)(-1)(-sin(\alpha))}{cos^2(\alpha)}\right] = x\left[\frac{cos^2(\alpha)+sin^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)}\right] = \frac{x}{cos^2(\alpha)}$$

vidare får vi att

$$cos(\alpha) = \frac{x}{r} \Rightarrow r = \frac{x}{cos(\alpha)}$$

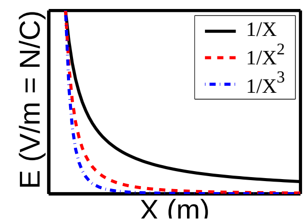
Vi sätter in resultaten av de två sista ekvationerna i integralen, som förenklas till

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon x}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} cos(\alpha)d\alpha$$

Integrationen med avseende av dz från $-\infty$ till ∞ har byts till integration med avseende av vinkeln α från $-\pi/2$ $(-\infty = tan(-\pi/2))$ till $\pi/2$ $(\infty = tan(\pi/2))$. Vi integrerar

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon x}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} sin(\alpha) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon x}[1-(-1)] = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon x} \qquad (13)$$

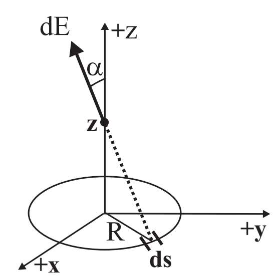
Elfältet minskar i detta fall som $1/r$, där r är det vinkelräta avståndet till den laddade oändligt långa staven.



I bilden ovan ser vi det elektriska fältet som en funktion av det inversa värdet på x upphöjt till 1, 2 och 3.

Exempel:

En jämnt laddad ring med radien R har totala laddningen $+Q$. Beräkna det elektriska fältet från ringen i en punkt som ligger på ringens axel, på avståndet z från ringens centrum (se bild)



Lösning

Elfältena i x- och y-riktningarna tar ut varandra. Laddningsdensiteten $\lambda = Q/(2\pi R)$, så det elektriska fältet i z-riktningen från ds blir

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{ds \cdot \lambda cos(\alpha)}{z^2+R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{ds \cdot Q}{2\pi R}\frac{cos(\alpha)}{(z^2+R^2)}$$

Totala elektriska fältet fås då genom integrering över ringen

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q}{2\pi R}\frac{cos(\alpha)}{(z^2+R^2)}\int_0^{2\pi R} ds = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q}{2\pi R}\frac{cos(\alpha)}{(z^2+R^2)} \cdot 2\pi R$$

Vidare har vi att $cos(\alpha) = z/\sqrt{z^2+R^2}$ så elfältet blir

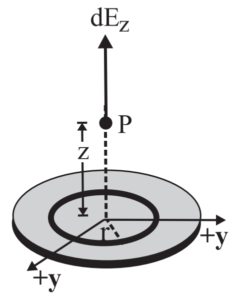
$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Qz}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

Observera att långt från ringen är $z >> R$, vilket ger att elfältet från ringen blir lika med fältet från en punktladdning

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q}{z^2}$$

Exempel:

En jämnt laddad skiva med radien R har totala laddningen $+Q$. Beräkna det elektriska fältet från skivan i punkt P som ligger på skivans axel, på avståndet z från skivans centrum (se bilden). Laddningsdensiteten för skivan är den totala laddningen dividerat med arean.



Lösning

$$\sigma = \frac{Q}{Area} = \frac{Q}{\pi R^2}$$

Laddningen i den infinitesimalt tunna ringen, ritad som en svart ring i figuren, är ringens area multiplicerat med laddningsdensiteten

$$dQ = dA \cdot \sigma = 2\pi r dr \cdot \sigma$$

Elfältet från denna ring i punkt P, avståndet z från ringen, tar vi från föregående exempel

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{2\pi r dr \cdot \sigma \cdot z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{2\epsilon} \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

Totala elfältet får vi igen genom integrering över hela skivans radie R

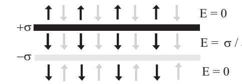
$$E_z = \frac{\sigma \cdot z}{2\epsilon} \int_0^R \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

För att förenkla integralen, gör vi substitutionen: $g = z^2 + r^2$, vilket ger att $r = \sqrt{g - z^2}$ och att $\frac{dg}{dr} = 2r = 2\sqrt{g - z^2}$. Integrationsgränserna ändras: $r = 0 \Rightarrow g = z^2$ och $r = R \Rightarrow g = z^2 + R^2$, vilket ger slutligen integralen

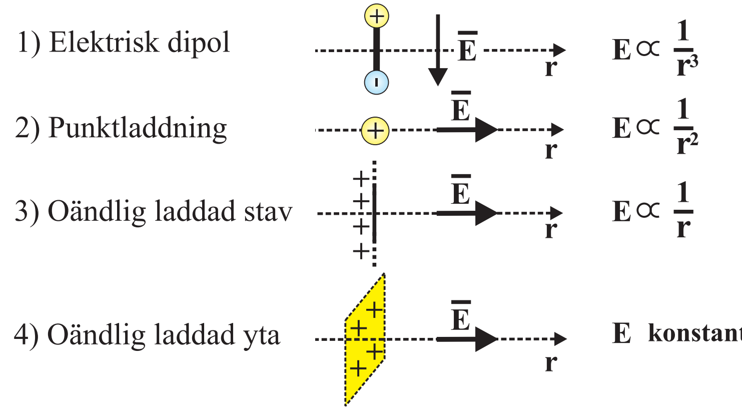
$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\sigma \cdot z}{2\epsilon} \int_{z^2}^{z^2+R^2} \frac{\sqrt{g - z^2} dg}{2\sqrt{g - z^2} g^{3/2}} = \frac{\sigma \cdot z}{2\epsilon} \int_{z^2}^{z^2+R^2} \frac{dg}{2g^{3/2}} = \frac{\sigma \cdot z}{2\epsilon} \int_{z^2}^{z^2+R^2} \frac{dg}{2g^{3/2}} \\ &= \frac{\sigma \cdot z}{2\epsilon} \Big/_{z^2}^{z^2+R^2} \frac{-1}{\sqrt{g}} = \frac{\sigma \cdot z}{2\epsilon} \left[\frac{-1}{\sqrt{z^2 + R^2}} + \frac{1}{z} \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{(R/z)^2 + 1}} \right] \end{aligned}$$

Ifall vi är nära ringen, $z << R$, får vi att det elektriska fältet är konstant: $E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon}$.

Det elektriska fältet är vinkelrät från ringen och alltså oberoende av avståndet från den. Det elektriska fältet från två motsatt laddade oändligt stora skivor, se bild, blir då:
$E = \sigma/\epsilon$ mellan skivorna, och 0 utanför dessa.



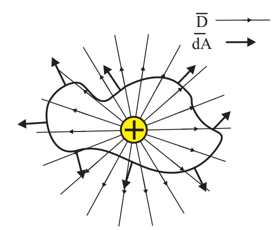
- Vi har nu fått fyra olika sätt på hur elfältets storlek ändrar med avståndet, vilka är ritade i figuren nedan



XV.5. Gauss lag

- I symmetriska fall kan beräkningarna av det elektriska fältet förenklas märkbart genom användning av Gauss lag.
  - Tidigare definierades det totala **elektriska flödet** från en punktladdning Q att vara samma som laddningens storlek: $\phi_E = Q$.
  - Ifall vi innesluter laddningen med en sluten yta, kommer alla de elektriska flödeslinjerna att korsa ytan och oberoende av ytans form, kommer ytintegralen

$$\phi_E = \int_{\text{Area}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{dA}$$



att vara konstant, där $\mathbf{D}$ är elektriska flödesdensiteten och $\mathbf{dA} = dA\hat{n}$. $\hat{n}$ är enhetsvektorn vinkelrät mot areaelementet dA

- Från föregående likheten får vi nu Gauss lag:

Det totala elektriska flödet genom en sluten yta är lika med summan av de inneslutna laddningarna

- Ekvationsform av Gauss lag:

$$\int_{\text{Area}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \sum q \qquad (14)$$

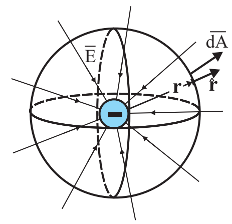
där $\sum q$ är summan av alla laddningar som innesluts av den slutna arean.

- I ekvivalent ekvationsform uttryckt med elfältet ($\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$) blir Gauss lag

$$\boxed{\int_{\text{Area}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{\sum q}{\epsilon}} \tag{15}$$

Exempel:

Vi skall nu beräkna elfältet på avståndet r från en negativ punktladdning $-Q$, se figuren. Det elektriska fältet som pekar mot den negativa punktladdningen är sfäriskt symmetriskt, så vi använder Gauss lag. Vi innesluter punktladdningen i en sfär med radien r. Areavektorn $d\mathbf{A}$ är ut från punktladdningen



Lösning

Gauss lag ger:

$$\int_{\text{Area}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = |\mathbf{E}| \int_{\text{Area}} |d\mathbf{A}| = |\mathbf{E}| 4\pi r^2 = \frac{-Q}{\epsilon}$$

vilket ger elfältet på avståndet r från laddningen

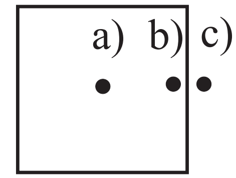
$$\mathbf{E} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

- Notera att detta gäller också ifall laddningen är i en sfär av ändlig storlek för alla avstånd r utanför sfären.

Exempel:

En punktladdning q befinner sig på tre olika platser:

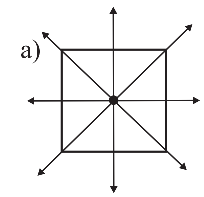
- **a)** i mitten av en kub
- **b)** i mitten av kuben, men närmare ena sidan
- **c)** i mitten av ena sidan av en kub, men utanför kuben



Beskriv vad det elektriska flödet genom alla 6 sidor blir i alla tre fallen

---

Lösning



a) i mitten av kuben

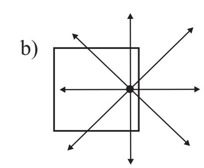
Kubens alla sidor har samma area och är lika långt från laddningen. Totala flödet genom alla sidorna från Gauss lag är q

- Totala flödet genom varje sida är: $\frac{q}{6}$

---

b) i mitten av kuben, men närmare ena sidan

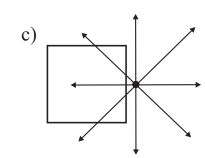
- Flödena genom alla sidorna är positiv
- Flödet genom sidan som är närmast laddningen är störst
- Flödet genom sidan som är längst ifrån laddningen är minst
- Summan av flödena genom alla sidorna är: q



---

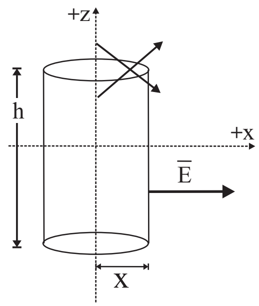
c) i mitten av ena sidan, men utanför kuben Den närmaste sidans ytnormal är riktad mot laddningen:
$\Rightarrow \mathbf{D} \cdot \mathbf{dA} < 0$

- Flödet genom den närmaste sidan är < 0 !!
- Flödet genom de fem andra sidorna är > 0
- Summan av flödena genom alla sidorna är 0 !!



Exempel:

Vi beräknar på nytt elfältet från en oändligt lång laddad stav, där vi fick genom integrering: $E_x = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon \cdot x}$, där λ är laddning per längdenhet. I figuren har vi placerat en cylinder runt staven.



Lösning

Gauss lag ger: $\int_{\mathrm{Area}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dA} = \sum q/\epsilon$. Det elektriska fältet går rakt ut från staven, och vid sidorna är elfältet parallellt med ytnormalen $(\mathbf{E} \,||\, \mathbf{dA}) \Rightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{dA} = EdA$ Vid baserna är elfältet vinkelrät mot ytnormalen $(\mathbf{E} \perp \mathbf{dA}) \Rightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{dA} = 0$. Vi får då att det totala flödet genom cylindern är lika med laddningen inne i cylindern

$$\int_{\mathrm{Area}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dA} = E2\pi x h = \frac{h \cdot \lambda}{\epsilon}$$

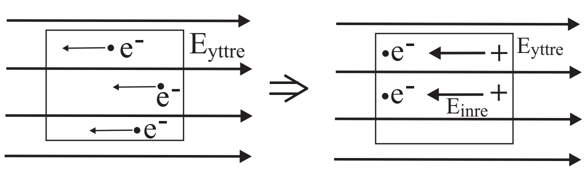
vilket ger att storleken på det elektriska fältet på avståndet x från staven blir (samma som i Ekv. 13)

$$|E_x| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon \cdot x}$$

XV.6. Laddningar i en ledare

- I en ledare rör sig elektronerna mycket lätt, så att ett yttre elfält distribuerar dessa elektroner inne i ledaren.
- Ifall vi har ett yttre elfält, kommer de mobila elektronerna att röra sig mot elfältet, och ett inre elfält uppstår. Detta elfält kommer att distribueras så att det totala elektriska fältet inne i ledaren är noll

$$E_{totala} = \mathbf{E}_{yttre} + \mathbf{E}_{inre} = 0 \qquad (16)$$

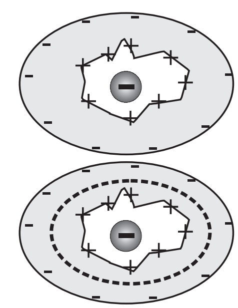


- Elektronerna inne i ledaren, rör på sig tills det inre elfältet är noll. Och eftersom det totala elfältet inne i en ledare är noll, får man från Gauss lag att summan av laddningar inne i ledaren också är noll.
- Givetvis befinner sig elektroner fortfarande inne i ledaren, men totala antalet elektroner är samma som positiva laddningarna i atomkärnor, så nettoladdningen inuti blir noll.
- Alla nettoladdningar befinner sig på ytan av ledaren.

- Ifall vi har en kavitet i en ledare, finns det inga nettoladdningar på ytan av kaviteten, fastän ledaren har en laddning. Men ifall inne i kaviteten finns en laddning $+Q$ (laddningen rör inte ledarens inre vägg), blir summaladdningen på ytan av kaviteten $-Q$.

Exempel:

Ledaren i bilden har en total laddning +10 nC. Inne i ledaren har vi en från ledaren isolerad laddning av storleken -16 nC. Vad blir summaladdningarna på kavitetens yta och på ledarens yta?



Lösning

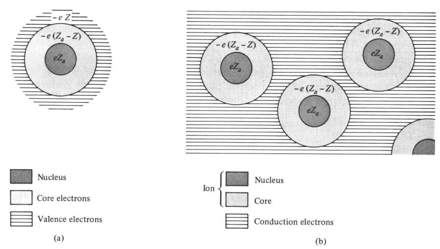
Vi ritar en Gauss-yta runt den inre kaviteten Eftersom elfältet inne i ledaren är noll, måste summaladdningen inne i Gauss ytan vara noll. Laddningen inne i kaviteten är -16 nC, så att laddningen på kavitetens yta måste vara +16 nC. Den totala laddningen för ledaren är +10 nC = Q_{yta} + $Q_{kavitetyta}$ $\Rightarrow$ Q_{yta} = +10 nC - $Q_{kavitetyta}$ = +10 nC - 16 nC = -6 nC.

XV.7. Härledning av Ohms lag: Drudeteorin för metaller

• Utgångspunkten för den klassiska elektrongasteorin är att elektronerna i en metall betraktas som en gas av klassiska partiklar med massan m_e och laddningen $-e$.

• Om ämnets atomer har Z valenselektroner, bidrar varje atom med Z elektroner till elektrontätheten.

• Om själva atomkärnan har laddningen Z_a, blir bilden av materialet nu som i bild

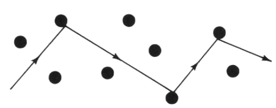


• De fria valenselektronerna kallas **ledningselektroner.**

• I många fall i materialfysiken är endast dessa betydelsefulla för ett ämnes egenskaper, så ofta pratar man bara om ämnets elektroner då man menar ledningselektronerna eller de kemiskt aktiva valenselektronerna.

• Empiriskt gäller att elektrontätheten i vanliga metaller n är mellan $1 \cdot 10^{22}/\mathrm{cm}^3$ och $25 \cdot 10^{22}/\mathrm{cm}^3$:

• Grundantagandet i Drudeteorin är att elektronerna rör sig fritt utan att påverkas av andra elektroner eller joner bortsett från diskreta kollisioner med de stationära jonerna.



• En grundstorhet i teorin är det genomsnittliga tidsintervallet τ mellan kollisionerna.

• Denna kallas **relaxationstiden.** Därtill antas att en elektrons hastighet efter en kollision är statistiskt fördelad och oberoende av hastigheten före kollisionen - dvs. hastigheten efter kollisionen beror enbart av metallens temperatur.

• Elektrongasens - och därigenom metallens - elektriska konduktivitet kan beräknas på följande sätt i Drudes teori.

• Mellan kollisionerna med joner accelereras elektronerna av ett yttre elfält $\mathbf{E}$.

• Efter tiden t, och före nästa kollision inträffar, är då en elektrons hastighet

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{F}}{m_e}t = \mathbf{v}_0 - \frac{e\mathbf{E}}{m_e}t \tag{17}$$

• Då $\mathbf{v}_0$ är en slumpmässigt fördelad vektor, för vilken alla riktningar är lika sannolika, är $\langle \mathbf{v}_0 \rangle = 0$

och den genomsnittliga elektronhastigheten (drifthastigheten) blir

$$\langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{e\mathbf{E}}{m_e}\langle t \rangle \,. \tag{18}$$

• Den genomsnittliga tiden mellan kollisioner är τ, och därigenom blir

$$\langle t \rangle = \tau \tag{19}$$

och

$$\langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{e\mathbf{E}}{m_e}\tau \tag{20}$$

• Proportionalitetskonstanten mellan $|\mathbf{E}|$ och $|\mathbf{v}|$ är känd som elektronernas mobilitet μ_e, och blir alltså

$$\mu_e = \frac{e\tau}{m_e} \tag{21}$$

Strömtätheten fås med att multiplicera elektronerna densitet n, laddning e och medelhastighet:

$$\mathbf{J} = -ne\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{ne^2\tau}{m_e}\mathbf{E} \tag{22}$$

• Å andra sidan hade vi i kapitel XIV ur de makroskopiska definitionerna:

$$J = \frac{I}{A} = \frac{V}{AR} = \frac{V}{A\rho\frac{L}{A}} = \sigma\frac{V}{L} = \sigma E \tag{23}$$

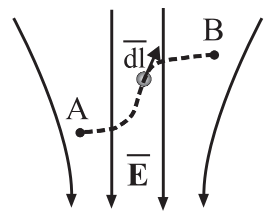
Så vi ser nu att konduktiviteten σ i ett ämne i Drudes teori ges av

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m_e} \tag{24}$$

• I.o.m. att storheterna i σ i Drudes teori inte beror av det yttre elfältet, utan är bara materialets inre konstanter, förutspår teorin alltså att strömtätheten är linjärt beroende av ett yttre elfält!

• Drudes teori förklarar alltså **Ohms lag!!**

XV.8. Arbete och den elektriska potentiella energin



- Nutidens samhälle är helt beroende av elektrisk energi.
- För att definiera den elektriska energin, betraktar vi en liten punktladdning dQ som förs från punkt A till B i ett elektriskt fält.
- Arbetet som görs under förflyttningen från A till B är

$$\boxed{W_{A \Rightarrow B} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl} = dQ \int_A^B \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} \qquad (25)}$$

- Den elektriska kraften är en konservativ kraft, vilket betyder att vi kan ge arbetet med hjälp av **potentiell energi**

$$W_{A \Rightarrow B} = U_A - U_B = -(U_B - U_A) = -\Delta U \qquad (26)$$

där ΔU är förändringen i potentialenergi.

- Konservativ kraft: ingen friktion/hastighetsberoende av kraften.

Exempel:

Elektriska potentiella energin i ett konstant elfält

Betrakta det konstanta elektriska fältet från en oändligt stor laddad platta. Vad är den elektriska potentiella energin som en funktion av höjden ovan plattan för en laddning dQ?

Lösning

Elfältet ovan plattan har vi redan två gånger bestämt vara: $E_z = konstant = \frac{\sigma}{2\epsilon}$, där σ är plattans laddningsdensitet. Arbetet för att förflytta en laddning från 0 till z blir

$$W_{0 \Rightarrow z} = U(0) - U(z) = dQ \int_0^z \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = dQ \int_0^z E_z \, dl \, cos(\alpha) = dQ \int_0^z E_z \, dz$$

där α är vinkeln mellan elfältet och förflyttningsvektorn dl. Vid ytan definierar vi att den potentiella energin är noll (U(0)=0). Vi får då att den potentiella energin som en funktion av höjden blir

$$U(z) = -dQ \int_0^z E_z \, dz = -dQ \, E_z \int_0^z dz = -dQ \, E_z \, z$$

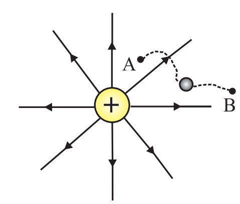
För att flytta en laddning $-Q$ från 0 till z går det åt energin

$$-(-Q) \cdot E \cdot z = QEz > 0$$

Vi sätter in arbetet (-QEz) mot elfältet, och samtidigt ökar vi den potentiella energin för laddningen lika mycket.

Fråga: Hur mycket arbete måste man göra för att flytta en negativ laddning från plattans yta till z $= \infty$?

Exempel:



Elektriska potentiella energin för system med två laddningar

Betrakta laddningarna, där den lilla laddningen dQ är i det radiella elektriska fältet $\mathbf{E} = \frac{Q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon r^2}$. Vad är den elektriska potentiella energin för systemet som en funktion av avståndet mellan laddningarna?

Lösning

Den potentiella energin för systemet ges av potentialskillnaden mellan platserna A och B:

$$\begin{aligned} W_{A \Rightarrow B} &= U(A) - U(B) = dQ \int_A^B \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = dQ \int_A^B E \, dl \, cos(\alpha) \\ &= dQ \int_{r_A}^{r_B} E(r) dr = \frac{dQ \cdot Q}{4\pi\epsilon} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{dQ \cdot Q}{4\pi\epsilon} \Big/_{r_A}^{r_B} \frac{-1}{r} = \frac{dQ \cdot Q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{-1}{r_B} - \frac{-1}{r_A} \right] \end{aligned}$$

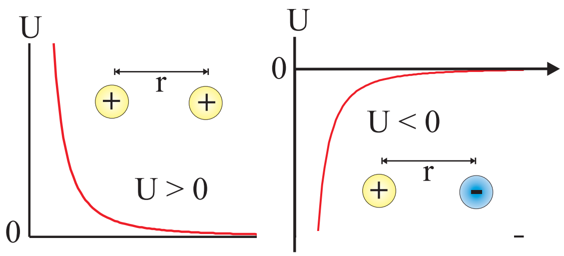
där α är vinkeln mellan elfältet och förflyttningsvektorn dl. Vi ser att ifall $r_B = \infty$ får vi att

$$W_{A \Rightarrow B} = U(A) - U(\infty) = \frac{dQ \cdot Q}{4\pi\epsilon \, r_A}$$

Så vi får att den potentiella elektriska energin för systemet som en funktion av avståndet mellan laddningarna är

$$U(r) = \frac{dQ \cdot Q}{4\pi\epsilon\, r} \tag{27}$$

Nedan ser vi den potentiella energin för tvåladdningssystemet som funktion av avståndet mellan laddningarna. Ifall $U < 0$ är laddningarna bundna till varandra, och energi behövs för att upplösa systemet (dra laddningarna från varandra).



Ifall vi vill ha den potentiella energin för många punktladdningar, måste vi summera alla potentiella energier

$$U_{Tot} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i<j} \frac{Q_i \cdot Q_j}{r_{ij}} \tag{28}$$

där summan måste göras för alla par bara en gång ($i < j$)

XV.9. Elektrisk potential

• Den elektriska potentiella energin behövde hela tiden en testladdning. Nu definierar vi **elektrisk potential**, som potentiella energin per enhetsladdning

$$V = \frac{U}{Q_\circ} \tag{29}$$

vilket liknar definitionen för det elektriska fältet

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q_\circ} \tag{30}$$

[V] = V (volt) = J/C. Potentialen för en punktladdning blir

$$V = \frac{U}{Q_\circ} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r} \tag{31}$$

• Elektrisk potential och spänning har alltså samma enhet, och är i själva verket samma sak. Det förra begreppet används mer då man talar om elfält, det senare när man talar om kretsar.

• Potentialen är mycket användbar i situationer där vi inte vet laddningen som sätts i elfältet; vi kan först beräkna potentialen från alla laddningarna, och sedan sätta in vilken laddning som helst för att beräkna den potentiella energin.

• Oftast så är det enklast att beräkna den potentiella energin från potentialskillnaden.

• Ibland när man vet det elektriska fältet (vanligtvis konstant), får man potentialskillnaden mellan punkt **a** och **b** genast som

$$V_a - V_b = \frac{W_{a\Rightarrow b}}{Q_\circ} = \frac{1}{Q_\circ}\int_a^b \mathbf{F}\cdot \mathbf{dl} = \int_a^b \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} \tag{32}$$

För konstant elfält blir detta

$$V_a - V_b = E \cdot (b - a) \tag{33}$$

alltså kan elfältets enhet också vara: **[E] = N/C = V/m**, av vilka den senare oftast används.

• En elektron som accelereras av en potentialskillnad 1 V, får kinetiska energin: 1 eV $\approx$ 1.6 $\times 10^{-19}$ J. Detta är definitionen på energienheten elektronvolt

Exempel

Energin hos en partikel som accelereras med acceleratorn i Gumtäkt över en spänning på 5 MV

a) proton, laddning från -1 till +1.

b) guldjon, laddning från -1 till +10.

Förklaring och lösning ges på föreläsningen

Exempel:

En elektron placeras i ett konstant elfält mellan två laddade skivor.

a) Ifall magnituden för det konstanta elfältet är 3.0×10^4 V/m (eller N/C), vad är accelerationen för elektronen?

b) Anta att elektronen är först i vila vid den negativa plattan, och sedan börjar accelereras mot den positiva. Vad är sluthastigheten för elektronen just innan den träffar den positiva ytan? Avståndet mellan skivorna är 1.0 cm.

Lösning

a) Metod 1.

Kraften är det elektriska fältet gånger laddningen, vilket ger: $|F| = |E| \cdot Q = m_e \cdot a$

$$\Rightarrow a = \frac{e \cdot E}{m_e} \approx \frac{1.6 \times 10^{-19} C \cdot 3 \times 10^4 N/C}{9.1 \times 10^{-31} kg} \approx 5 \times 10^{15} \frac{m}{s^2}$$

$$\begin{aligned} v &= v_\circ + a \cdot t \qquad v_\circ = 0 \Rightarrow t = \frac{v}{a} \qquad (34) \\ x &= x_\circ + v_\circ t + \frac{at^2}{2} \end{aligned}$$

vilket ger genom insättning av tiden från Ekv.(34)

$$x - x_\circ = \frac{v^2}{2a} \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{2a(x - x_\circ)} \approx 1.0 \times 10^7 m/s$$

b) Metod 2, Potentialen för elektronen, som i början är: $V = E \cdot (x - x_\circ)$, omvandlas till kinetisk energi

$$U = V \cdot Q = \frac{1}{2} m v^2 \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{2VQ}{m_e}} = \sqrt{\frac{2E(x - x_\circ)e}{m_e}} \approx 1.0 \times 10^7 m/s$$

Ekvipotentialytor

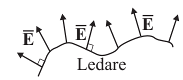
• En 3-dimensionell yta där potentialskillnaden är den samma i alla punkter, kallas för en **ekvipotential-yta**.

•Det elektriska fältet är alltid vinkelrät mot en ekvipotentialyta.

• Teorem: det elektriska fältet från en ledare är vinkelrät mot ledarens yta.

Bevis: ifall det inte vore så, skulle laddningarna på ytan röra på sig tills påståendet är uppfyllt.

• Detta betyder att inget arbete görs då en laddning förflyttas på ytan av en ledare. En ledares yta är alltså en ekvipotentialyta.

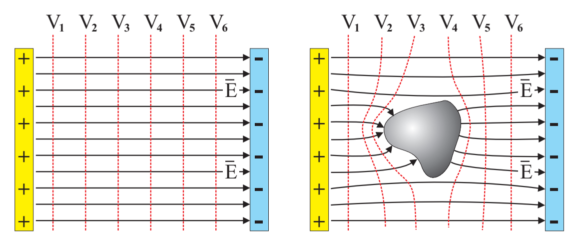


• Nästa figur visar hur elfältet och ekvipotentialytorna ändrar då en ledare sätts in i ett elektriskt fält.

• Vänstra bilden visar det jämna elfältet och ekvipotentialytorna.

• I den högra bilden ser vi att ledaren böjer elfältet så att de alltid är vinkelräta mot ytan av ledaren.

•Märk också att ekvipotentialytorna är alltid vinkelräta mot elfältet.



Bestämning av elfältet från den elektriska potentialen

• På samma sätt som man fick gravitationskraften från gravitationspotential, får man det elektriska fältet från den elektriska potentialen.

• Potentialen är en skalär storhet, d.v.s. den har ingen riktning.

• Är det då möjligt att från potentialen beräkna elfältet?

Potentialskillnaden mellan punkterna a och b definierades som: $V_a - V_b = \int_b^a dV = -\int_a^b dV$. Vidare hade vi att

$$V_a - V_b = \int_a^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl}$$

från vilka vi får likheten

$$-\,dV = \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} \tag{35}$$

För att beräkna potentialskillnaden, skriver vi ut komponenterna för vektorerna $\mathbf{E}$ och $\mathbf{dl}$:

$$\mathbf{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k} \qquad \mathbf{dl} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

Från vilket vi får potentialskillnaden

$$-\,dV = E_x dx + E_y dy + E_z dz \tag{36}$$

Ifall vi betraktar situationen där förflyttningen i y- och z-riktningarna är noll: $dy = dz = 0$, får vi

$$-\,dV = E_x dx$$

alltså

$$\boxed{E_x = -(dV/dx)_{y,zkonstant}} \tag{37}$$

• Vi får alltså komponenten av elfältet i en viss riktning genom att derivera potentialen i den riktningen.

• Genom att göra denna operation skilt i alla tre dimensioner, och sedan kombinera resultatet, ser man att det elektriska fältet kan skrivas med hjälp av potentialen som:

$$\boxed{\mathbf{E} = -\left(\frac{\delta V}{\delta x}\hat{i} + \frac{\delta V}{\delta y}\hat{j} + \frac{\delta V}{\delta z}\hat{k}\right)} \tag{38}$$

eller kortare får man $\mathbf{E}$ som **gradienten** av potentialen

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V} \tag{39}$$

där operatorn ∇ kallas för **nabla**

$$\nabla = \left(\frac{\delta}{\delta x}\hat{i} + \frac{\delta}{\delta y}\hat{j} + \frac{\delta}{\delta z}\hat{k}\right) \tag{40}$$

• Detta är alltså en form av en tredimensionall derivata.

• ∇ har en central roll i vektordifferentialkalkyl, för nästan alla deriveringsoperationer på vektorer kan och brukar skriva med hjälp en ∇

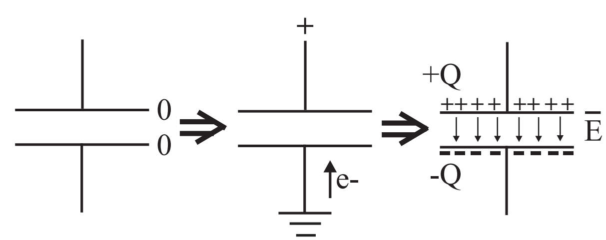
- Notera enheterna: potentialens enhet var ju Volt, och fältets Volt/meter. Alltså har derivatan med avseende på x och $nabla$ båda effektivt enheten 1/meter.

XV.10. Kondensatorer

• En kondensator är en krets som kan lagra elektrisk potentiell energi.

• Vilka två ledare som helst separerade av vakuum eller dielektrisk material fungerar som en kondensator.

• På bilden nedan, visas hur man kan ladda en kondensator



• Först har vi laddningen $\pm Q$ på kondensatorplattorna.

- Detta är orsaken till att en kondensator inte kan ha en ledare inuti: då skulle ju laddningarna $\pm Q$ neutraliseras omedelbart

• Det elektriska fältet är proportionerligt till laddningen: $E \propto Q$.

• Ifall elfältet är konstant, kan den elektriska potentialen skrivas som: $V = E \cdot d$, där d är avståndet mellan plattorna.

• Detta betyder att också potentialen är proportionerligt till laddningen: $V \propto Q$.

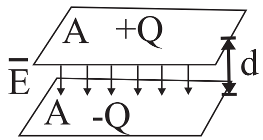
• Proportionalitetskonstanten har fått namnet **C, kapacitans:**

$$C = \frac{Q}{V}, \qquad [C] \; = \; \frac{C}{V} \; = \; F \; (farad) \tag{41}$$

• Olika kroppar har olika förmåga att lagra laddning, så värdet på kapacitansen beror på geometrin, storleken och ämnet mellan kondensatorplattorna.

• Vi försöker nu beräkna hur stor kapacitansen för två kondensatorplattor är.

• Vi antar att plattornas area är stort och att avståndet mellan plattorna är litet, så att det elektriska fältet mellan plattorna kan antas vara konstant.



• Det konstanta elfältet mellan plattorna är:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q}{A \cdot \epsilon}$$

där σ är laddningsdensiteten och ϵ är permittiviteten för mediet mellan plattorna.

• Q är storleken på laddningen i en av plattorna och A är dess area.

• Vidare har vi att potentialen för systemet kan skrivas som en funktion av elfältet:

$$V = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = Ed = \frac{Qd}{A \cdot \epsilon}$$

• Vi får då från kapacitansens definition kapacitansen för två kondensatorplattor

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q \cdot A \cdot \epsilon}{Qd} = \epsilon \frac{A}{d} \tag{42}$$

• Kapacitansen beror i detta fall endast av arean, avståndet mellan plattorna och av mediet mellan plattorna.

Energin i en laddad kondensator

• Energi kan laddas i en kondensator.

• Energin ΔW som behövs för att ladda en kondensator från laddningen q till $q + \Delta q$ är: $\Delta W = V \Delta q$, där V är spänningen över kondensatorn då dess laddning är q.

• Den totala energin lagrad i kondensatorn vars slutliga laddning är Q blir:

$$W_C = \int_0^Q V dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C} \tag{43}$$

där kondensatorns definition: $V = Q/C$ använts.

• Energin lagrad i en kondensator kan skrivas i ekvivalet form (som liknar den kinetiska energin)

$$W_C = \frac{1}{2} C V^2 \tag{44}$$

Exempel:

Vi har två kondensatorplattor med arean 10 cm^2 på avståndet 1 mm från varandra i luft, $\epsilon_{luft} \approx$ 8.85$\times$10^{-12} F/m. Spänningen eller potentialen mellan plattorna är 12 V.

a) Beräkna kapacitansen för systemet

b) Beräkna magnituden på laddningen i vardera plattan

Lösning

a) Kapacitansen för systemet är:

$$C = \epsilon \frac{A}{d} \approx 8.85 \times 10^{-12} F/m \frac{10(10^{-4}) m^2}{10^{-3} m} \approx 10^{-11} F = 10 \; pF$$

b) Laddningen på vardera plattan är

$$Q = C \cdot V \approx 10^{-11} F \cdot 12 \; V = 1.2 \times 10^{-10} C = 0.12 \; nC$$

Exempel:

Beräkna kapacitansen för en laddad sfär med radien R.

Lösning

Kapacitansens definition ger

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon \cdot R}} = 4\pi\epsilon R \tag{45}$$

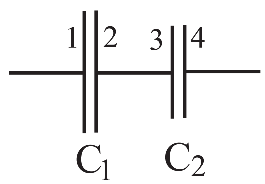
Vi kan nu uppskatta kapacitansen för jordklotet:

$$C_{jord} = 4 \cdot 3.14 \cdot 8.85 \times 10^{-12} F/m \cdot 6.4 \times 10^{6} m \approx 7.1 \times 10^{-4} F$$

Så en liten extra laddning $\Delta Q = 10^{-3}$ C ger potentialförändringen på jorden

$$\Delta V = \frac{\Delta Q}{C} \approx 1V \text{ !!}$$

Kondensatorer kopplade i serie



- Vi kopplar två kondensatorer **C**$_1$ och **C**$_2$ i serie
- Vi ser att ifall kondensatorplattan **1** får laddningen +Q, blir laddningen på platta **2**: -Q (laddning bevaras).

- Vidare får då platta **3** laddningen +Q (2 och 3 isolerade, summaladdning lika med noll), och platta **4**: -Q.

- Detta betyder att potentialskillnaden mellan de två kondensatorplattorna blir:

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} \qquad V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

- Vi får att den totala potentialskillnaden blir summan av dessa: $V = V_1 + V_2$.
- Från kapacitansens definition får vi då att

$$\frac{Q}{C} = V = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

- Detta ger att kapacitansen för de två kondensatorerna i serie är

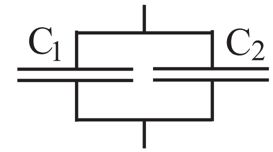
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

- Med en kondensator med kapacitansen **C** kan man ersätta **C**$_1$ och **C**$_2$.

- Mer generellt får man ekvationen för den ersättande kondensatorn kapacitans för många kondensatorer i serie som:

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots} \qquad (46)$$

Kondensatorer kopplade parallellt



- Betrakta två kondensatorer **C**$_1$ och **C**$_2$ som är parallellt kopplade.
- Potentialskillnaden V är den samma för båda kondensatorerna, vilket ger att
laddningarna på vardera kondensatorn blir

$$Q_1 = C_1 V \qquad Q_2 = C_2 V$$

- Summan av laddningarna och därmed också laddningen för den ersättande kondensatorn är: $Q = Q_1 + Q_2$, vilket ger

$$CV = C_1 V + C_2 V \qquad \Rightarrow C = C_1 + C_2$$

- Ekvationen för den ersättande kondensatorn för många kondensatorer parallellt kopplade blir

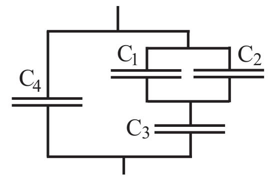
$$\boxed{C = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots} \qquad (47)$$

- Kondensatorernas ekvationer beter sig alltså exakt mittemot de hos motstånd!

Exempel:

Beräkna den totala kapacitansen för kondensatorkretsen i bilden.

Lösning



Först ser vi att kondensatorerna **1** och **2** är parallellt kopplade, så deras ersättande kapacitans blir: $C_{1,2} = C_1 + C_2$ Vidare har vi att $C_{1,2}$ och C_3 är i serie:

$$\frac{1}{C_{1,2,3}} = \frac{1}{C_{1,2}} + \frac{1}{C_3} = \frac{C_3}{C_{1,2}C_3} + \frac{C_{1,2}}{C_{1,2}C_3}$$

$$\Rightarrow C_{1,2,3} = \frac{C_3(C_1 + C_2)}{C_1 + C_2 + C_3}$$

Slutligen får vi den ersättande kapacitansen för kretsen då kondensatorn C_4 och $C_{1,2,3}$ är parallellt kopplade:

$$C = C_{1,2,3,4} = C_4 + C_{1,2,3} = C_4 + \frac{C_3(C_1 + C_2)}{C_1 + C_2 + C_3}$$

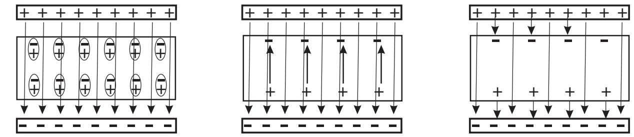
XV.11. Dielektriska material

De flesta kondensatorerna har **dielektriskt material** (plast mm.) mellan de ledande plattorna.

Detta för att:

- Isolera de ledande plattorna från varandra
- Alla isolerande material har ett maximielfält som de tål, innan elektroner i ämnet lösgör sig från atomerna vilka därefter lösgör mera elektroner. Detta kallas för **dielektriskt sammanbrott**.
  - Genom att ha dielektriskt material mellan plattorna, i stället för luft, kan man ha större elfält mellan plattorna, innan sammanbrottet sker.
  - Gränsen för dielektriskt sammanbrott kallas **dielektrisk styrka**.
- En kondensators kapacitans är större, ju större det dielektriska konstanten är, vilket betyder att man kan ladda kondensatorn med mera energi.

- Ett dielektriskt material kännetecknas av att det induceras ett elfält inne i materialet mot det yttre elfältet.
- Detta gör att det totala elfältet inne i materialet är mindre än det yttre. Detta sker för att det yttre elfältet resulterar i en liten förskjutning av elektronerna relativt till de positiva laddningarna.
- **Elektriska dipoler** blir **inducerade** i det dielektriska materialet. Man säger att det dielektriska materialet **polariseras**.



- Elfältet från de elektriska dipolerna ($\mathbf{E}_{dip}$) inne i materialet är i motsatt riktning till det yttre fältet $E_\circ$ och proportionellt till elfältets storlek inne i materialet

$$\mathbf{E}_{dip} = -\chi_e \mathbf{E}$$

där proportionalitetsfaktorn χ_e är materialets elektriska susceptibilitet och $\mathbf{E}$ är elfältet inne i materialt.

- Ekvationen för det totala elfältet inne i materialet blir det yttre fältet tillsammans med det inre

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\circ + \mathbf{E}_{dip} = \mathbf{E}_\circ - \chi_e \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_\circ}{1 + \chi_e}$$

där parametern: $1 + \chi_e = \epsilon_r$ kallas för materialets **relativa permittivitet** eller **dielektriska konstant** [1].

[1] Experimentellt märkte man att kapacitansen för en kondensator ökade, då man satte ett dielektriskt material mellan kondensatorplattorna: $C = \kappa C_\circ$, där $C_\circ$ är kapacitansen i vakuum (eller luft), och proportionalitetskoefficienten κ (> 1) kallas för dielektriska konstanten.

- Ifall ett dielektriskt material med dielektriska konstanten ϵ_r sätts i ett yttre elektriskt fält $\mathbf{E}_\circ$, ges det försvagade elfältetets storlek i ämnet av ekvationen

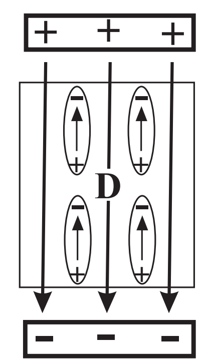
$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{E_\circ}{\epsilon_r} \qquad (48)}$$

- Tittar vi på den elektriska flödesdensiteten $\mathbf{D}$, ser man att flödet från dipolernas pluspol går in i minuspol, och flödesdensiteten inne i det dielektriska materialet är lika med flödesdensiteten utanför det.
- Utanför det dielektriska ämnet har vi: $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_\circ$ vilket skall vara samma som flödesdensiteten inne i ämnet: $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon \frac{\mathbf{E}_\circ}{1+\chi_e}$. Vi använder dessa likheter, för att få ekvationen

$$\boxed{\frac{\epsilon}{1 + \chi_e} = \epsilon_0 \qquad (49)}$$

Permittiviteten för ett ämne kan alltså ges som ($\epsilon_r = \kappa$)

$$\boxed{\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \quad eller \quad \epsilon = \kappa \epsilon_0 \qquad (50)}$$



• Den dielektriska konstanten för en ledare kan antas vara oändligt stor, vilket ger att elfältet är noll inne i ledaren. Nedan ser vi exempel på den dielektriska konstanten, för några valda ämnen: [2]

Ämne	dielektriska konstanten ϵ_r eller κ	Dielektriska styrkan ($\times 10^6$ V/m)
Vakuum	1	
Luft	1.00055	3 [a]
Glas	$\approx$ (3-6)	$\approx$ 40
Destillerat Vatten	$\approx$ 80	
Metall	$\approx \infty$	

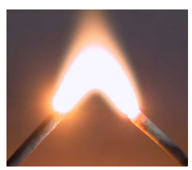
[a] Beror på luftfuktigheten

[2] Parametrarna för vissa ämnen beror starkt på temperaturen och frekvensen på det oscillerande elfältet.

• Ifall den dielektriska fältstyrkan överskrids, sker en urladdning.

• Urladdningen i en gas kallas **ljusbåge** om den är kontinuerlig, **gnista** om den är begränsad i tid och rum.

• **Åskblixtar** är en form av ljusbågar i atmosfären.


[*Wikipedia:ljusbÅge*]

Exempel.

Laddningen i en Van de Graaff-generator är i en sfär med radien 0.5 m. **a)** Vad är maximispänningen sfären kan laddas upp till om den befinner sig i luft?

b I moderna Van de Graaff-acceleratorer används ofta en tank med svavelhexafluorid SF_6 som isolatorgas. Till vilken spänning V kan sfären laddas i SF_6 ? Använd som värdet för den dielektriska styrkan för luft 3 MV/m och för SF_6 8.5 MV/m.

Lösning

Enligt Gauss lag, ekvation 16, är fältets magnitud just utanför sfären

$$|E| = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2} \tag{51}$$

medan kapacitensen för en sfär är, från ekv. 45,

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon \cdot R}} = 4\pi\epsilon R \tag{52}$$

ur vilket man får

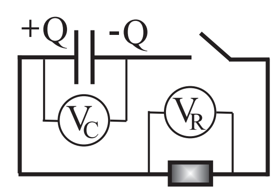
$$|E| = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2} = \frac{V 4\pi\epsilon R}{4\pi\epsilon R^2} = \frac{V}{R} \Longrightarrow V = |E|R \tag{53}$$

a) Insättning med gränsen $E = 3$ MV/m ger $V = 1.5$ MV

b) Insättning med gränsen $E = 8.5$ MV/m ger $V = 4.25$ MV

XV.12. R-C kretsar

• Hittills har vi endast tittat på tidsoberoende system, där spänningarna och strömmarna är konstanta hela tiden.



• Det första exemplet på tidsberoende kretsar ser vi till höger, där vi kombinerar ett motstånd med en kondensator.

• Vi betecknar spänningen över kondensatorn och över motståndet med V_C respektive V_R.

I början är kontakten bruten och kondensatorn är laddad

$$\begin{aligned} V_C &= \frac{Q}{C} \qquad Tiden\ t = 0 \\ V_R &= 0 \end{aligned}$$

• Sedan sluts kontakten och en ström börjar gå genom resistorn.

• Kondensatorn börjar urladdas (t>0), laddningen på kondensatorn minskar $\Delta q < 0$, vilket ger att strömmen genom motståndet blir: $I = -\frac{dq}{dt}$.

• Spänningarna över komponenterna som funktion av tiden:

$$V_C(t) = \frac{q}{C} \qquad V_R(t) = -R \cdot I = R\frac{dq}{dt}$$

• Vi använder Kirchhoffs andra lag, med strömmens riktning moturs

$$\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = 0$$

vilket är en differentialekvation där laddningen q på kondensatorn beror av tiden t.

• Vi flyttar över alla q-termerna till vänster och löser differentialekvationen

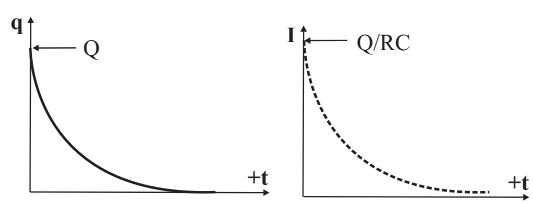
$$\begin{aligned}
\frac{dq}{q} &= -\frac{dt}{RC} \quad \Rightarrow \quad \int_Q^q \frac{dq'}{q'} = \frac{-1}{RC}\int_0^t dt' \\
\Big/_Q^q \ln(q') &= \frac{-t}{RC} \quad \Rightarrow \quad \ln(q) - \ln(Q) = ln\left(\frac{q}{Q}\right) = \frac{-t}{RC} \\
\Rightarrow q(t) &= Qe^{-\frac{t}{RC}}
\end{aligned} \tag{54}$$

där integrationsvariablerna q' and t' används så att de inte är samma som integrationsgränserna.

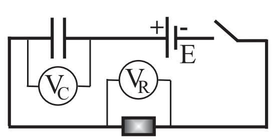
$\Rightarrow$ Urladdning av kondensatorn som en funktion av tiden

$$\boxed{I(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{Q}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}} \tag{55}$$

• Vi ritar laddningen på kondensatorn och strömmen dq/dt som funktion av tiden:



• Nu ser vi hur en kondensator laddas.



• I början är kontakten bruten och kondensatorn har ingen laddning.

• Sedan sluts kontakten och en ström börjar ladda kondensatorn. Kirchhoffs andra lag ger, då strömmen går motsols

$$E - \frac{q}{C} - R\frac{dq}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad EC - q - RC\frac{dq}{dt} = 0$$

• Vi gör variabelbytet $\theta = EC - q$ och får

$$\frac{d\theta}{dq} = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{dq}{dt}$$

vilket insätts i differentialekvationen: $\theta + RC\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{\theta} = -\frac{dt}{RC}$

• Detta ger sedan: $\ln(\theta) = -\frac{t}{RC} + konstant$, där konstanten fås från att då tiden t = 0, är $\theta = EC$

$$\begin{aligned}
\ln(EC - q) &= -\frac{t}{RC} + ln(EC) \\
\ln(EC - q) - ln(EC) &= -\frac{t}{RC} \\
\ln\left(\frac{EC - q}{EC}\right) &= -\frac{t}{RC} \\
\ln\left(1 - \frac{q}{EC}\right) &= -\frac{t}{RC} \\
1 - \frac{q}{EC} &= e^{-\frac{t}{RC}}
\end{aligned} \tag{56}$$

$\Rightarrow$ Kondensatorns laddning som en funktion av tiden

$$\boxed{q(t) = EC(1 - e^{-\frac{t}{RC}})} \tag{57}$$