

Elektromagnetismens grunder I

7 januari 2009, ~/latex/teaching/EM-I/EM_grunder_I.tex

I.1. Elektriska strömmar

Alla är bekanta med elektricitet, det är bara att stöpsla i el-sladden och trycka på apparaten. Vad är egentligen elektricitet? Hur kan man iaktta den?

För att se vad elektricitet gör, kopplar vi en metalltråd till batteriet¹ som i figuren. Vad vi nu kan iaktta är följande:

1. Ledningen blir varm
2. Det blir en kraft mellan ledningarna
3. Ett magnetfält bildas runt ledningen

Man definierar att strömmen I går från plus (+) till minus (-). För att få till stånd en ström måste man ha

1. Spänningskälla
2. Elektriskt ledande ledningar
3. Sluten krets

En sluten elektrisk krets kan jämföras med vattenkretsen bredvid, där batteriet motsvarar vattenpumpen som pumpar vatten till högre potentiell energi. De elektriska ledningarna motsvaras sedan av vattenrör, längs vilka vattnet rinner

¹ Ett batteri är en eller flera elektrokemiska celler vilka omvandlar kemisk energi till elektrisk. Det första batteriet gjordes av Alessandro Volta genom att placera en våt handduk mellan en koppar och en zinkplatta.

ner. Sedan kan en del av det rinnande vattnets energi användas till att göra arbete, liksom också elektronerna som "rinner" från högre potential till lägre kan få en lampa att lysa eller en motor att snurra.

I.1.1. Enheten för elektriskt ström

Ett sätt att definiera elektrisk ström, är att använda det faktum att finns en kraft mellan två ledare ifall ström går genom ledarna. Denna kraft per längdenhet är proportionellt till strömmarna i ledningen och inverst proportionellt till avståndet mellan ledningarna: $\frac{dF}{dl} = k \frac{I_1 I_2}{r}$. SI enheten för ström **ampere A**, definieras nu följande:

Den konstanta strömmen ampere är strömmen som producerar en kraft 2×10^{-7} newton per meter mellan två parallella oändligt långa ledare som är i vakuum och vars avstånd till varandra är 1 meter.

Denna definition ger nu konstanten k

$$\frac{dF}{dl} = 2 \times 10^{-7} \frac{I_1 I_2}{r} \quad (1)$$

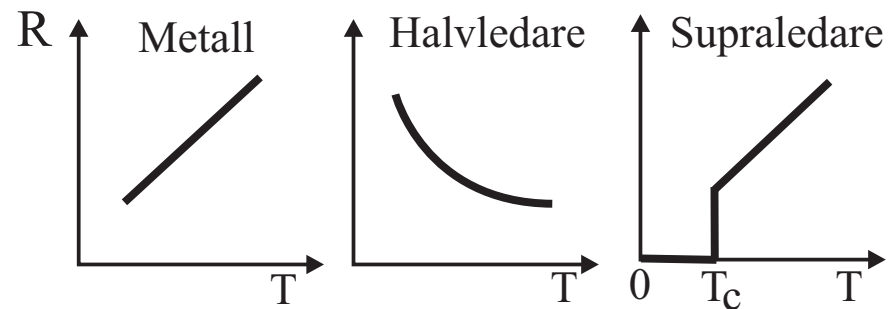
Elektriskt motstånd

Värmeeffekten som fås från en elektrisk ledare, genom vilken går en konstant ström I , är proportionellt till strömmen i kvadrat

$$P = \frac{\text{Energ}i}{dt} = \text{konstant} \cdot I^2 \quad (2)$$

Denna konstant har man gett namnet **resistans R**: $[R] = W/A^2 = \Omega$ (Ohm). Material för vilka ovanstående ekvation gäller kallas för **ohmiska** material. Metaller är i allmänhet ohmiska, och deras **elektriska motstånd eller resistans** beror bara av temperaturen (T) och inte av strömmen: $R_{metall} = R(T)$, konstant vid konstant temperatur. Icke ohmiska materials motstånd beror dessutom av strömmen som går genom dessa: $R = R(I, T)$

I figuren nedan, ser vi allmängiltiga temperaturberoenden av resistansen för metaller, halvledare och supraledare



I metaller, ökar resistansen p.g.a. att vid högre temperaturer oscillerar atomerna mera och elektronerna kolliderar med dessa oftare, vilket minskar elektronernas drifhastighet. Hos halvledarna kompenseras resistivitetsökningen p.g.a. värmerörelsen mer än väl av det faktum att de fria laddningsbärarnas antal växer exponentiellt som en funktion av temperaturen. Supraledarnas resistivitet är noll vid temperaturer som är mindre än den **kritiska temperaturen** T_c , vid vilken supraledningsförmågan förloras.

Symboler för elektriska komponenter



Det som gör att en ström går genom en ledning är man har en **spänningsskillnad** mellan ledningens ändor. Ju större spänningsskillnaden mellan en ohmsk ledares ändor är, desto större ström går genom ledaren, vilket kallas **Ohms lag**

$$V = RI = \frac{P}{I} \quad (3)$$

där V är spänningen över motståndet: $[V] = \Omega A = W/A = V$ (volt). Viktiga formler man får från ekv. (2) och (3)

$$P = RI^2 = VI = \frac{V^2}{R} \quad (4)$$

Motstånd kopplade i serie

Betrakta situationen där en krets har tre motstånd kopplade i serie. Effekten som förbrukas i dessa motstånd då strömmen I går genom kretsen är

$$P_{totalt} = R_1 I^2 + R_2 I^2 + R_3 I^2 = (R_1 + R_2 + R_3) I^2$$

Denna krets kan nu ersättas med endast ett motstånd som ger samma motstånd som de tre tillsammans

$$P_{totalt} = R I^2$$

Vi ser alltså att motstånd **kopplade i serie** kan adderas för att ge det totala motståndet

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_N \quad (5)$$

Innan vi tittar på en spänningskälla noggrannare, bör vi introducera en **spänningsfördelare**. Denna består av en spänningskälla och två motstånd. Spänningen för spänningskällan betecknas här med ett E som har samma enhet som spänning V , volt.

Strömmen i kretsen får vi från: $E = R \cdot I = (R_1 + R_2) I$

$$\Rightarrow I = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

Spänningsskillnaden mellan **a** och **b** blir då

$$V_{ab} = R_2 \cdot I = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Vi ser att med en spänningskälla, kan vi få olika värden på spänningen V_{ab} ($0 < V_{ab} \leq E$), genom att ändra på de två motståndarnas värden. Detta kan användas i kretsar för att sänka spänningen.

Nu kan vi betrakta en spänningskälla (eller batteri) noggrannare. En ideal spänningskälla har ingen resistans mellan polerna, men i verkligheten så finns det alltid en **inre resistans** som måste beaktas. I bilden nedan, har vi ritat en spänningskälla med inre resistans R_i och ett yttre motstånd, som kan vara en lampa, motor el.dyl.

På samma sätt som för spänningsfördelaren, får vi

$$\begin{aligned} E &= (R + R_i) \cdot I = R \cdot I + R_i \cdot I = V_{ab} + R_i \cdot I \\ \Rightarrow V_{ab} &= E - R_i \cdot I \end{aligned}$$

Vi ser alltså att spänningen som spänningskällan ger, V_{ab} , är mindre ju större strömmen är. För att en spänningskälla skall fungera bra, måste strömmen i kretsen vara liten, och den yttre resistansen måste vara mycket större än den inre. Då resistansen R minskar, ökar strömmen genom kretsen till ett maximivärde. Denna situation kallas för **kortslutning**, vilket förstör batteriet och kan orsaka brand.

I.1.2. Resistivitet

Sätter man en spänningen V mellan en ohmisk ledare, se figuren nedan, upptäcker man att strömmen är proportionellt till ledarens area A och inverst proportionellt till dess längd L : $I \propto A/L$. Detta ger från $V = RI$ att resistansen $R \propto L/A$. Proportionalitetskonstanten kallas för materialets **resistivitet**: ρ [ρ] = Ωm . Den totala resistansen ges av formeln:

$$R = \rho \frac{L}{A} \quad (6)$$

	Ämne	Resistivitet ρ (Ωm)
Ledare	Silver (Ag)	1.5×10^{-8}
Halvledare	kisel (Si)	30
Isolator	Glas	$10^{11} - 10^{13}$

Ofta används också det inversa värdet på resistiviteten, som kallas för **konduktiviteten**

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad (7)$$

Strömdensiteten definieras som ström dividerat med den vinkelräta arean som strömmen går igenom

$$J = \frac{I}{Area}$$

Ifall strömdensiteten inte är konstant i en ledare, definieras den som

$$\mathbf{J} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta A} \mathbf{n}$$

där riktningen för strömdensiteten är vinkelrät mot areaenheten ΔA , där n är enhetsvektorn för ytnormalen. Den totala strömmen som går genom en ledare fås genom att integrera strömdensiteten över hela tvärsnittsarean

$$I = \int_{Area} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} \quad (8)$$

Exempel:

En kapad kon har höjden h och dess snittytor har radierna a och b , se bild. Materialets resistivitet är ρ och anta att strömtätheten genom varje tvärsnittsyta är oberoende av avståndet till symmetriaxeln. Härled en formel för kroppens resistans mellan snittytorna.

Vi använder ekvationen: $dR = \rho \frac{dx}{A}$ för att beräkna den totala resistansen. För att få arean som en funktion av positionen, beräknar vi först radien för konen som en funktion av x :

Radien r är en lineär funktion av x

$$r(x) = P + Q \cdot x \quad (9)$$

för vilken gäller följande; $r(0) = a \Rightarrow$ konstanten $P = a$, och $r(h) = b \Rightarrow a + Q \cdot h = b \Rightarrow Q = \frac{b-a}{h}$, vilket också är riktningskoefficienten (dr/dx) för linjen. Vi har då att ekvationen för arean som en funktion av positionen x är

$$A(x) = \pi r(x)^2 = \pi \left(a + \frac{(b-a)}{h} x \right)^2 \quad (10)$$

Totala resistansen för blocket får vi genom integration

$$R = \int_0^h dR = \frac{\rho}{\pi} \int_0^h \frac{dx}{(a + Q \cdot x)^2} \quad (11)$$

där $Q (= \frac{b-a}{h})$ konstanten används för att göra formeln kortare. För att integrera detta, använder vi likheten

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a + Qx} \right) = \frac{-Q}{(a + Qx)^2} \quad (12)$$

Vi skriver alltså integralen i ekvivalent form

$$R = \frac{-\rho}{\pi Q} \int_0^h \frac{-Q \cdot dx}{(a + Qx)^2} \quad (13)$$

vilket ger

$$R = \frac{-\rho}{\pi Q} \Big|_0^h \frac{1}{(a + Qx)} = \frac{-\rho}{\pi Q} \left[\frac{1}{a + Qh} - \frac{1}{a} \right] \quad (14)$$

$$= \frac{\rho \cdot h}{\pi(b - a)} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a + b - a} \right] = \frac{\rho \cdot h}{\pi(b - a)} \left[\frac{b - a}{ab} \right] \quad (15)$$

$$= \frac{\rho \cdot h}{\pi ab} \quad (16)$$

Är resultatet rätt? Ifall vi har en cylinder (kon med $b = a$) får vi att $R = \frac{\rho \cdot h}{Area} = \frac{\rho \cdot h}{\pi a^2}$ vilket är OK!

Resistansens temperaturberoende

Resistiviteten för en metall ökar vanligtvis när temperaturen ökar. En funktion som bra beskriver den experimentella resistivitetsökningen som funktion av temperaturen T ges av en linjär funktion

$$\rho(T) = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)] \quad (17)$$

där ρ_0 är resistiviteten given vid temperaturen T_0 , och α är **resistivitetskoefficienten** som berättar hur mycket resistiviteten ändras med temperaturen.

Material	α [K ⁻¹]
Aluminium	0.0039
Grafit	-0.0005
Koppar	0.0393
Konstantan	0.00001

Exempel: En aluminiumtråds resistans vid 0 °C är 100 Ω. Vad är dess resistans vid 50 °C ?

$$R_{50} = R_0[1 + \alpha(50 - 0)] \approx 100 \Omega[1 + 0.004 \cdot 50] \approx 120 \Omega$$

Motstånd kopplade parallellt

För parallellt kopplade motstånd är spänningsskillnaden samma för alla motstånd, vilket ger att strömmen genom motståndet i är: $I_i = V_{ab}/R_i$. Summa strömmen är då lika med den ström som skulle gå i ekvivalentmotståndet: $\sum_i I_i = I = V_{ab}/R$

$$I = \frac{V_{ab}}{R} = \frac{V_{ab}}{R_1} + \frac{V_{ab}}{R_2} + \frac{V_{ab}}{R_3} + \dots \quad (18)$$

vilket ger, efter att man dividerar bort spänningen, storleken på det ekvivalenta motståndet som

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \quad (19)$$

Vi ser att för flera olika motstånd som är kopplade parallellt, går mest ström genom det motståndet som har den minsta resistansen. Vi ser också att det totala motståndet är mindre än för det minsta motståndet i kretsen.

Exempel: Fölv likadana motstånd R är kopplade till en krets som visas i figuren. Vad är resistansen mellan två hörn som är diagonalt motstående till varandra, (mellan punkterna **a** och **b**)?

En ekvivalent krets är kretsen bredvid, där vi ser att det ekvivalenta motståndet för de tre motstånden nära **a** är $R/3$, vilket också är det ekvivalenta motståndet för de tre motstånden nära **b**. De 6 motstånden i mitten kan ges ekvivalent som $R/6$. Nu får man det totala motståndet mellan **a** och **b** som en seriekoppling

$$R = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{5}{6}R$$

I.1.3. Kirchhoffs lagar

För att beräkna spänningsskillnaderna och strömmarna i elektriska kretsar, är **Kirchhoffs lagar** mycket användbara. Den första av dem säger att:

Totala antalet laddningar bevaras vid varje knutpunkt

$$\sum_i I_i = 0 \quad (20)$$

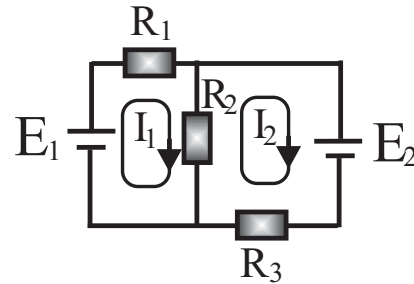
Den andra lagen beskriver hur laddningsbärarnas (elektroner) potentialskillnad i en krets ändrar. En laddningsbärare som går runt kretsen ett helt varv, måste vara i samma potential som innan.

Summan av potentialskillnaderna runt en krets är noll

$$\sum_i V_i = 0 \quad (21)$$

För att bättre förstå dessa lagar, tittar vi på ett par exempel:

Exempel: bilden nedan, har vi två spänningskällor och tre motstånd: $E_1 = 12.0 \text{ V}$, $E_2 = 8.0 \text{ V}$, $R_1 = 4.0 \Omega$, $R_2 = 4.0 \Omega$, $R_3 = 2.0 \Omega$. Beräkna strömmen genom varje motstånd.



Vi tittar på spänningsskillnaderna över varje komponent runt kretsen. Kirschhoffs andra lag ger följande ekvationer, där den övre ekvationen får vi då vi följer I_1 med början vid E_1

$$\begin{aligned} E_1 - I_1 R_1 - (I_1 - I_2) R_2 &= 0 \\ -E_2 - I_2 R_3 - (I_2 - I_1) R_2 &= 0 \end{aligned}$$

där potentialskillnaden är positiv då strömriktningen är från $-$ till $+$ genom en spänningskälla. Potentialskillnaden för ett motstånd är alltid negativ då man följer strömmen. Insättning av värdena ger att strömmarna blir

$$\begin{aligned} I_1 &= 1.25 \text{ A} \\ I_2 &= -0.50 \text{ A} \end{aligned}$$

Negativa strömmen för I_2 betyder att riktningen var fel vald. Den går alltså i motsatt

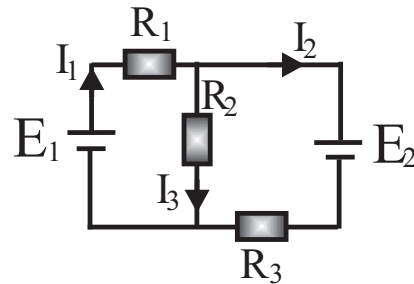
riktning än ritad i figuren. Slutliga strömmarna genom varje motstånd blir

$$I(R_1) = 1.25 \text{ A}$$

$$I(R_2) = I_1 - I_2 = 1.75 \text{ A}$$

$$I(R_3) = -I_2 = 0.5 \text{ A}$$

Vi kan också göra beräkningarna i föregående exempel med hjälp Kirchhoffs första lag.



$$E_1 - I_1 R_1 - I_3 R_2 = 0$$

$$-E_2 - I_2 R_3 + I_3 R_2 = 0$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$

vilket ger, då $I_3 = I_1 - I_2$, att de två översta ekvationerna blir

$$E_1 - I_1 R_1 - (I_1 - I_2) R_2 = 0$$

$$-E_2 - I_2 R_3 - (I_2 - I_1) R_2 = 0$$

vilket är exakt samma ekvationer som erhöles med Kirchhoffs andra lag.

Vilken metod man använder, kan envar själv bestämma. Ekvationerna blir färre men lite mer komplicerade med enbart Kirchhoffs andra lag.

Exempel: Energin som går förlorad då elektrisk energi blir till värme i en ledare kallas *joulevärme*. I detta exempel, skall vi planera hur elektricitetsförsörjningen till en stad borde skötas. I bilden bredvid ser vi en schematisk bild av situationen. Staden behöver en effekt på 100 MW. Beräkna strömmen i ledningarna mellan staden och kraftverket och hur mycket effekt som går förlorad i ledningarna, ifall spänningen över ledningarna är **a)** 2.5×10^5 V och **b)** 1.0×10^4 V

Strömmen i ledningarna är $I = \frac{P}{V}$ och effekten i ledningarna som går till värme är

$$P = I^2 R$$

Totala resistansen för ledningarna är $R = (5+5) \Omega = 10 \Omega$ vilket ger
a)

$$I = \frac{100 \times 10^6 \text{ W}}{2.5 \times 10^5 \text{ V}} = 400 \text{ A}$$

$$P = (400 \text{ A})^2 10 \Omega = 1.6 \times 10^6 \text{ W}$$

b)

$$I = \frac{100 \times 10^6 \text{ W}}{1.0 \times 10^4 \text{ V}} = 10^4 \text{ A}$$

$$P = (10^4 \text{ A})^2 10 \Omega = 10^9 \text{ W}$$

I **a)** fallet, ser vi att värmeeffekten som går förlorad är $1.6 \times 10^6 \text{ W} / 100 \times 10^6 \text{ W} \cdot 100\% = 1.6 \%$ av nyttoeffekten som går till staden, men i **b)** fallet är effekten förlorad i ledningarna som värme tio gånger större än effekten som staden får, ($10^9 \text{ W} / 100 \times 10^6 \text{ W} \cdot 100\% = 1000 \%$). Det lönar sig alltså att överföra elektrisk energi vid så hög potential som möjligt för att minimera strömmen och därmed effektförlusterna i ledningarna.

I.2. Elektriska fält

I tidigare kapitel om mekanik har vi löst rörelseekvationer för partiklar mellan vilka verkar en kraft. Den enda fundamentala kraften ifråga har varit gravitationskraften.

För tillfället vet vi av bara fyra olika fundamentala krafter i universum, av vilka gravitationskraften är en av dem. Den andra bekanta kraften är elektromagnetiska kraften som finns mellan olika laddade partiklar, och är orsaken till att elektronerna och atomkärnorna bildar neutrala atomer. Denna kraft är också orsaken till att atomerna binds till varandra för att bilda molekyler, vätskor och fasta ämnen.

De två sista krafterna är mindre bekanta och deras verkan kan bara iakttas på mycket små avstånd. Ena av dem kallas för den **starka växelverkan**, som håller atomkärnorna ihop. Den andra, kallad **svaga växelverkan**, spelar roll vid sönderfall av atomkärnor.

Den senaste tiden har olika teorier utvecklats för att kombinera dessa olika krafter, så att om några år kanske vår förståelse om de fundamentala krafterna är betydligt olika än nu.

1.2.1. Kraften mellan laddningar: Coulombs lag

Både gravitations- och den elektromagnetiska kraften har oändligt lång räckvidd. Gravitationskraften är alltid attraktiv, men den elektromagnetiska kraften kan vara antingen attraktiv eller repulsiv. I naturen har man observerat att stabila partiklar kan ha en egenskap kallad *elektrisk laddning*.

Partiklarna kan ha två olika sorts laddning, kallad **positiv** eller **negativ** laddning. Lika laddningar **repellerar** varandra och olika laddningar **attraherar** varandra.

Ifall vi har två laddningar q_1 och q_2 på ett avstånd r från varandra är den elektromagnetiska kraften, kallad **Coulombs lag** mellan dessa partiklar

$$\mathbf{F}_E = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (22)$$

där ϵ är **mediets permittivitet**. I vakuum har vi permittiviteten $\epsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$. En användbar konstant är

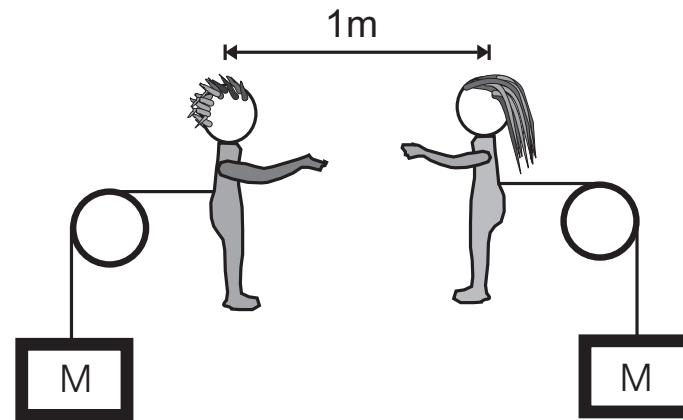
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

Den mest fundamentala enhetsladdningen hittar man hos en elektron och en proton, vilket beskrivs

med bokstaven **e**. Det approximativa värdet för enhetsladdningen är $e=1.6022 \times 10^{-19} \text{ C}$, där *C* står för förkortningen *Coulomb*.

För att förstå hur stark den elektromagnetiska kraften är, skall vi göra en approximativ jämförelse mellan denna kraft och gravitationskraften.

Exempel: Anta att vi har en pojke och en flicka 1 m från varandra, och pojken har 1 kg extra protoner i sig, och flickan en motsvarande antal extra elektroner. Hur stora massor måste vi hänga i repen, för att gravitationskraften på jordytan skall balansera den elektromagnetiska kraften?



Massan för en proton $\approx 2 \times 10^{-27}$ kg \Rightarrow 1kg motsvarar $1/2 \times 10^{-27} \approx 5 \times 10^{26}$ protoner

Den elektriska kraften är då

$$|F_E| \approx \frac{(5 \times 10^{26})^2 (1.6 \times 10^{-19})^2}{4 \cdot 3.14 \cdot 8.85 \times 10^{-12}} \approx 6 \times 10^{25} \text{ N}$$

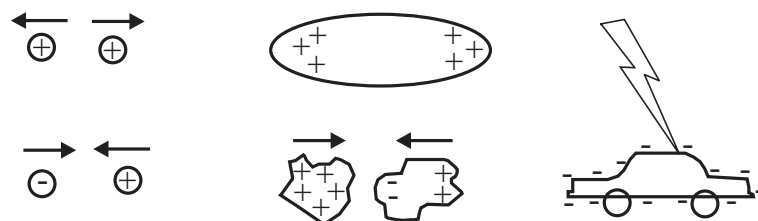
På jordytan borde vi då ha en motsvarande gravitationskraft

$$F_G \approx M \cdot g = F_E$$

$\Rightarrow M \approx \frac{F_E}{g} \approx 6 \times 10^{24}$ kg vilket är ungefär massan för jorden !!

Ordet *elektrisk* härstammar från det grekiska ordet för bärnsten (eng. amber), vilken har den egenskapen att ifall den gnids emot päls, så kan den attrahera andra objekt. Vad detta betyder är att bärnstenen har blivit **laddat**, d.v.s. att den har fått extra laddning.

Nedan har vi exempel på olika situationer med laddning.



Som vi kan se i den nedersta delen i mitten av bilden, så kan en attraktiv kraft **induceras** mellan en laddad kropp och en neutral kropp. I detta fall förflyttar sig de negativa laddningarna mot, och motsvarande de positiva laddningarna bort från den positiva kroppen. Detta kan även ske ifall kroppen är en **isolator, vilket betyder att den inte har mobila laddningar, leder inte ström**. I detta fall sker det **polarisation** av isolatorn, vilket betyder att de positiva och negativa laddningarna i de neutrala atomerna eller molekylerna rör sig en aning mot eller från den positiva kroppen, se bild.

Hela jorden kan tänkas vara en väldigt stor ledande kropp som är laddningsneutral, d.v.s. de positiva och de negativa laddningarnas antal är lika. Ifall en positivt laddad ledare kopplas till jorden med en ledare, kommer motsvarande antal negativa laddningar att flöda från jorden till den positivt laddade ledaren, som blir neutral. Man säger att kroppen är "jordad". Elektriska symboler som betecknar att något är jordat, ses i figuren bredvid.

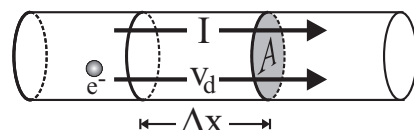
1.2.2. Den mikroskopiska tolkningen av elektrisk ström

I kapitel 14, definierades ström som orsak till kraften mellan två ledningar. Vi skall nu koppla ihop ström med laddningar i rörelse. I ledare, som t.ex. koppar och silver, rör sig fria elektroner hela tiden med en hastighet av ungefär 10^6 m/s. Ingen elektrisk ström går i ledaren, eftersom de fria elektronernas rörelseriktning är kaotisk, d.v.s. de rör sig åt vilket håll som helst. Då en spänningskälla (batteri) kopplas till en ledare, känner de fria elektronerna en kraft i riktningen av ledaren. Konsekvensen av detta är att, förutom den oordnade rörelsen, så får de fria elektronerna en **drifhastighet** längs ledaren, som kallas för **ström**.

Ström definieras som laddning dQ som går genom en area under ett tidsintervall dt

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad [I] = C/s = A \text{ (ampere)} \quad (23)$$

Exempel: Vi skall uppskatta hur stor drifhastigheten för elektronerna i en koppartråd är. Trådens diametern är 1 mm, och strömmen i tråden är 1 A. Elektrondensiteten i koppar $\rho^- \approx 10^{29}$ elektroner/m³.



Arean för tråden är: $A = \pi(d/2)^2$. På tiden Δt går elektronerna (med laddningen $|e|$) en sträcka $\Delta x = v_d \Delta t$. Summaladdning som går genom den gråa ytan A i figuren på tiden Δt blir volymen gånger laddningsdensiteten:

$$\Delta Q = \Delta V \cdot \rho^- \cdot |e| = A \cdot \Delta x \cdot \rho^- \cdot |e| = A \cdot v_d \Delta t \cdot \rho^- \cdot |e|$$

Vi får strömmen som laddning per tidsenhet

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = A \cdot v_d \cdot \rho^- \cdot |e|$$

Vilket ger en uppskattning på drifhastigheten för elektronerna i koppartråden

$$v_d = \frac{I}{A \cdot \rho^- \cdot |e|} \approx \frac{1 \text{ A}}{3.14 \cdot (0.5 \times 10^{-3} \text{ m})^2 10^{29} \text{ m}^{-3} 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}} \approx 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0.1 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

Alltså, då en strömbrytare till en lampa kopplas på, börjar elektronerna sakta driva längs den elektriska ledningen. Ifall ledningens längd från strömbrytaren till lampan är 10 m, räcker det ca. $10 \text{ m} / 10^{-4} \text{ m/s} = 10^5 \text{ s}$, vilket är längre tid än en dag för elektronerna från strömbrytaren att nå lampan. Erfarenheten har visat att lampan tänds i samma ögonblick som strömbrytaren trycks, vilket tyder på att mekanismen med vilken ström fortplantas är inte elektronernas drift. Vad som sker då en spänningskälla (batteri) kopplas till en ledare, är att ett **elektriskt fält** skapas och fortplantas med nära ljusets hastighet i ledaren. De fria elektronerna i hela ledningen känner en kraft nästan samtidigt p.g.a. detta elektriska fält.

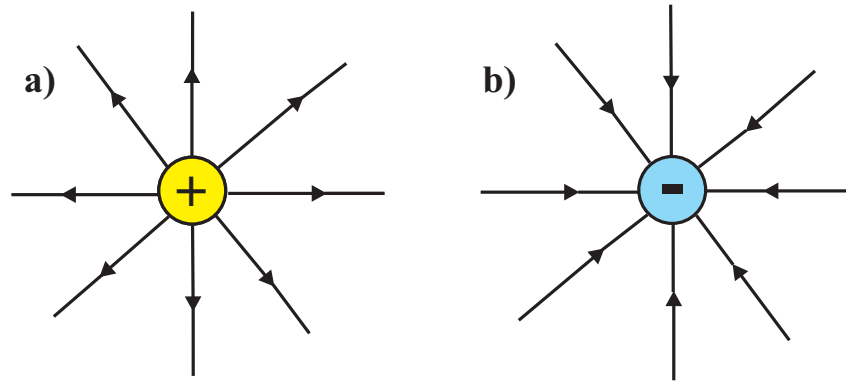
Innan vi närmare bekantar oss med detta nya fält, bör man nämna att en ström i en ledare kan också bero av att positiva laddningar rör på sig. Som sammanfattning, blir den totala strömmen i en ledare

$$I = \rho^+ \cdot |e|v_d^+ A + \rho^- \cdot |e|v_d^- A \quad (24)$$

där ρ är densiteten för laddningar i rörelse med drifhastigheten v_d som går genom en ledare med arean A . $^+$ eller $^-$ berättar ifall laddningarna är positiva eller negativa.

I.2.3. Elektriska fältstyrkan och flödesdensiteten

Det fält som förmedlar den elektriska kraften, kallar vi för ett **elektriskt fält**.² I bilden **a)** nedan har vi en positiv laddning från vilken ett elektriskt fält utgår och **b)** en negativ laddning till vilken de elektriska fältlinjerna går.



Man kan nu sätta en annan laddning i ett elfält, och beräkna **Coulomb-** eller den **elektriska-kraften** på denna laddning

$$\mathbf{F}_E = \frac{Q \cdot Q_0}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

²Analogt till detta, definierades **gravitationsfältet** som det fält som förmedlar gravitationskraften.

Storleken på det elektriska fältet från Q får vi från ekvationen

$$\mathbf{E} = \lim_{Q_0 \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{Q_0}$$

Där laddningen Q_0 bör gå mot noll, så att den inte själv påverkar Q :s laddningsfördelning. Den **elektriska fältstyrkan**, eller också kallad **elektriska fältet** eller bara **elfältet** från en punktladdning definieras då som

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (25)$$

Tidigare hade vi att gravitationskraften på jordytan kan skrivas som $F_G = m \cdot g$, vilket ger gravitationsfältet nära jordytan: $\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}_G}{m}$

Exempel: En punktladdning, $q = 10.0 \text{ nC}$, befinner sig vid origo. Beräkna den elektriska fältstyrkan vid punkten:

a) ($x = 1.0 \text{ m}$ och $y = 0$)

b) ($x = 3.0 \text{ m}$ och $y = 4.0 \text{ m}$)

Det elektriska fältet runt en punktladdning ges av: $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}\hat{\mathbf{r}}$

a)

Vektorn från origo till punkt **a)** ges av: $|r| = 1.0 \text{ m}$ och $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{i}}$, och vi får den elektriska fältstyrkan i denna punkt

$$\mathbf{E} \approx \frac{9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \cdot 10.0 \times 10^{-9} \text{ C}}{(1 \text{ m})^2} \hat{\mathbf{i}} = 90.0 \frac{\text{N}}{\text{C}} \hat{\mathbf{i}}$$

b)

Avståndet från origo till punkt **b)** är: $|r| = \sqrt{(3.0 \text{ m})^2 + (4.0 \text{ m})^2} = 5.0 \text{ m}$, och riktningen blir

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|r|} = \frac{3.0 \text{ m} \hat{\mathbf{i}} + 4.0 \text{ m} \hat{\mathbf{j}}}{5 \text{ m}} = 0.6 \hat{\mathbf{i}} + 0.8 \hat{\mathbf{j}}$$

Det elektriska fältet i punkten **b)** blir alltså:

$$\mathbf{E} \approx \frac{9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \cdot 10 \times 10^{-9} \text{ C}}{(5 \text{ m})^2} (0.6 \hat{\mathbf{i}} + 0.8 \hat{\mathbf{j}}) \approx (2.16 \hat{\mathbf{i}} + 2.88 \hat{\mathbf{j}}) \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Ett annat sätt att räkna är att beräkna magnituden av elfältet i punkten **b)**:

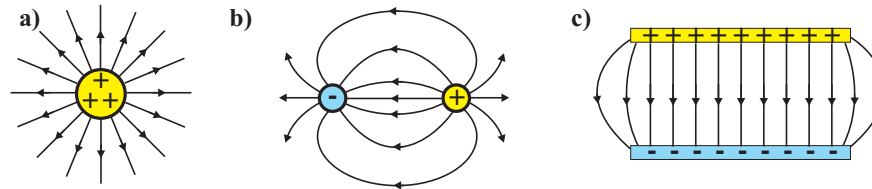
$$|\mathbf{E}| \approx \frac{9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \cdot 10 \times 10^{-9} \text{ C}}{(5 \text{ m})^2} = 3.6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Riktningen för elfältet får man från vinkeln mellan vektorn och x-axeln $\cos(\theta) = \frac{3m}{5m} = \frac{|\mathbf{E}_x|}{|\mathbf{E}|}$, vilket ger x- och y-komponenterna:

$$|\mathbf{E}_x| = \frac{3}{5} |\mathbf{E}| = 2.16 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$|\mathbf{E}_y| = \sqrt{|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{E}_x|^2} = 2.88 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Det elektriska fältet som omger en laddning, definierar man att börjar från en positiv laddning och går in i negativ laddning



Det totala **elektriska flödet** från en punktladdning Q definieras vara samma som laddningens storlek

$$\phi_E = Q \quad (26)$$

Detta är alltså totala 'antalet flödeslinjer' som utgår från en laddning. För att få storleken och riktningen på den elektriska fältstyrkan, definierar vi ytterligare en storhet som kallas **elektriska flödesdensiteten**:

$$\mathbf{D} = \left[\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi_E}{\Delta A} \right] \hat{\mathbf{n}} \quad (27)$$

där ΔA är en area och $\hat{\mathbf{n}}$ är en enhetsvektor i riktning av flödeslinjerna vinkelrät mot ytan ΔA . Detta till synes svåra definition klarar då man betraktar figuren nedan. Den **elektriska flödesdensiteten** ger bara hur många av de alla flödeslinjerna från laddningen Q genomkorsar en area A på olika avstånd från laddningen.

Den slutliga storleken på det **elektriska fältet** beror sedan av mediet runt laddningen. Mediets omgivning ger man som tidigare med ϵ , som är mediets **permittivitet**. I vakuum har vi permittiviteten ϵ_0 . Det elektriska fältet får man slutligen från ekvationen

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} \quad (28)$$

Tidigare fick vi storleken och riktningen på elfältet från en punktladdning genom att dividera Coulombkraften med laddningen, se ekv. (25). Som exempel, bestämmer vi på nytt detta elfält genom att se på laddningens flödeslinjer. Det totala elektriska flödet (antal flödeslinjer) från en punktladdning Q är: $\phi_E = Q$. Vid avståndet r från laddningen är sfärens area: $A = 4\pi r^2$. Alla flödeslinjer från laddningen korsar denna area, vilket ger det elektriska flödet på avståndet r från laddningen

$$\mathbf{D}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

där $\hat{\mathbf{r}}$ ger att riktningen är utåt från laddningen. Slutligen blir storleken på det elektriska fältet eller elfältet \mathbf{D} dividerat med mediet runt laddningen

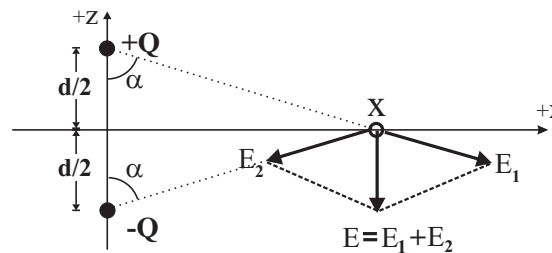
$$\mathbf{E}(r) = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

I.2.4. Det elektriska fältet från många laddningar eller från laddningsdistributioner

Vad händer ifall vi har flera laddningar som alla har ett eget elfält. I detta fall kan man beräkna det totala elfältet genom **superpositions principen**, d.v.s. summa alla elfältsvektorer till en resultantvektor.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \dots \quad (29)$$

Exempel: Två lika stora laddningar, ena positiv $+Q$ och den andra negativ $-Q$, befinner sig på avståndet d från varandra. Den positiva laddningen befinner sig $d/2$ ovanför och den negativa laddningen $d/2$ nedanför x -axeln. Ge en ekvation för det elektriska fältet på en godtycklig punkt på x -axeln.



Från figuren ser vi att elfältets x -komponenter tar ut varandra, och vi får det resulterande elfältet endast i z -riktningen. Avståndet från vardera laddningen till punkten på x -axeln är

$\sqrt{x^2 + d^2/4}$. Elfältet i z-riktningen från bägge laddningarna blir då

$$E_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{Q}{x^2 + d^2/4} \cos(\alpha) + \frac{Q}{x^2 + d^2/4} \cos(\alpha) \right]$$

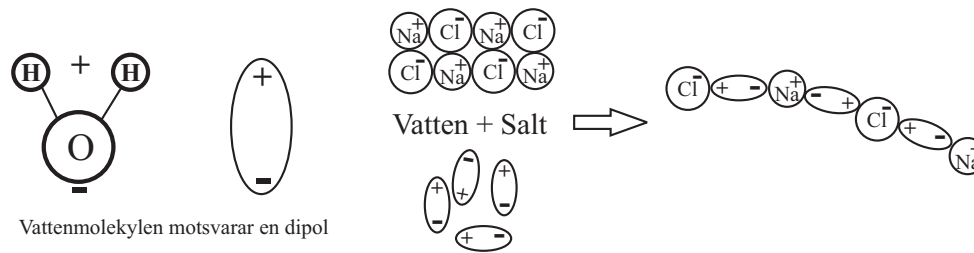
där, $\cos(\alpha) = (d/2)/\sqrt{x^2 + d^2/4}$, vilket slutligen ger:

$$E_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q \cdot d}{(x^2 + d^2/4)^{3/2}}$$

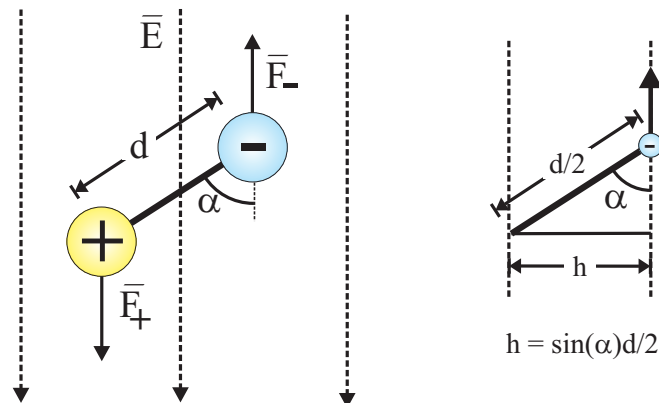
Långt från $\pm Q$, är $(x^2 + d^2/4)^{3/2} \approx x^3$ och vi får att **elfältet är inverst proportionellt till avståndet upphöjt till 3**

$$E_z \propto \frac{1}{x^3}$$

Kombinationen av två lika stora, men motsatt laddade laddningar kallas för en **elektrisk dipol**, vilken har en mycket viktig roll i naturen. Vattenmolekylen kan approximeras att vara en dipol, och de neutrala molekylerna eller atomerna i en isolator polariseras till dipoler i ett elfält. Vattnet är därför ett utmärkt lösningsmedel för joniska atomer. Till exempel salt NaCl, dissocieras till positiva Na^+ och negativa Cl^- joner, vilka dras till vattenmolekylens negativa, respektive positiva del. På detta sätt hålls Na^+ och Cl^- joner lösta från varandra.



Ifall vi sätter en dipol i ett elektriskt fält, blir summakraften på den negativa och positiva laddningen lika med noll. Magnituden för båda är $|F| = q \cdot E$. Däremot påverkar krafterna dipolen inte i samma linje, så att det totala vridmomentet inte är lika med noll, se bilden.



Vridmomentet på dipolen blir

$$\begin{aligned}\tau &= h \cdot \mathbf{F}_- + h \cdot \mathbf{F}_+ = \mathbf{F}_- \frac{d}{2} \sin(\alpha) + \mathbf{F}_+ \frac{d}{2} \sin(\alpha) = \mathbf{F}_- \cdot d \sin(\alpha) \\ &= qE \cdot d \sin(\alpha)\end{aligned}$$

där d är avståndet mellan laddningarna $\pm q$, E är det elektriska fältet och α är vinkeln mellan dipolen och elfältet.

Nu definierar vi en mycket storheten som kallas för **elektriska dipolmomentet** som längden mellan laddningarna på dipolen gånger laddningens storlek

$$\mathbf{p} = q \cdot \mathbf{d} \quad (30)$$

vilket är en vektor, vars riktning är från den negativa till den positiva laddningen. Vridmomentet på dipolen kan slutligen skrivas som

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (31)$$

Effekten på vridmomentet är att vrida dipolmomentet i elfältets riktning. Elfältet gör alltså arbete genom att vrida dipolen. Arbetet som görs av elfältet då den vrider dipolen en infinitesimal vinkel $-d\alpha$ är

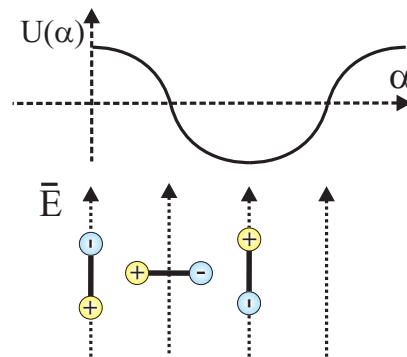
$$dW = \boldsymbol{\tau} \cdot -d\alpha = -pE \sin(\alpha) d\alpha$$

Totala arbetet från vinkeln α_1 till α_2 blir då

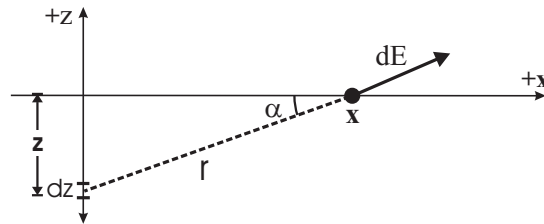
$$W = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (-pE \sin(\alpha)) d\alpha = pE [\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)]$$

Vi definierar att den potentiella energin är noll då dipolen är orienterad vinkelrät mot elfältet: $\mathbf{p} \perp \mathbf{E}$, $\alpha = 90^\circ$. Detta ger den potentiella energin för dipolen som en funktion av vinkeln

$$U(\alpha) = -pE \cos(\alpha) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad (32)$$



Exempel: detta exempel beräknar vi elfältet på x-axeln från en oändligt lång stav med laddningsdensiteten λ , $[\lambda] = \text{C/m}$.



I detta fall tar z-komponenterna ut varandra, så vi har kvar att beräkna det totala elfältet i x-riktningen. Från bilden får vi att dE från laddningen $dQ = \lambda \cdot dz$ blir

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{dQ}{r^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \frac{dz}{r^2}$$

x-komponenten av denna blir

$$dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \frac{\cos(\alpha) dz}{r^2}$$

Det totala elfältet får vi genom att integrera över hela staven

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha) dz}{r^2}$$

För att underlätta integreringen, försöker vi få alla termer i integralen som en funktion av vinkeln α

$$\tan(\alpha) = \frac{z}{x} \Rightarrow z = x \cdot \tan(\alpha) = x \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

vilket vi deriverar med avseende av α

$$\frac{dz}{d\alpha} = x \left[\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)} + \frac{\sin(\alpha)(-1)(-\sin(\alpha))}{\cos^2(\alpha)} \right] = x \left[\frac{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} \right] = \frac{x}{\cos^2(\alpha)}$$

vidare får vi att

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{r} \Rightarrow r = \frac{x}{\cos(\alpha)}$$

Vi sätter in resultaten av de två sista ekvationerna i integralen, som förenklas till

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon x} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\alpha) d\alpha$$

Integrationen med avseende av dz från $-\infty$ till ∞ har byts till integration med avseende

av vinkeln α från $-\pi/2$ ($-\infty = \tan(-\pi/2)$) till $\pi/2$ ($\infty = \tan(\pi/2)$). Vi integrerar

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon x} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(\alpha) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon x} [1 - (-1)] = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon x} \quad (33)$$

Elfältet minskar i detta fall som $1/r$, där r är det vinkelräta avståndet till den laddade oändligt långa staven.

Exempel: En jämnt laddad ring med radien R har totala laddningen $+Q$. Beräkna det elektriska fältet från ringen i en punkt som ligger på ringens axel, på avståndet z från ringens centrum (se bild)

Elfältena i x- och y-riktningarna tar ut varandra. Laddningsdensiteten $\lambda = Q/2\pi R$, så det elektriska fältet i z-riktningen från ds blir

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{ds \cdot \lambda \cos(\alpha)}{z^2 + R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{ds \cdot Q}{2\pi R} \frac{\cos(\alpha)}{(z^2 + R^2)}$$

Totala elektriska fältet fås då genom integrering över ringen

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{2\pi R} \frac{\cos(\alpha)}{(z^2 + R^2)} \int_0^{2\pi R} ds = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{2\pi R} \frac{\cos(\alpha)}{(z^2 + R^2)} \cdot 2\pi R$$

Vidare har vi att $\cos(\alpha) = z/\sqrt{z^2 + R^2}$ så elfältet blir

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Qz}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Observera att långt från ringen är $z \gg R$, vilket ger att elfältet från ringen blir lika med fältet från en punktladdning

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{z^2}$$

Exempel: En jämnt laddad skiva med radien R har totala laddningen $+Q$. Beräkna det elektriska fältet från skivan i punkt P som ligger på skivans axel, på avståndet z från skivans centrum (se bilden). Laddningsdensiteten för skivan är den totala laddningen dividerat med arean

$$\sigma = \frac{Q}{Area} = \frac{Q}{\pi R^2}$$

Laddningen i den infinitesimalt tunna ringen, ritad som en svart ring i figuren, är ringens area multiplicerat med laddningsdensiteten

$$dQ = dA \cdot \sigma = 2\pi r dr \cdot \sigma$$

Elfältet från denna ring i punkt P , avståndet z från ringen, tar vi från föregående exempel

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{2\pi r dr \cdot \sigma \cdot z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{2\epsilon} \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

Totala elfältet får vi igen genom integrering över hela skivans radie R

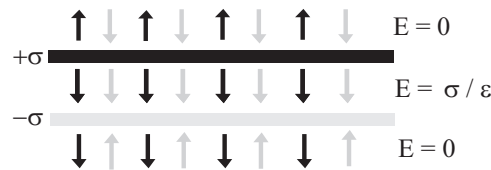
$$E_z = \frac{\sigma \cdot z}{2\epsilon} \int_0^R \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

För att förenkla integralen, gör vi substitutionen: $g = z^2 + r^2$, vilket ger att $r = \sqrt{g - z^2}$ och att $\frac{dg}{dr} = 2r = 2\sqrt{g - z^2}$. Integrationsgränserna ändras: $r = 0 \Rightarrow g = z^2$ och $r = R \Rightarrow g = z^2 + R^2$, vilket ger slutligen integralen

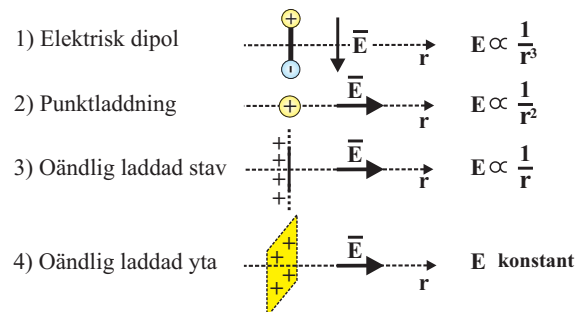
$$E_z = \frac{\sigma \cdot z}{2\epsilon} \int_{z^2}^{z^2+R^2} \frac{\sqrt{g - z^2} dg}{2\sqrt{g - z^2} g^{3/2}} = \frac{\sigma \cdot z}{2\epsilon} \int_{z^2}^{z^2+R^2} \frac{dg}{2g^{3/2}} = \frac{\sigma \cdot z}{2\epsilon} \int_{z^2}^{z^2+R^2} \frac{dg}{2g^{3/2}}$$

$$= \frac{\sigma \cdot z}{2\epsilon} \left|_{z^2}^{z^2+R^2} \frac{-1}{\sqrt{g}} = \frac{\sigma \cdot z}{2\epsilon} \left[\frac{-1}{\sqrt{z^2 + R^2}} + \frac{1}{z} \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{(R/z)^2 + 1}} \right]$$

Ifall vi är nära ringen, $z \ll R$, får vi att det elektriska fältet är konstant: $E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon}$.
 Det elektriska fältet är vinkelrät från ringen och alltså oberoende av avståndet från den. Det elektriska fältet från två motsatt laddade oändligt stora skivor, se bild, blir då:
 $E = \sigma/\epsilon$ mellan skivorna, och 0 utanför dessa.



Vi har nu fått fyra olika sätt på hur elfältets storlek ändrar med avståndet, vilka är ritade i figuren nedan



I.2.5. Gauss lag

I symmetriska fall³ kan beräkningarna av det elektriska fältet förenklas märkbart genom användningen av Gauss lag.

Tidigare definierades det totala **elektriska flödet** från en punktladdning Q att vara samma som laddningens storlek: $\phi_E = Q$. Ifall vi innesluter laddningen med en sluten yta, kommer alla de elektriska flödeslinjerna att korsa ytan och oberoende av ytans form, kommer ytintegralen

$$\phi_E = \int_{Area} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}$$

att vara konstant, där \mathbf{D} är elektriska flödesdensiteten och $d\mathbf{A} = dA\hat{n}$. \hat{n} är enhetsvektorn vinkelrät mot areaelementet dA

Från föregående likheten får vi nu Gauss lag:

Det totala elektriska flödet genom en sluten yta är lika med summan av de inneslutna laddningarna

$$\int_{Area} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \sum q \quad (34)$$

³Laddningen är fördelad på ett symmetriskt sätt.

där $\sum q$ är summan av alla laddningar som innesluts av den slutna arean. I ekvivalent ekvationsform uttryckt med elfältet ($\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$) blir Gauss lag

$$\int_{Area} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{\sum q}{\epsilon} \quad (35)$$

Exempel: Vi skall nu beräkna elfältet på avståndet r från en negativ punktladdning $-Q$, se figuren. Det elektriska fältet som pekar mot den negativa punktladdningen är sfäriskt symmetriskt, så vi använder Gauss lag. Vi innesluter punktladdningen i en sfär med radien r . Areavektorn $d\mathbf{A}$ är ut från punktladdningen

Gauss lag ger:

$$\int_{Area} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = |\mathbf{E}| \int_{Area} |d\mathbf{A}| = |\mathbf{E}|4\pi r^2 = \frac{-Q}{\epsilon}$$

vilket slutligen ger elfältet på avståndet r från laddningen

$$\mathbf{E} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Exempel: En punktladdning q befinner sig på tre olika platser:

- **a)** i mitten av kuben,
- **b)** i mitten av kuben, men närmare ena sidan
- **c)** i mitten av ena sidan, men utanför kuben

Beskriv vad det elektriska flödet genom alla 6 sidor blir i alla tre fallen

a) i mitten av kuben

Kubens alla sidor har samma area och är lika långt från laddningen.
Totala flödet genom alla sidorna från Gauss lag är q

- Totala flödet genom varje sida är: $\frac{q}{6}$

b) i mitten av kuben, men närmare ena sidan

- Flödena genom alla sidorna är positiv
- Flödet genom sidan som är närmast laddningen är störst
- Flödet genom sidan som är längst ifrån laddningen är minst
- Summan av flödena genom alla sidorna är: q

c) i mitten av ena sidan, men utanför kuben Den närmaste sidans ytnormal är riktad mot laddningen:

$$\Rightarrow \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} < 0$$

- Flödet genom den närmaste sidan är < 0 !!
- Flödet genom de fem andra sidorna är > 0
- Summan av flödena genom alla sidorna är 0 !!

Exempel: Vi beräknar på nytt elfältet från en oändligt lång laddad stav, där vi fick genom integrering: $E_x = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon \cdot x}$, där λ är laddning per längdenhet. I figuren, har vi placerat en cylinder runt staven

Gauss lag ger: $\int_{Area} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \sum q/\epsilon$. Det elektriska fältet går rakt ut från staven, och vid sidorna är elfältet parallellt med ytnormalen ($\mathbf{E} \parallel d\mathbf{A}$) $\Rightarrow \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E dA$ Vid baserna är elfältet vinkelrät mot ytnormalen ($\mathbf{E} \perp d\mathbf{A}$) $\Rightarrow \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0$. Vi får då att det totala flödet genom cylindern är lika med laddningen inne i cylindern

$$\int_{Area} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E 2\pi x h = \frac{h \cdot \lambda}{\epsilon}$$

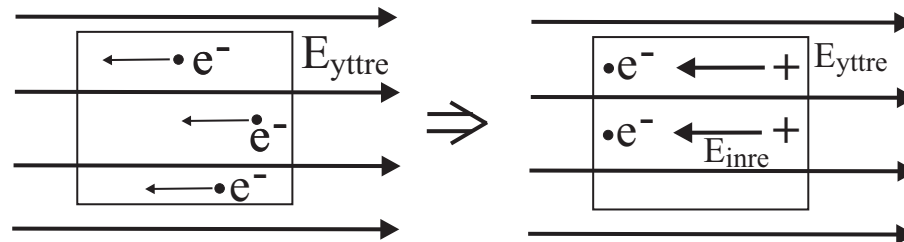
vilket ger att storleken på det elektriska fältet på avståndet x från staven blir (samma som i Ekv. 33)

$$|E_x| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon \cdot x}$$

I.2.6. Laddningar i en ledare

I en ledare, rör sig elektronerna mycket lätt, så att ett yttre elfält distribuerar dessa elektroner inne i ledaren. Ifall vi har ett yttre elfält, kommer de mobila elektronerna att röra sig mot elfältet, och ett inre elfält uppstår. Detta elfält kommer att bli så att det totala elektriska fältet inne i ledaren är noll

$$E_{totala} = \mathbf{E}_{yttre} + \mathbf{E}_{inre} = 0 \quad (36)$$



Elektronerna inne i ledaren, rör på sig tills det inre elfältet är noll. Och eftersom det totala elfältet inne i en ledare är noll, får man från Gauss lag att summaladdning inne i ledaren också är noll. Alla laddningarna befinner sig på ytan av ledaren.

Ifall vi har en kavitet i en ledare, finns det inga laddningar på ytan av kaviteten, fastän ledaren har en laddning. Men ifall inne i kaviteten finns en laddning $+Q$ (laddningen rör inte ledarens inre vägg), blir summaladdningen på ytan av kaviteten $-Q$.

Exempel: Ledaren i bilden har en total laddning $+10 \text{ nC}$. Inne i ledaren har vi en från ledaren isolerad laddning av storleken -16 nC . Vad blir summaladdningarna på kavitetens yta och på ledarens yta?

Vi ritar en Gauss yta runt den inre kaviteten. Eftersom elfältet inne i ledaren är noll, måste summaladdningen inne i Gauss ytan vara noll. Laddningen inne i kaviteten är -16 nC , så att laddningen på kavitetens yta måste vara $+16 \text{ nC}$.

Den totala laddningen för ledaren är $+10 \text{ nC} = Q_{\text{yta}} + Q_{\text{kavitetetyta}} \Rightarrow Q_{\text{yta}} = +10 \text{ nC} - Q_{\text{kavitetetyta}} = +10 \text{ nC} - 16 \text{ nC} = \underline{-6 \text{ nC}}$.

1.2.7. Arbete och den elektriska potentiella energin

Nutidens samhälle är helt beroende av elektrisk energi. För att definiera den elektriska energin, betraktar vi en liten punktladdning dQ som förs från punkt A till B i ett elektriskt fält. Arbete som görs under förflyttningen från A till B är

$$W_{A \Rightarrow B} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = dQ \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (37)$$

Den elektriska kraften är en konservativ kraft, vilket betyder att vi kan ge arbetet med hjälp av **potentiell energi**

$$W_{A \Rightarrow B} = U_A - U_B = -(U_B - U_A) = -\Delta U \quad (38)$$

där ΔU är potentiella energiförändringen.

Exempel: Elektriska potentiella energin i ett konstant elfält

Betrakta det konstanta elektriska fältet från en oändligt stor laddad platta. Vad är den elektriska potentiella energin som en funktion av höjden ovan plattan för en laddning dQ ?

Elfältet ovan plattan har vi redan två gånger bestämt vara: $E_z = \textit{konstant} = \frac{\sigma}{2\epsilon}$, där σ är plattans laddningsdensitet. Arbetet för att förflytta en laddning från 0 till z blir

$$W_{0 \Rightarrow z} = U(0) - U(z) = dQ \int_0^z \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = dQ \int_0^z E_z dl \cos(\alpha)$$

där α är vinkeln mellan elfältet och förflyttningsvektorn $d\mathbf{l}$. Vid ytan definierar vi att den potentiella energin är noll ($U(0)=0$). Vi får då att den potentiella energin som en funktion av höjden blir

$$U(z) = -dQ \int_0^z E_z dz = -dQ E_z \int_0^z dz = -dQ E_z z$$

För att flytta en laddning $-Q$ från 0 till z går det åt energin

$$- (-Q) \cdot E \cdot z = QEz > 0$$

Vi sätter in arbetet ($-QEz$) mot elfältet, och samtidigt ökar vi den potentiella energin för laddningen lika mycket.

Fråga: Hur mycket arbete måste man göra för att flytta en negativ laddning från plattans yta till $z = \infty$?

Exempel Elektriska potentiella energin för system med två laddningar

Betrakta laddningarna, där den lilla laddningen dQ är i det radiella elektriska fältet $\mathbf{E} = \frac{Q\hat{r}}{4\pi\epsilon r^2}$. Vad är den elektriska potentiella energin för systemet som en funktion av avståndet mellan laddningarna?

Den potentiella energin för systemet ges av potentialskillnaden mellan platserna A och B

$$\begin{aligned} W_{A \Rightarrow B} &= U(A) - U(B) = dQ \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = dQ \int_A^B E dl \cos(\alpha) \\ &= dQ \int_{r_A}^{r_B} E(r) dr = \frac{dQ \cdot Q}{4\pi\epsilon} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{dQ \cdot Q}{4\pi\epsilon} \left| -\frac{1}{r} \right|_{r_A}^{r_B} = \frac{dQ \cdot Q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{-1}{r_B} - \frac{-1}{r_A} \right] \end{aligned}$$

där α är vinkeln mellan elfältet och förflyttningsvektorn $d\mathbf{l}$. Vi ser att ifall $r_B = \infty$ får vi att

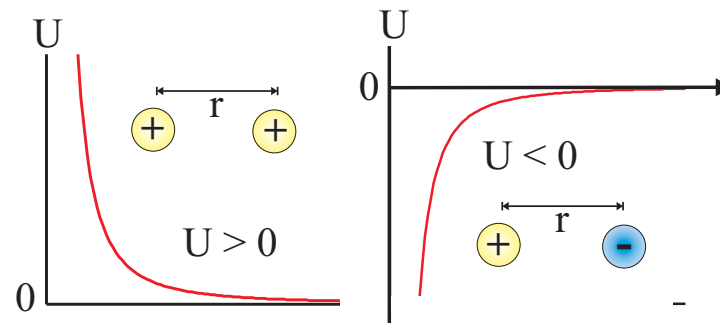
$$W_{A \Rightarrow B} = U(A) - U(\infty) = \frac{dQ \cdot Q}{4\pi\epsilon r_A}$$

Så vi får att den potentiella elektriska energin för systemet som en funktion av avståndet

mellan laddningarna är

$$U(r) = \frac{dQ \cdot Q}{4\pi\epsilon r} \quad (39)$$

Nedan ser vi den potentiella energin för tvårladdningssystemet som funktion av avståndet mellan laddningarna. Ifall $U < 0$ är laddningarna bundna till varandra, och energi behövs för att upplösa systemet (dra laddningarna från varandra).



Ifall vi vill ha den potentiella energin för många punktladdningar, måste vi summa alla

potentiella energier

$$U_{Tot} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i < j} \frac{Q_i \cdot Q_j}{r_{ij}} \quad (40)$$

där summan måste göras för alla par bara en gång ($i < j$)

I.2.8. Elektrisk potential

Den elektriska potentiella energin behövde hela tiden en testladdningen. Nu definierar vi **elektrisk potential**, som potentiella energin per enhetsladdning

$$V = \frac{U}{Q_0} \quad (41)$$

vilket liknar definitionen för det elektriska fältet

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q_0} \quad (42)$$

[V] = V (volt) = J/C. Potentialen för en punktladdning blir

$$V = \frac{U}{Q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r} \quad (43)$$

Potentialen är mycket användbar i situationer där vi inte vet laddningen som sätts i elfältet; vi kan först beräkna potentialen från alla laddningarna, och sedan sätta in vilken laddning som helst för att beräkna den potentiella energin. Oftast så är det enklast att beräkna den potentiella energin

från potentialskillnaden. Ibland när man vet det elektriska fältet (vanligtvis konstant), får man potentialskillnaden mellan punkt **a** och **b** genast som

$$V_a - V_b = \frac{W_{a \Rightarrow b}}{Q_o} = \frac{1}{Q_o} \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (44)$$

För konstant elfält blir detta

$$V_a - V_b = E \cdot (b - a) \quad (45)$$

alltså kan elfältets enhet också vara: $[\mathbf{E}] = \mathbf{N}/\mathbf{C} = \mathbf{V}/\mathbf{m}$, av vilka den senare oftast används.

En elektron som accelereras av en potentialskillnad 1 V, får kinetiska energin: $1 \text{ eV} \approx 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$.

Exempel: En elektron placeras i ett konstant elfält mellan två laddade skivor.

a) Ifall magnituden för det konstanta elfältet är 3.0×10^4 V/m (eller N/C), så vad är accelerationen för elektronen?

b) Anta att elektronen är först i vila vid den negativa plattan, och sedan börjar accelereras mot den positiva. Vad är sluthastigheten för elektronen just innan den träffar den positiva ytan? Avståndet mellan skivorna är 1.0 cm.

a)

Kraften är det elektriska fältet gånger laddningen, vilket ger: $|F| = |E| \cdot Q = m_e \cdot a$

$$\Rightarrow a = \frac{e \cdot E}{m_e} \approx \frac{1.6 \times 10^{-19} C \cdot 3 \times 10^4 N/C}{9.1 \times 10^{-31} kg} \approx 5 \times 10^{15} \frac{m}{s^2}$$

b) Metod 1

$$v = v_0 + a \cdot t \quad v_0 = 0 \Rightarrow t = \frac{v}{a} \quad (46)$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

vilket ger genom insättning av tiden från Ekv.(46)

$$x - x_0 = \frac{v^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2a(x - x_0)} \approx 1.0 \times 10^7 m/s$$

b) Metod 2, Potentialen för elektronen, som i början är: $V = E \cdot (x - x_0)$, omvandlas till kinetisk energi

$$U = V \cdot Q = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2VQ}{m_e}} = \sqrt{\frac{2E(x - x_0)e}{m_e}} \approx 1.0 \times 10^7 \text{ m/s}$$

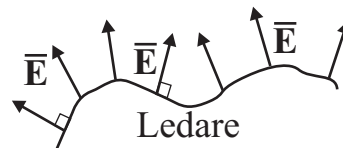
Ekvipotentialytor

En 3-dimensionell yta där potentialskillnaden är den samma i alla punkter, kallas för en **ekvipotential-yta**. Det elektriska fältet är alltid vinkelrät mot en ekvipotentialyta.

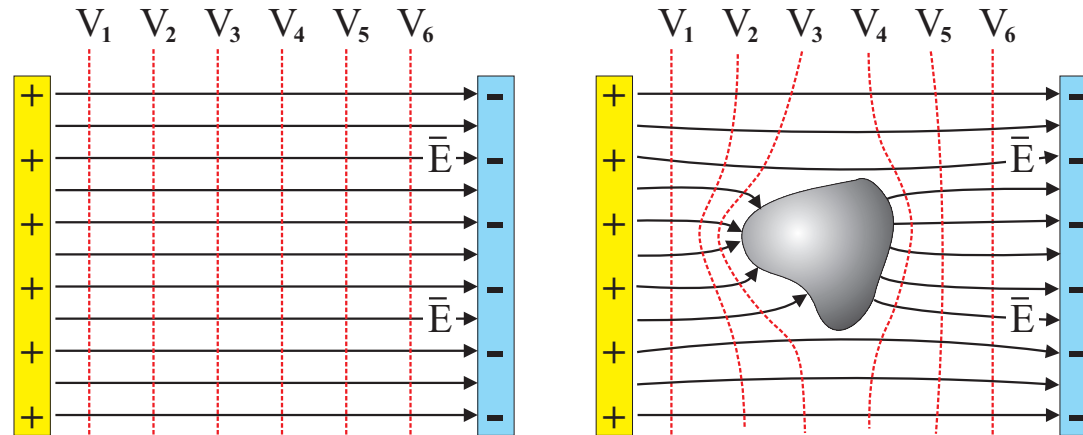
Det elektriska fältet från en ledare är vinkelrät mot ledarens yta.

Bevis: ifall det inte vore så, skulle laddningarna på ytan röra på sig tills påståendet är uppfyllt.

Detta betyder att inget arbete görs då en laddning förflyttas på ytan av en ledare. En ledares yta är alltså en ekvipotentialyta.



Nästa figur visar hur elfältet och ekvipotentialytorna ändras då en ledare sätts in i ett elektriskt fält. Vänstra bilden visar det jämna elfältet och ekvipotentialytorna. I den högra bilden ser vi att ledaren böjer elfältet så att de alltid är vinkelräta mot ytan av ledaren. Märk också att ekvipotentialytorna är alltid vinkelräta mot elfältet.



Bestämning av elfältet från den elektriska potentialen

På samma sätt som man fick gravitationskraften från gravitationspotential, får man det elektriska fältet från den elektriska potentialen. Potentialen är en skalär storhet, d.v.s. den har ingen riktning. Är det då möjligt att från potentialen beräkna elfältet?

Potentialskillnaden mellan punkterna a och b definierades som: $V_a - V_b = \int_b^a dV = - \int_a^b dV$.

Vidare hade vi att

$$V_a - V_b = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

från vilka vi får likheten

$$-dV = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (47)$$

För att beräkna potentialskillnaden, skriver vi ut komponenterna för vektorerna \mathbf{E} och $d\mathbf{l}$:

$$\mathbf{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k} \quad d\mathbf{l} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$$

Från vilket vi får potentialskillnaden

$$-dV = E_x dx + E_y dy + E_z dz \quad (48)$$

Ifall vi betraktar situationen där förflyttningen i y- och z-riktningarna är noll: $dy = dz = 0$, får vi

$$-dV = E_x dx$$

alltså

$$E_x = -(dV/dx)_{y,zkonstant} \quad (49)$$

Vi får alltså komponenten av elfältet i en viss riktning genom att derivera potentialen i den riktningen. Det elektriska fältet kan då skrivas med hjälp av potentialen som:

$$\mathbf{E} = - \left(\frac{\delta V}{\delta x} \hat{i} + \frac{\delta V}{\delta y} \hat{j} + \frac{\delta V}{\delta z} \hat{k} \right) \quad (50)$$

eller kortare får man \mathbf{E} som **gradienten** av potentialen

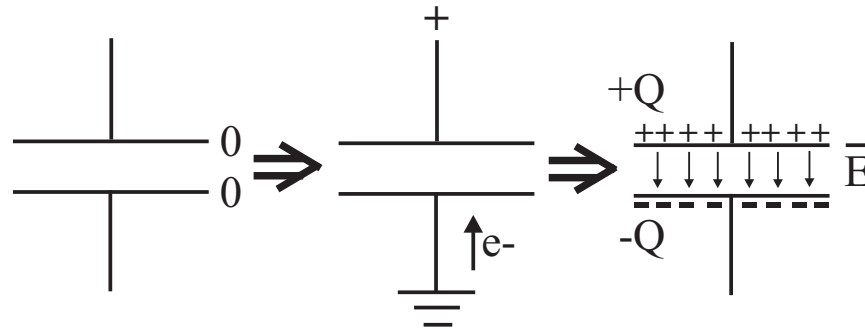
$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (51)$$

där operatorn ∇ kallas för **nabla**

$$\nabla = \left(\frac{\delta}{\delta x} \hat{i} + \frac{\delta}{\delta y} \hat{j} + \frac{\delta}{\delta z} \hat{k} \right) \quad (52)$$

I.2.9. Kondensatorer

En kondensator är en krets som kan lagra elektrisk potentiell energi. Vilka två ledare som helst separerade av vakuum eller dielektrisk material fungerar som en kondensator. På bilden nedan, visas hur man kan ladda en kondensator



Först har vi laddningen $\pm Q$ på kondensatorplattorna. Det elektriska fältet är proportionerligt till laddningen: $E \propto Q$. Ifall elfältet är konstant, kan den elektriska potentialen skrivas som: $V = E \cdot d$, där d är avståndet mellan plattorna. Detta betyder att också potentialen är proportionerligt till laddningen: $V \propto Q$. Proportionalitetskonstanten har fått namnet **C**, **kapacitans**:

$$C = \frac{Q}{V}, \quad [C] = \frac{C}{V} = F \text{ (farad)} \quad (53)$$

Olika kroppar har olika förmåga att lagra laddning, så värdet på kapacitansen beror på geometrin, storleken och ämnet mellan kondensatorplattorna.

Vi försöker nu beräkna hur stor är kapacitansen för två kondensatorplattor. Vi antar att plattornas area är stort och att avståndet mellan plattorna är litet, så att det elektriska fältet mellan plattorna kan antas vara konstant.

Det konstanta elfältet mellan plattorna är:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q}{A \cdot \epsilon}$$

där σ är laddningsdensiteten och ϵ är permittiviteten för mediet mellan plattorna. Q är storleken på laddningen i en av plattorna och A är dess area. Vidare har vi att potentialen för systemet kan skrivas som en funktion av elfältet:

$$V = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = Ed = \frac{Qd}{A \cdot \epsilon}$$

Vi får då från kapacitansens definition, kapacitansen för två kondensatorplattor

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q \cdot A \cdot \epsilon}{Qd} = \epsilon \frac{A}{d} \quad (54)$$

kapacitansen beror i detta fall endast av arean, avståndet mellan plattorna och av mediet mellan plattorna.

Energin i en laddad kondensator

Energi kan laddas i en kondensator. Energin ΔW som behövs för att ladda en kondensator från laddningen q till $q + \Delta q$ är: $\Delta W = V \Delta q$, där V är spänningen över kondensatorn då dess laddning är q . Den totala energin lagrad i kondensatorn vars slutliga laddning är Q blir:

$$W_C = \int_0^Q V dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C} \quad (55)$$

där kondensatorns definition: $V = Q/C$ använts. Energin lagrad i en kondensator kan skrivas i ekvivalet form (som liknar den kinetiska energin)

$$W_C = \frac{1}{2} CV^2 \quad (56)$$

Exempel:

Vi har två kondensatorplattor med arean 10 cm^2 på avståndet 1 mm från varandra i luft, $\epsilon_{\text{luft}} \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$. Spänningen eller potentialen mellan plattorna är 12 V .

- Beräkna kapacitansen för systemet
- Beräkna magnituden på laddningen i vardera plattan

a) Kapacitansen för systemet är:

$$C = \epsilon \frac{A}{d} \approx 8.85 \times 10^{-12} F/m \frac{10(10^{-4})m^2}{10^{-3}m} \approx 10^{-11} F = 10 pF$$

b) Laddningen på vardera plattan är

$$Q = C \cdot V \approx 10^{-11} F \cdot 12 V = 1.2 \times 10^{-10} C = 0.12 nC$$

Exempel: Beräkna kapacitansen för en laddad sfär med radien R .

Kapacitansens definition ger

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon \cdot R}} = 4\pi\epsilon R \quad (57)$$

Vi kan nu uppskatta kapacitansen för jorden:

$$C_{jord} = 4 \cdot 3.14 \cdot 8.85 \times 10^{-12} F/m \cdot 6.4 \times 10^6 m \approx 7.1 \times 10^{-4} F$$

Så en liten extra laddning $\Delta Q = 10^{-3} \text{ C}$ ger potentialförändringen på jorden

$$\Delta V = \frac{\Delta Q}{C} \approx 1 \text{ V} !!$$

Kondensatorer kopplade i serie

Vi kopplar två kondensatorer C_1 och C_2 i serie:

Vi ser att ifall kondensatorplattan **1** får laddningen $+Q$, blir laddningen på platta **2**: $-Q$ (laddning bevaras).

Vidare får då platta **3** laddningen $+Q$ (2 och 3 isolerade, summaladdning lika med noll), och platta **4**: $-Q$. Detta betyder att potentialskillnaden mellan de två kondensatorplattorna blir:

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} \quad V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

Vi får att den totala potentialskillnaden blir summan av dessa: $V = V_1 + V_2$. Från kapacitansens definition får vi då att

$$\frac{Q}{C} = V = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

Vilket ger att kapacitansen för de två kondensatorerna i serie är

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Med en kondensator med kapacitansen C kan man ersätta C_1 och C_2 . Mer generellt får man

ekvationen för den ersättande kondensatorn kapacitans för många kondensatorer i serie som:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \quad (58)$$

Kondensatorer kopplade parallellt

Ifall två kondensatorer C_1 och C_2 är parallellt kopplade:

Potentialskillnaden V är den samma för båda kondensatorerna, vilket ger att laddningarna på vardera kondensatorn blir

$$Q_1 = C_1V \quad Q_2 = C_2V$$

Summaladdningen och därmed också laddningen för den ersättande kondensatorn är: $Q = Q_1 + Q_2$, vilket ger

$$CV = C_1V + C_2V \quad \Rightarrow \quad C = C_1 + C_2$$

Ekvationen för den ersättande kondensatorn för många kondensatorer parallellt kopplade blir

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots \quad (59)$$

Exempel: Beräkna den totala kapacitansen för kondensatorkretsen i bilden.

Först ser vi att kondensatorerna **1** och **2** är parallellt kopplade, så deras ersättande kapacitans blir: $C_{1,2} = C_1 + C_2$ Vidare har vi att $C_{1,2}$ och C_3 är i serie:

$$\frac{1}{C_{1,2,3}} = \frac{1}{C_{1,2}} + \frac{1}{C_3} = \frac{C_3}{C_{1,2}C_3} + \frac{C_{1,2}}{C_{1,2}C_3}$$
$$\Rightarrow C_{1,2,3} = \frac{C_3(C_1 + C_2)}{C_1 + C_2 + C_3}$$

Slutligen får vi den ersättande kapacitansen för kretsen då kondensatorn C_4 och $C_{1,2,3}$ är parallellt kopplade:

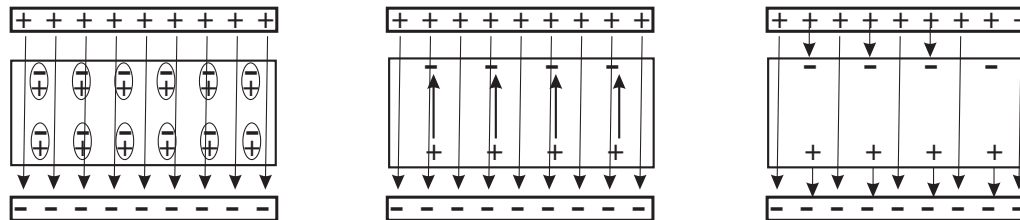
$$C = C_{1,2,3,4} = C_4 + C_{1,2,3} = C_4 + \frac{C_3(C_1 + C_2)}{C_1 + C_2 + C_3}$$

I.2.10. Dielektriska material

De flesta kondensatorerna har **dielektriskt material** (plast mm.) mellan de ledande plattorna. Detta för att:

- Isolera de ledande plattorna från varandra
- Alla isolerande material har ett maximielfält som de tål, innan elektroner i ämnet lösgör sig från atomerna vilka därefter lösgör mera elektroner. Detta kallas för **dielektriskt sammanbrott**. Genom att ha dielektriskt material mellan plattorna, i stället för luft, kan man ha större elfält mellan plattorna, innan sammanbrottet sker
- En kondensators kapacitans är större, ju större det dielektriska konstanten är, vilket betyder att man kan ladda kondensatorn med mera energi.

Ett dielektriskt material kännetecknas av att det induceras ett elfält inne i materialet mot det yttre elfältet. Detta gör att det totala elfältet inne i materialet är mindre än det yttre. Detta sker för att det yttre elfältet resulterar i en liten förskjutning av elektronerna relativt till de positiva laddningarna. **Elektriska dipoler** blir **inducerade** i det dielektriska materialet. Man säger att det dielektriska materialet **polariseras**.



Elfältet från de elektriska dipolerna (\mathbf{E}_{dip}) inne i materialet är i motsatt riktning till det yttre fältet

E_o och proportionellt till elfältets storlek inne i materialet

$$\mathbf{E}_{dip} = -\chi_e \mathbf{E}$$

där proportionalitetsfaktorn χ_e är materialets elektriska susceptibilitet och \mathbf{E} är elfältet inne i materialet. Ekvationen för det totala elfältet inne i materialet blir det yttre fältet tillsammans med det inre

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_o + \mathbf{E}_{dip} = \mathbf{E}_o - \chi_e \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_o}{1 + \chi_e}$$

där parametern: $1 + \chi_e = \epsilon_r$ kallas för materialets **relativa permittivitet** eller **dielektriska konstant**⁴. Ifall ett dielektriskt material med dielektriska konstanten ϵ_r sätts i ett yttre elektriskt fält \mathbf{E}_o , ges det försvagade elfältets storlek i ämnet av ekvationen

$$\mathbf{E} = \frac{E_o}{\epsilon_r} \quad (60)$$

Tittar vi på den elektriska flödesdensiteten \mathbf{D} , ser man att flödet från dipolernas pluspol går in i minuspole, och flödesdensiteten inne i det dielektriska materialet

⁴Experimentellt märkte man att kapacitansen för en kondensator ökade, då man satte ett dielektriskt material mellan kondensatorplattorna: $C = \kappa C_o$, där C_o är kapacitansen i vakuum (eller luft), och proportionalitets coefficienten κ (> 1) kallas för dielektriska konstanten.

är lika med flödesdensiteten utanför det. Utanför det dielektriska ämnet har vi: $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_o$ vilket skall vara samma som flödesdensiteten inne i ämnet: $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon \frac{\mathbf{E}_o}{1 + \chi_e}$. Vi använder dessa likheter, för att få ekvationen

$$\frac{\epsilon}{1 + \chi_e} = \epsilon_0 \quad (61)$$

Permittiviteten för ett ämne kan alltså ges som ($\epsilon_r = \kappa$)

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \quad \text{eller} \quad \epsilon = \kappa \epsilon_0 \quad (62)$$

Den dielektriska konstanten för en ledare kan antas vara oändligt stor, vilket ger att elfältet är noll inne i ledaren. Nedan ser vi exempel på den dielektriska konstanten, för några valda ämnen:⁵

⁵ Parametrarna för vissa ämnen beror starkt på temperaturen och frekvensen på det oscillerande elfältet.

Ämne	dielektriska konstanten ϵ_r eller κ	Dielektriska styrkan ($\times 10^6$ V/m)
Vakuum	1	
Luft	1.00055	3^a
Glas	$\approx (3-6)$	≈ 40
Destillerat Vatten	≈ 80	
Metall	$\approx \infty$	

^a Beror på luftfuktigheten

I.2.11. R-C kretsar

Hittills har vi endast tittat på tidsberoende system, där spänningarna och strömmarna är konstanta hela tiden. Det första exemplet på tidsberoende kretsar ser vi nedan, där vi kombinerar ett motstånd med en kondensator. Vi betecknar spänningen över kondensatorn och över motståndet med V_C , respektive V_R .

I början är kontakten bruten och kondensatorn är laddad

$$\begin{aligned} V_C &= \frac{Q}{C} & \text{Tiden } t &= 0 \\ V_R &= 0 \end{aligned}$$

Sedan sluts kontakten och en ström börjar gå genom resistorn med den påföljden att kondensatorn börjar urladdas ($t > 0$), laddningen på kondensatorn minskar $\Delta q < 0$, vilket ger att strömmen genom motståndet blir: $I = -\frac{dq}{dt}$. Spänningarna över komponenterna som funktion av tiden är:

$$V_C(t) = \frac{q}{C} \qquad V_R(t) = -R \cdot I = R \frac{dq}{dt}$$

Vi använder Kirchhoffs andra lag, med strömmens riktning moturs

$$\frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} = 0$$

vilket är en differentialekvation där laddningen q på kondensatorn beror av tiden t . Vi flyttar över alla q -termerna till vänster och löser differentialekvationen

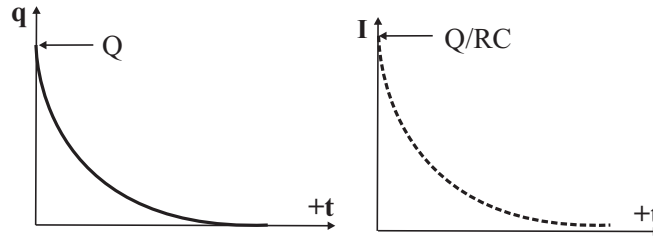
$$\begin{aligned}\frac{dq}{q} &= -\frac{dt}{RC} \quad \Rightarrow \quad \int_Q^q \frac{dq'}{q'} = \frac{-1}{RC} \int_0^t dt' \\ \left|_Q^q \ln(q') \right. &= \frac{-t}{RC} \quad \Rightarrow \quad \ln(q) - \ln(Q) = \ln\left(\frac{q}{Q}\right) = \frac{-t}{RC} \\ \Rightarrow q(t) &= Qe^{-\frac{t}{RC}}\end{aligned}\tag{63}$$

⇒ Urladdning av kondensatorn som en funktion av tiden

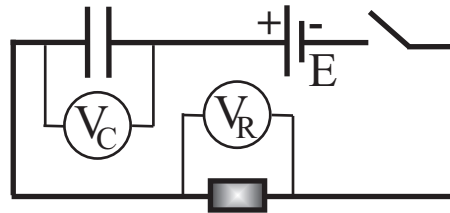
$$I(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{Q}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\tag{64}$$

där parametrarna q' and t' används så att de inte är samma som integrationsgränserna.

Vi ritlar laddningen på kondensatorn och strömmen dq/dt som funktion av tiden:



I nästa exempel ser vi hur en kondensator laddas.



I början är kontakten bruten och kondensatorn har ingen laddning. Sedan sluts kontakten och en ström börjar ladda kondensatorn. Kirchhoffs andra lag ger, då strömmen går motsols

$$E - \frac{q}{C} - R \frac{dq}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad EC - q - RC \frac{dq}{dt} = 0$$

Vi gör variabelbytet $\theta = EC - q$ och får

$$\frac{d\theta}{dq} = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{dq}{dt}$$

Vilket insätts i differentialekvationen: $\theta + RC \frac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{\theta} = -\frac{dt}{RC}$

Detta ger sedan: $\ln(\theta) = -\frac{t}{RC} + \textit{konstant}$, där konstanten fås från att då tiden $t = 0$, är $\theta = EC$

$$\begin{aligned} \ln(EC - q) &= -\frac{t}{RC} + \ln(EC) \\ \ln(EC - q) - \ln(EC) &= -\frac{t}{RC} \\ \ln\left(\frac{EC - q}{EC}\right) &= -\frac{t}{RC} \\ \ln\left(1 - \frac{q}{EC}\right) &= -\frac{t}{RC} \\ 1 - \frac{q}{EC} &= e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned}$$

(65)

⇒ Kondensatorns laddning som en funktion av tiden

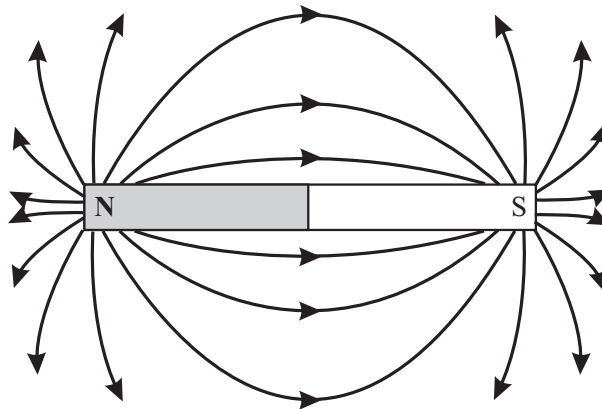
$$q(t) = EC(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (66)$$

I.3. Magnetiska fält

I.3.1. Magnetism

Magnetiska fenomen upptäcktes länge sedan och man iaktog att **permanenta magneter** attraherar eller repellerar andra magneter. Livet på jorden skyddas från laddade rymdpartiklar av jordens magnetfält, vilket visuellt kan observeras i fenomenet **norrsken** där de energetiska partiklarna kolliderar med jordens atmosfär vid polerna. Nuförtiden används magnetiska krafter i många olika elektriska apparater.

Man märkte tidigt, att sätter man en bit av ämnet magnetit eller en stavmagnet att flyta på en träbit i vatten, så kommer magneten att rotera tills den är i syd-nord riktning. Sätter man järnspån på en yta nära en magnet, kommer spånen att samla sig till vissa områden så att de kommer att peka mot magnetens två ändor. Dessa ändor, kallas för **magnetiska poler**, sydpol och nordpol. Nordpol, kallas den magnetiska polen, som svänger sig mot norr (nordsökande pol) i jordens magnetfält.

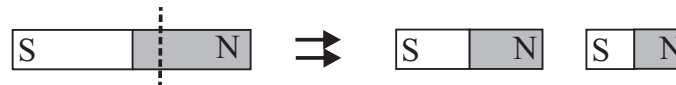


En **magnetisk dipol** kallas en magnet, som har två poler: **nordpol** och **sydpol**. Inga **monopoler**

har någonsin påträffats. Ifall man för två stavmagneter nära varandra, märker man att: **lika poler repellerar varandra** och **olika poler attraherar varandra**



Den magnetiska kraften verkar vara likadan som den elektriska, men följande exempel visar en olikhet. Ifall en stavmagnet bryts av, blir båda delarna en ny stavmagnet med syd- och nord-pol.



Jorden är en stor magnet, med den magnetiska sydpolen nära den geografiska nordpolen och vice versa. Det magnetiska fältet från jorden antar man att uppkommer från metalliska magmaströmmar inne i jorden. Under tidernas lopp har magmaströmmen varit olika, vilket också betyder att det magnetiska fältet för jorden har varierat. Nedan ser vi det magnetiska fältet runt en strömslinga, vilket påminner om magnetfältet runt jorden.

Vinkeln mellan de magnetiska fältlinjerna och jordytans horisontella plan kallas för **inklination**. Magnetfältets inklination vid ekvatorn är 0° och vid polerna 90° . Man antar att vissa djur, exempelvis flyttfåglar kan känna, magnetfältets inklination och magnetfältets storlek. På detta sätt är det möjligt att bestämma både nord-sydlig och öst-västlig riktning.

1.3.2. Magnetiska fältstyrkan

Sätter man en stavmagnet att flyta på en träbit i vatten, så kommer magneten att rotera tills den är i syd-nord riktning. Runt magneten finns ett magnetfält som jorden åstadkommer, som vrider kompassnålen. Nordpolen av magneten känner en kraft längs med magnetfältet och sydpolen mot magnetfältet. Eftersom bara en vridkraft och ingen horisontell rörelse har observerats, är krafterna på syd- och nord-pol lika stora.

Man märkte experimentellt att kring en ledning med strömmen I , uppstår ett magnetiskt fält. Man kan undersöka detta magnetfältets egenskaper genom att sätta en stavmagnet på en roterbar skiva runt ledningen, se bilden. Stavmagneternas poler känner en magnetisk kraft i motsatt riktning. Dessa krafter gör att skivan kommer att rotera i den riktning som har det större kraftmomentet. Kraftmomentet motsols är $|F_N|R_N$ och medsols $|F_S|R_S$. Det totala kraftmomentet på systemet är summan av dessa

$$M_{tot} = |F_N|R_N - |F_S|R_S$$

Hur noggranna mätningar man än gör, har man inte fått systemet att rotera. Detta betyder att de två kraftmomentena är lika $|F_N|R_N = |F_S|R_S$

$$\Rightarrow \frac{|F_N|}{|F_S|} = \frac{R_S}{R_N}$$

Detta tyder på att den magnetiska kraften runt en lång strömbärande ledning är inverst proportionerligt till avståndet R från ledningen: $F = \frac{1}{R}$. Den magnetiska kraftens styrka runt ledning är också proportionerligt till strömmens storlek i ledningen: Ökas ledningens ström till det dubbla ($2I$), motsvaras detta av att man sätter två ledningar med vardera strömmen I bredvid varandra, och den magnetiska kraften bör vara samma i båda situationerna. Vi har alltså fått att den magnetiska kraften på en magnetisk pol har följande utseende

$$F_M = k \frac{I}{R}$$

där konstanten k måste ännu bestämmas. För att göra detta, tittar vi på hur mycket arbete eller energi går åt att föra en magnetisk pol runt el-slingan ett varv. Till detta går energin

$$W = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = k \frac{I}{R} 2\pi R = 2\pi k I$$

Konstanten k 's värde ger hur stark den magnetiska polen är, så vi definierar nu att den **magnetiska polstyrkan** för en pol i en magnet är arbetet att föra polen runt en strömslinga dividerat med strömmen

$$p = \frac{W}{I} \tag{67}$$

Vi ser då genast att konstanten $k = p/2\pi$. Enheten för polstyrkan blir: $[p] = J/A = \text{Wb}$ (weber). Kraften på en pol kring ledningen blir slutligen

$$F_M = \frac{p}{2\pi} \frac{I}{R} \quad (68)$$

Den **magnetiska fältstyrkan** definieras nu som den magnetiska kraften dividerat med magnetiska polstyrkan ⁶

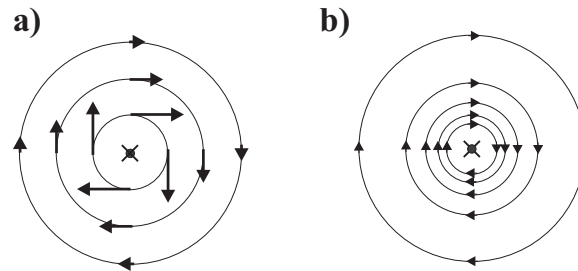
$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{F}_M}{p} \quad [h!t!] = \frac{N}{Wb} = \frac{A}{m} \quad (69)$$

Den magnetiska fältstyrkan på avståndet R från en strömbärande ledning med strömmen I är

$$|\mathbf{H}| = \frac{I}{2\pi R} \quad (70)$$

⁶Den elektriska fältstyrkan definierades liknande som den elektriska kraften dividerat med laddningen: $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_E}{Q}$

De magnetiska fältlinjerna runt ledningen bildar slutna cirklar. Detta avbildas vanligen på två olika sätt se **a)** och **b)**, där strömmen är in i pappret. I **a)** fallet ser vi att storleken på magnetfältet halveras ifall avståndet fördubblas. I **b)** fallet ritas man de magnetiska fältlinjerna tätare där det magnetiska fältet är större.



I.3.3. Amperes Lag

Arbetet eller energin som går åt att föra en magnetisk pol runt en strömbärande ledning ett varv bestäms vara

$$W = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi kI = p I$$

Detta arbete är oberoende av avståndet till ledningen, vilket fick André Marie Ampère att föreslå att arbetet att föra en magnetisk pol runt en strömbärande ledning ett varv är oberoende av vägen, så länge man hamnar på samma ställe tillbaka. Insätter man i föregående ekvation att kraften är lika med magnetiska polen gånger magnetiska fältstyrkan: $\mathbf{F} = \mathbf{H}p$, får vi **Amperes lag**

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{summa} \quad (71)$$

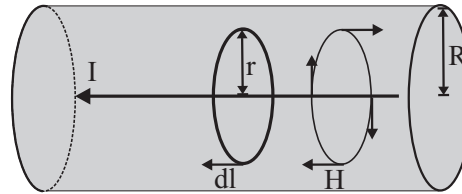
Denna ekvation, som liknar *Gauss lag* för elektriska fält, säger att integralen av magnetfältet runt en sluten krets är detsamma som summaströmmen genom kretsen.

Exempel: Vi har en strömbärande cylindrisk ledare med radien R i vilket går en homogen ström I . Vad är det magnetiska fältet som en funktion av avståndet r från cylinderns mitt?

Strömdensiteten $J = I/Area = I/(\pi R^2)$ är konstant. In i cylindern är totala strömmen

beroende av area som strömmen går igenom. Utanför cylindern är totala strömmen hela tiden I . Vi har alltså två möjligheter: **a)** $r \leq R$ och **b)** $r > R$.

a) $r \leq R$



Inne i ledaren ger strömmen upphov till magnetfält i cirklar som ritats i figuren. Detta magnetfält är alltid parallellt med $d\mathbf{l}$ så att punktprodukten $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H dl \cos(\theta) = H dl$. Så vi får att integralen av magnetfältet runt den slutna cirkeln blir

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = |H| \oint dl = |H| 2\pi r \quad (72)$$

Denna integral måste vara samma som strömmen genom den slutna cirkelns area

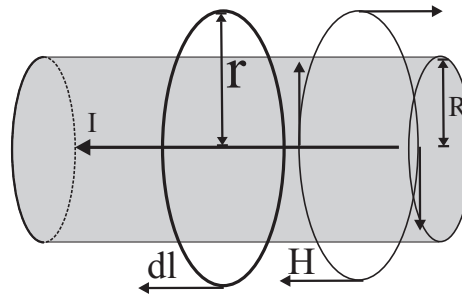
$$|H| 2\pi r = J \pi r^2 = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 = \frac{I}{R^2} r^2$$

vilket ger storleken på den magnetiska fältstyrkan som en funktion av avståndet r från

cylinderns mitt då $r \leq R$

$$|H| = \frac{I}{2\pi R^2} r$$

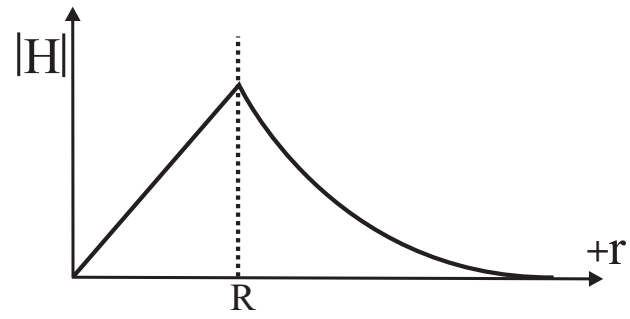
b) $r > R$



Integralen blir samma som i fall **a)** Ekv. (72) , men nu är strömmen genom den slutna cirkelns area hela tiden I , så att storleken på magnetfältet som en funktion av avståndet r från cylinderns mitt då $r > R$ blir

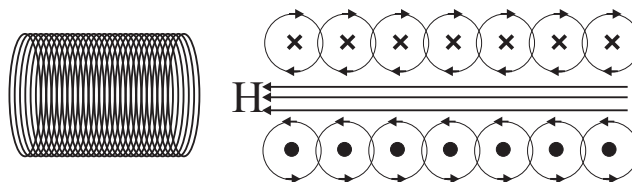
$$|H| = \frac{I}{2\pi r}$$

I bilden nedan har den magnetiska fältstyrkan ritats som en funktion av avståndet till ledningens mitt. Observera att vid avståndet $r = R$ ger **a)** och **b)** samma svar.



Exempel: Beräkna den magnetiska fältstyrkan inne i en oändligt lång **solenoid** med strömmen $I = 1$ A och med 5000 varv på 10 cm.

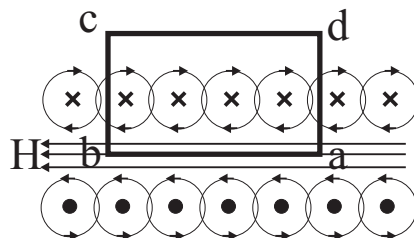
Bilden visar en del av solenoiden. Vi ser att det magnetiska fältlinjerna från ledningarna i solenoidens övre del (strömmen in i sidan) går medsols, och i solenoidens nedre del (strömmen ut från sidan) motsols. Detta ger att fältlinjerna förstärks inne i solenoiden och tar ut varandra långt utanför solenoiden.



Först beräknar vi **antalet varv i solenoiden per längdenhet:**

$$n_l = \frac{5000 \text{ varv}}{0.1 \text{ m}} = 5 \times 10^4 \text{ varv/m.}$$

Vi betraktar sedan figuren nedan, där en del av solenoiden är ritad



Integralen av magnetfältet runt den slutna fyrkanten blir

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = HL_{ab}\cos(0) + H \cdot L_{bc}\cos(90) + 0 \cdot L_{cd} + H \cdot L_{da}\cos(90)$$

Denna integral skall vara lika med strömmen genom den slutna fyrkantens area

$$HL_{ab} = L_{ab}n_l I$$

vilket ger storleken på den magnetiska fältstyrkan inne i solenoiden

$$|H| = n_l I = 5 \times 10^4 \text{ m}^{-1} \cdot 1 \text{ A} = 5 \times 10^4 \text{ A/m}$$

Observera att den magnetiska fältstyrkan är konstant inne i solenoiden.

I.3.4. Biot-Savarts lag

En laddning i rörelse skapar ett magnetiskt fält runt sig. Magnetiska fältstyrkan som laddningen q med den konstanta hastigheten v ger upphov till är

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (73)$$

Ifall vi har en ledare med många laddningar, kan man summera alla enskilda magnetfälten. Betrakta en ledare med arean A och laddningsdensiteten ρ ($|\rho| = \text{C/m}^3$). Laddningen i en längd dl i ledaren är densiteten gånger volymen:

$$dQ = \rho A dl$$

Dessa har drifhastigheten $\mathbf{v} = d\mathbf{l}/dt$ i ledaren. Detta kombinerat med Ekv. (73) ger den magnetiska fältstyrkan från en sträcka dl av ledaren:

$$|d\mathbf{H}| = \frac{1}{4\pi} \frac{dQ\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{dQ(d\mathbf{l}/dt) \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{dQ/dt dl \times \hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2} \quad (74)$$

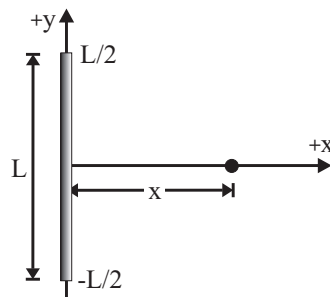
dQ/dt är detsamma som strömmen i ledaren, vilket ger **Biot Savarts lag**

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (75)$$

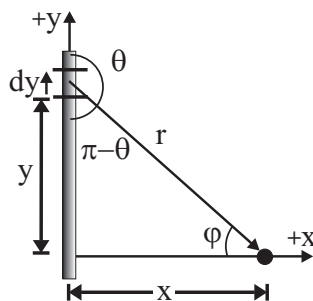
För att få den totala magnetiska fältstyrkan en strömbärande ledare ger upphov till integreras föregående ekvation:

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (76)$$

Exempel: Beräkna den magnetiska fältstyrkan vinkelrät ut från mitten av en L lång ledare på avståndet x från ledaren. Strömmen i ledaren är I uppåt.



Först beräknar vi den infinitesimala fältstyrkan som dy producerar in i sidan, se bilden nedan.



Biot Savarts lag ger

$$|d\mathbf{H}| = \frac{I}{4\pi} \frac{dy \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{I}{4\pi} \frac{dy \sin(\theta)}{r^2}$$

För att få den totala fältstyrkan (alla i samma riktning in i pappret) integrerar vi över hela ledaren

$$|\mathbf{H}| = \frac{I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{dy \sin(\theta)}{r^2}$$

För att underlätta integrationen, gör vi variabelbytet $dy \Rightarrow d\varphi$. Vi måste alltså uttrycka dy , $\sin(\theta)$ och r som funktion av φ .

Från bilden ser vi att: $\sin(\theta) = \sin(\pi - \theta) = \cos(\varphi)$ och att $r = x / \cos(\varphi)$. Vidare ger bilden:

$$\begin{aligned} \tan(\varphi) &= \frac{y}{x} \quad \Rightarrow y = x \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \\ \Rightarrow \frac{dy}{d\varphi} &= x \left(\frac{\cos(\varphi)}{\cos(\varphi)} + \frac{-1 \cdot -\sin(\varphi) \sin(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} \right) \\ &= x \left(\frac{\cos^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} + \frac{\sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} \right) = \frac{x}{\cos^2(\varphi)} \\ \Rightarrow dy &= \frac{x \cdot d\varphi}{\cos^2(\varphi)} \end{aligned}$$

Insättning av dessa ger den enkla integralen

$$\begin{aligned} |\mathbf{H}| &= \frac{I}{4\pi} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{x \cdot d\varphi \cos^2(\varphi) \cos(\varphi)}{\cos^2(\varphi) x^2} = \frac{I}{4\pi x} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \cos(\varphi) d\varphi \\ &= \frac{I}{4\pi x} \Big|_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \sin(\varphi) = \frac{I}{4\pi x} [\sin(\varphi_0) - \sin(-\varphi_0)] \\ &= \frac{I}{2\pi x} \sin(\varphi_0) = \frac{I}{2\pi x} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

Ifall ledaren är mycket lång (L och $y \gg x$), närmar sig $\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow 1$, vilket ger storleken för magnetfältet som en oändligt lång ledare producerar i en punkt på det vinkelräta avståndet x från ledaren

$$|\mathbf{H}| = \frac{I}{2\pi x}$$

vilket är givetvis samma svar som Ampères lag gav.

Exempel:

Beräkna magnetfältet i mitten av en cirkulär krets med N varv, radien R och strömmen I . Vi använder igen *Biot Savarts lag*

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

I figuren ser vi att avståndet till mitten är konstant: $|r| = R$, och att vinkeln mellan $d\mathbf{l}$ och \hat{r} är konstant $\pi/2$. Riktningen får vi från högerhandsregeln, pekfingeret i $d\mathbf{l}$:s riktning, mellanfingeret i \hat{r} :s riktning, ger att tummen: $d\mathbf{H}$ har riktningen ut från pappret.

Den totala magnetiska fältstyrkan i mitten av ett varv av kretsen blir:

$$\begin{aligned} |\mathbf{H}| &= \frac{I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{I}{4\pi} \int \frac{|dl| \sin(\theta)}{R^2} \\ &= \frac{I}{4\pi R^2} \int_{\text{cirkel}} |dl| = \frac{I}{4\pi R^2} 2\pi R = \frac{I}{2R} \end{aligned}$$

Storleken på det magnetiska fältet (riktning ut från pappret) i mitten av en cirkulär krets

med N varv av ledande i vilken det går strömmen I blir slutligen

$$|\mathbf{H}| = \frac{NI}{2R}$$

I.3.5. Magnetiska flödesdensiteten

Hittills har vi beräknat den magnetiska fältstyrkan från en ström. Nu vill vi bestämma den magnetiska fältstyrkan från en magnetisk pol. Experimenten med järnspån kring en stavmagnet visade att de magnetiska flödeslinjerna pekade mot de magnetiska polerna. Enligt överenskommelse, säger man att de magnetiska flödeslinjerna utgår från den magnetiska nordpolen och går in i den magnetiska sydpolen.

Analogt till det elektriska flödet⁷, definierar vi att det totala **magnetiska flödet** från en magnetisk pol med polstyrkan p är

$$\phi_M = p \quad [\phi_M] = [p] = Wb \quad (77)$$

Detta är alltså det totala antalet magnetiska flödeslinjer som utgår från en magnetisk nordpol eller går in i en magnetisk sydpol. Tittar vi på hur stort magnetiskt flöde $\Delta\phi_M$ går genom en areaenhet ΔA , får vi vektorstorheten kallad **magnetiska flödesdensiteten**, **magnetisk induktion** eller bara **magnetfältet**

$$\mathbf{B} = \left[\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi_M}{\Delta A} \right] \hat{n} \quad [\mathbf{B}] = Wb/m^2 = T \text{ (tesla)} \quad (78)$$

⁷Det totala **elektriska flödet** från en punktladdning Q definieras vara samma som laddningens storlek: $\phi_E = Q$.

där riktingen är vinkelrät mot ytan ΔA . \hat{n} är en enhetsvektor vinkelrät mot ytan och i riktning av de magnetiska fältlinjerna. Från magnetiska flödesdensiteten får vi den magnetiska fältstyrkan från följande relation

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \quad (79)$$

där **permeabiliteten** μ är beroende av mediet genom vilket det magnetiska flödet går genom.

I följande tabell ser vi några approximativa värden för den magnetiska flödesdensiteten i olika system.

System	Magnetfält [T]
Vid ytan av en atomkärna	10^{12}
Största i laboratoriet	10^3
Vid solytan	10^{-2}
Vid jordytan	5×10^{-5}
Radiovågor	10^{-9}
Människokroppen	10^{-10}
I ett skyddat antimagnetist rum	10^{-14}

Exempel: Beräkna magnetiska fältstyrkan från en magnetisk pol med styrkan p som funktion av avståndet r från polen.

Det magnetiska flödet som utgår radiellt från polen är: $\phi_M = p$. Den magnetiska flödesdensiteten på avståndet r , fås då flödet divideras med arean av sfären med radien r från polen

$$\mathbf{B} = \frac{\Delta\phi_M}{\Delta A} = \frac{\phi_M}{4\pi r^2} \hat{r} = \frac{p}{4\pi r^2} \hat{r}$$

Den magnetiska fältstyrkan är slutligen den magnetiska flödes-densiteten dividerat med mediets permeabilitet:

$$\mathbf{H} = \frac{p}{4\pi\mu r^2} \hat{r}$$

Exempel: En stavmagnet med polerna på avståndet $2l$ från varandra ligger vågrät på x-axeln, med stavmagnetens centrum i origo, se bild. Beräkna den magnetiska fältstyrkan på en godtycklig punkt på y-axeln.

Den magnetiska flödesdensiteten på avståndet r från polerna blir

$$\mathbf{B} = \frac{p}{4\pi r^2} \hat{r}_+ + \frac{p}{4\pi r^2} \hat{r}_-$$

där $\hat{\mathbf{r}}_+$ och $\hat{\mathbf{r}}_-$ är enhetsvektorer från den magnetiska nordpol, respektive mot sydpol. Vidare ser vi från figuren att: $\hat{\mathbf{r}}_+ = \cos(\theta)\hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta)\hat{\mathbf{j}}$ och att $\hat{\mathbf{r}}_- = \cos(\theta)\hat{\mathbf{i}} - \sin(\theta)\hat{\mathbf{j}}$, vilket ger att den totala magnetiska flödesdensiteten är bara i x-riktning ($\cos(\theta) = l/r$)

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{p}{4\pi r^2}[\cos(\theta)\hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta)\hat{\mathbf{j}}] + \frac{p}{4\pi r^2}[\cos(\theta)\hat{\mathbf{i}} - \sin(\theta)\hat{\mathbf{j}}] \\ &= \frac{p}{4\pi r^2}[2\cos(\theta)\hat{\mathbf{i}}] = \frac{p}{4\pi r^2} \frac{2l}{r} \hat{\mathbf{i}}\end{aligned}$$

Om vi vidare definierar en vektorstorhet, det **magnetiska dipolmomentet** för en magnet som

$$\mathbf{m} = \frac{2lp}{\mu} \hat{\mathbf{n}} \quad (80)$$

där $\hat{\mathbf{n}}$ är en enhetsvektor från den magnetiska sydpolen ($-p$) mot den magnetiska nordpolen ($+p$), får vi att den magnetiska fältstyrkan på en godtycklig punkt på y-axeln blir

$$\mathbf{H} = \frac{2pl}{4\pi\mu r^3} \hat{\mathbf{i}} = \frac{|\mathbf{m}|}{4\pi r^3} \hat{\mathbf{i}}$$

I.3.6. Magnetisk kraft på en strömbärande ledare

Vi skall nu bestämma kraften på en strömbärande ledare i ett magnetiskt fält. Bilden bredvid visar en strömbärande ledare med längdelementet Δl på avståndet r från en magnetisk nordpol med polstyrkan p .

Från kapitlet med Biot Savarts lag, såg vi att ett strömbärande längdelement Δl ger upphov till en magnetisk fältstyrka

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{\Delta \mathbf{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

I detta fält känner magnetiska polen kraften

$$\Delta \mathbf{F} = p \Delta \mathbf{H}$$

Enligt Newtons tredje lag, känner längdelementet Δl en lika stor kraft i motsatt riktning

$$\Delta \mathbf{F} = -p \Delta \mathbf{H} = -\frac{pI}{4\pi} \frac{\Delta \mathbf{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

Riktningen på denna kraft är rakt ut från pappret. Vi flyttar nu origo till den magnetiska polen p och byter riktning på vektorn r : $\mathbf{r} \Rightarrow -\mathbf{r}$. Kraftelementet på

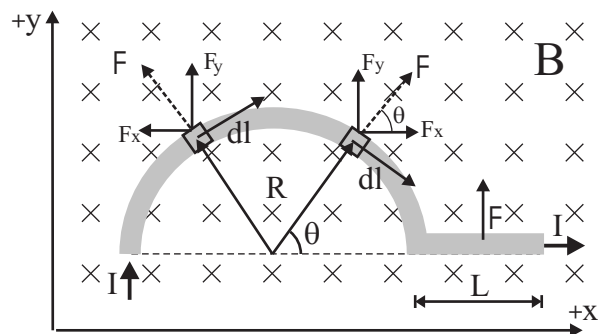
längdelementet Δl blir nu

$$\Delta \mathbf{F} = \frac{pI}{4\pi} \frac{\Delta \mathbf{l} \times \hat{r}}{r^2} = I \Delta \mathbf{l} \times \left(\frac{p}{4\pi r^2} \hat{r} \right)$$

där termen i parentesen är den magnetiska flödesdensiteten \mathbf{B} från en magnetisk pol. Slutligen kan vi skriva kraften på ett strömbärande längdelement Δl i ett magnetfält \mathbf{B} som

$$\Delta \mathbf{F} = I \Delta \mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (81)$$

Exempel: Figuren avbildar en halvcirkelformig ledare med radien R , och en rak del som har längden L i ett magnetfält \mathbf{B} in i pappret. Beräkna kraften på ledaren då det går en ström I i den.



Vi beräknar först kraften på halvcirkeln. I figuren, har vi ritat in två korta delar $d\mathbf{l}$ av halvcirkeln, på vilka kraften $d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ verkar. Krafterna i x-riktning tar ut varandra och bara kraften i y-riktning kvarstår. Vinkeln mellan x-axeln och kraften \mathbf{F} ges av vinkeln θ som går från 0 till π . Kraften i y-riktning på $d\mathbf{l}$ blir då

$$dF_y = |\mathbf{F}| \sin(\theta) = I |d\mathbf{l}| |\mathbf{B}| \sin(\theta) = I \cdot R d\theta \cdot B \cdot \sin(\theta) \quad (82)$$

där längden $dl = R d\theta$. Slutligen får vi den totala kraften som integralen

$$F_y = IRB \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta = 2IRB \quad (83)$$

Kraften på den raka delen i y-riktning är: $F_y = ILB$. Den totala kraften, som är i

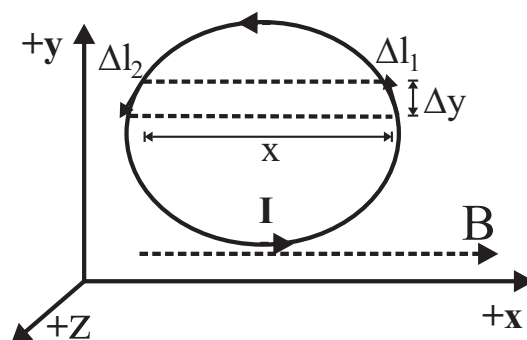
y-riktningen, får vi som summan av dessa:

$$F = IB(2R + L) \tag{84}$$

Vi ser att $2R + L$ är längden av ledaren i x-riktningen!

I.3.7. Strömkrets i ett magnetfält

För att förstå hur en elektrisk motor fungerar, skall vi betrakta kraften och vridmomentet på en strömkrets i ett magnetfält. I figuren ser vi en strömkrets i ett konstant magnetfält i x-axelns riktning.



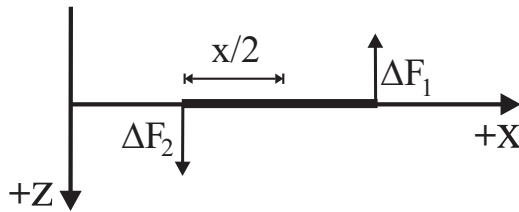
Strömmen går motsols, och vi betraktar kraften på ett litet längdelement Δl

$$\Delta \mathbf{F} = I \Delta \mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

Storleken av kraften på Δl_1 får vi då som ($\sin(\theta) = \frac{\Delta y}{\Delta l}$)

$$|F_1| = I |\Delta l_1| |\mathbf{B}| \sin(\theta) = I \Delta y B$$

där θ är vinkeln mellan Δl och x-axeln. Kraften på Δl_2 blir samma. Ser vi på bilden uppifrån, ser vi att vridmomenten för Δl_1 och Δl_2 är åt samma håll.



Summa vridmomentet för det lilla segmentet blir då

$$|\Delta T| = IB\Delta y \frac{x}{2} + IB\Delta y \frac{x}{2} = IB\Delta y \cdot x$$

För hela kretsen får vi vridmomentet genom att summa alla segmenten

$$|T| = IB \sum_{i=1}^n \Delta y \cdot x_i = IBA \quad (85)$$

där A är arean för kretsen. Detta är bara det momentana vridmomentet då kretsen är parallellt med magnetfältet. Följande ekvationer ger vridmomentet på en krets som är godtyckligt orienterat i ett magnetfält.

Figuren visar en krets med arean A i ett magnetfält. Vi definierar att \hat{n} är en enhetsvektor som är vinkelrät till arean för kretsen. Ifall vi har en vinkel θ mellan \hat{n} och magnetfältet, blir vridmomentet på kretsen

$$\begin{aligned} |\mathbf{T}| &= I A B \sin(\theta) \\ \mathbf{T} &= I A \hat{n} \times \mathbf{B} \end{aligned}$$

Vi definierar att det **magnetiska dipolmomentet** för en sluten krets i ett plan är

$$\mu = I A \hat{n} \quad (86)$$

vilket slutligen ger vridmomentet på kretsen som

$$\mathbf{T} = \mu \times \mathbf{B} \quad (87)$$

Vridmomentet i en sluten krets är störst när μ är vinkelrät mot magnetfältet, och noll då de är parallella. Så ifall det är möjligt, kommer kretsen att försöka vrida sig så att det magnetiska dipolmomentet pekar i riktning av magnetfältet.

Den **potentiella energin** för ett dipolmoment i ett magnetfält som en funktion av vinkeln mellan dipolmomentet och magnetfältet är

$$U(\theta) = \int T d\theta = \int |\mu||B|\sin(\theta)d\theta = -|\mu||B|\cos(\theta) = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \quad (88)$$

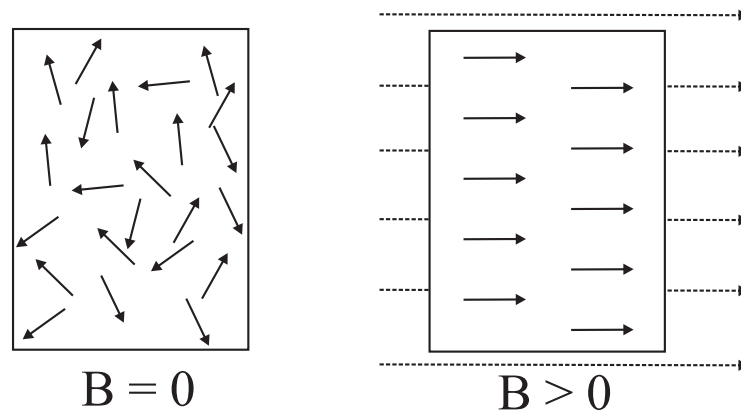
I.3.8. Magnetiska material

En magnet och en strömslinga känner en likadan kraft i ett magnetfält. Man kan inte urskilja vilkendera det är. Vanligen indelar man materialen i tre olika klasser, beroende på hur de reagerar på ett yttre magnetfält.

I.3.8.1. Paramagnetiska material

Paramagnetiska material har ett stort antal små permanenta magnetiska dipoler, vilka härrör sig från elektronrörelsen och elektronernas inre dipolmoment. Dessa dipoler är normalt orienterade åt vilket håll som helst (p.g.a. värmerörelsen).

I ett magnetfält orienterar sig dessa längs med det yttre magnetfältet (lägsta potentiala energin) och magnetfältet inne i materialet kan förstärkas märkbart.



Magnetiska fältet inne i paramagnetiska material kan skrivas som en summa av det yttre

magnetfältet och magnetfältet som induceras av de magnetiska dipolerna

$$B_{inne} = B_{yttre} + B_{magn.dipolerna}$$

Det inducerade inre magnetfältet är proportionerligt till det yttre fältets storlek

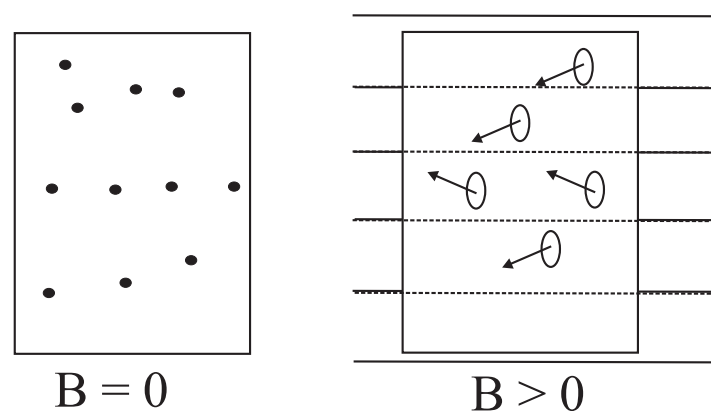
$$B_{magn.dipolerna} = \chi_m B_{yttre} \quad (89)$$

där χ_m (ksi) kallas för **magnetisk susceptibilitet** (10^{-4} - 10^{-5} för paramagnetiska material). Vi får slutligen magnetfältet inne i materialet:

$$B_{inne} = B_{yttre} + \chi_m B_{yttre} = (1 + \chi_m) B_{yttre} \quad (90)$$

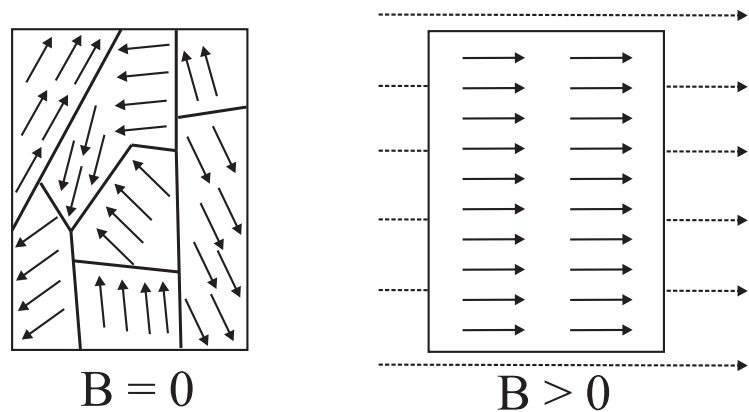
I.3.8.2. Diamagnetiska material

I många atomer är elektronkonfigurationen så att inga permanenta magnetiska dipoler bildas. Det yttre fältet kan ändå inducera strömmar i materialet, så att det inducerade dipolmomentena pekar mot magnetfältet. Magnetfältet försvagas därför i **diamagnetiska material**: $\chi_m < 0$.

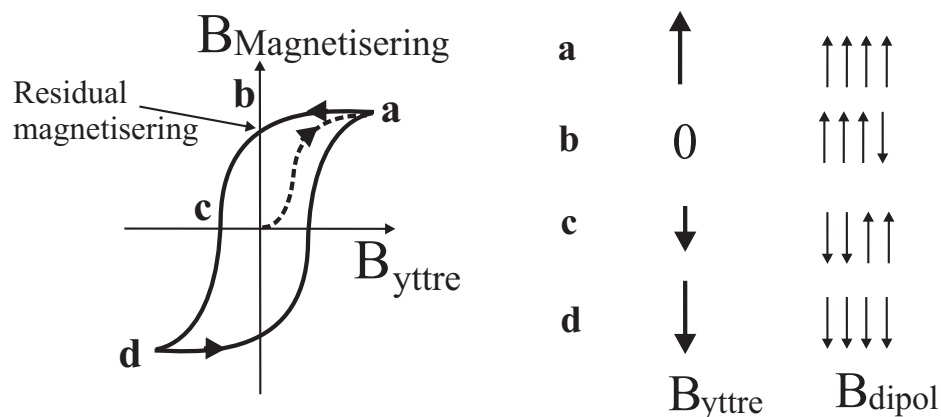


I.3.8.3. Ferromagnetiska material

Då **ferromagnetiska material** sätts i ett magnetfält, förblir dessa magneter fastän det yttre fältet tas bort (Exempelvis: järn nickel cobolt ..). Denna effekt kommer från det att bredvidliggande permanenta magnetiska dipoler påverkar varandra så att den inre energin för materialet är lägre ifall dipolmomentena är parallella. Det totala magnetfältet kan öka dramatiskt $B_{ferromagn} \approx 10^3 \cdot B_{yttre}$



Ifall materialets temperatur ökar mycket, kommer värmerörelsen att göra att dipolmomenterna inte mera är parallella, och ferromagneten har blivit paramagnetisk. Likadant kan paramagneter visa ferromagnetiska egenskaper då de nedkyls. Den kritiska temperaturen kallas för **Curie temperaturen** för detta material. Då det yttre magnetfältet tas bort, förblir det ferromagnetiska materialet magnetiskt. För att minska på det ferromagnetiska magnetfältet, måste man ha ett yttre fält i motsatt riktning. Detta kallas för **hysteresis**



I bilden ser vi en hysteresiskurva, där magnetiseringen för det ferromagnetiska materialet ökar, när det yttre fältet ökar (sträckade linjen). Det yttre fältet orienterar de magnetiska dipolerna inne i materialet. Snart har alla dipolerna orienterat sig i riktning av det yttre fältet, och fastän yttre fältet ökar, ökar inte magnetiseringen mera (saturation) punkt **a**. Vi följer sedan hysteresiskurvan längs med pilarna. Nu avtar det yttre fältet, och magnetiseringen avtar något. Vid punkt **b** är det yttre fältet noll, men magnetiseringen håller i sig (permanent magnet). Efter detta svängs nu det yttre magnetfältet i motsatt riktning, och den börjar småningom svänga de mikroskopiska dipolerna med sig. Vid punkt **c** har det yttre fältet svängt ungefär hälften med sig, och det totala magnetiseringen är noll. Vid **d** har sedan magnetfältet svängt alla dipolerna åter åt samma håll (liknande som **a**).

I.3.9. Kraften på en laddning i ett magnetfält

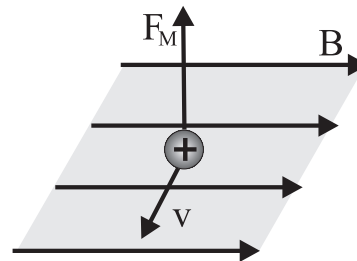
Vi fick tidigare att kraften på ett strömbärande längdelement $\Delta\mathbf{l}$ i ett magnetfält \mathbf{B} är

$$\Delta\mathbf{F} = I\Delta\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

De som egentligen känner den magnetiska kraften är de laddningarna i ledningen som rör på sig med hastigheten $\mathbf{v} = \Delta\mathbf{l}/\Delta t$. Vi får då att strömmen gånger längdelementet blir: $I \cdot \Delta\mathbf{l} = \Delta Q/\Delta t \cdot \mathbf{v}\Delta t = \Delta Q \mathbf{v}$. Ifall denna laddning ΔQ är bara en punktladdning q får vi att den magnetiska kraften på denna punktladdning är:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (91)$$

där rikningen för kraften fås från högerhandsregeln



Exempel:

En elektron har hastigheten $\mathbf{v} = (7 \hat{i} + 3 \hat{j} + 2 \hat{k})$ m/s i ett magnetfält $\mathbf{B} = (2.0 \hat{k})$ T. Vad är kraften på elektronen?

Kraften på elektronen är $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ där kryssprodukten blir

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \times \mathbf{B} &= (v_y B_z - v_z B_y)\hat{i} + (v_z B_x - v_x B_z)\hat{j} + (v_x B_y - v_y B_x)\hat{k} \\ &= (v_y B_z)\hat{i} + (-v_x B_z)\hat{j}\end{aligned}$$

Vilket ger vid insättning av värden

$$\mathbf{F} \approx -1.6 \times 10^{-19} C (3 \cdot 2 \hat{i} - 7 \cdot 2 \hat{j}) \frac{m \cdot N \cdot s}{s \cdot C \cdot m} \approx (-9.6 \hat{i} + 22.4 \hat{j}) \times 10^{-19} N$$

I förra exemplet beräknade vi kraften på en elektron i ett magnetfält. Denna kraft är alltid vinkelrät mot hastigheten, vilket betyder att kraften också är vinkelrät mot en liten sträcka $d\mathbf{s}$ som elektronen går och totala arbetet ($dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$) är noll. Vilket betyder att storleken på hastigheten $|v|$ aldrig ändras, endast elektronens riktning: **En laddad partikel rör sig hela tiden med konstant fart i ett magnetfält.**

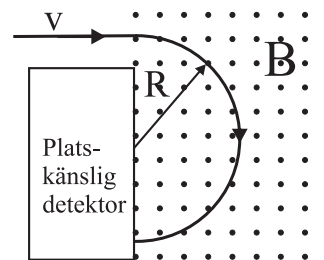
Detta kan användas i en s.k. **masspektrometer**, där en laddad partikel q med massan m först

accelereras av en potentialskillnad V och får kinetiska energin

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = V \cdot q \quad (92)$$

hastigheten som partikeln har innan den kommer in i ett vinkelrät magnetiskt fält är

$$v = \sqrt{\frac{2qV}{m}} \quad (93)$$



Det magnetiska fältet är i riktning ut från pappret, så att den magnetiska kraften är alltid mot

cirkelns mitt (centripetal kraft) för vilken följande ekvation gäller

$$|F_M| = q|v||B| = m\frac{v^2}{R}$$

från vilken vi får radien för partikeln

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (94)$$

Radien kan också skrivas med hjälp av den accelererande potentialen

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{m\sqrt{\frac{2qV}{m}}}{qB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mV}{q}}$$

I en cyklotron accelereras laddade partiklar med elfält i en cirkelformad bana. Tiden (Perioden) för ett varv för partikeln blir

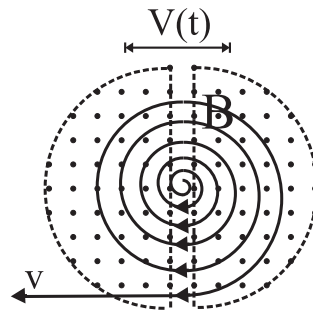
$$T_c = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (95)$$

vilken är oberoende av hastigheten eller radien! Vinkelfrekvensen för cirkelrörelsen blir

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T_c} = \frac{qB}{m} \quad (96)$$

Partikelns hastighet och därmed också kinetiska energin kan ökas ifall en periodisk spänningskälla som oskillerar med samma vinkelfrekvens, se bilden nedan

$$V(t) = V_o \cdot \sin(\omega_c \cdot t)$$

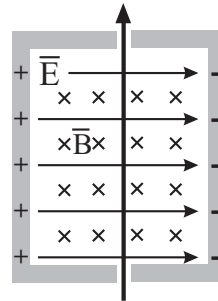


Då partikelns hastighet ökar och närmar sig ljusets, så ökar också partikelns massa. Rörelsemängden blir $p = mv / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, vilket betyder att både magnetfältet och vinkelfrekvensen måste modifieras så att cirkelbanor fås. Dessa apparater kallas för *synkrotroner*

När en laddad partikel rör sig samtidigt i ett elfält och magnetfält, känner den två krafter. Den totala kraften, kallad **Lorents kraften** är

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (97)$$

Detta kan användas som hastighetsfilter ifall hastigheten för partikeln är vinkelrät till både magnet och elfältet



För att partikeln skall röra sig rakt, måste Lorentz kraften vara noll

$$q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$$

vilket ger hastigheten som partikeln måste ha

$$|\mathbf{v}| = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{B}} \quad (98)$$

Eftersom laddningen q förkortas bort, fungerar denna hastighetsfilter för både positiva och negativa laddningar.