Ramseyn teoria

Kevät 2003

Dos. Kerkko Luosto
Matematiikan laitos, Helsingin yliopisto

I Äärellisten joukkojen Ramseyn teoriaa

Ramseyn teoria on kombinatoriikan haara, jossa isoista matemaattisista rakenteista etsitään järjestyneitä eli homogeenisia osia. Laatikkoperiaatetta, erityisesti sen yleistä muotoa, voidaan pitää triviaalina erikoistapauksena Ramseyn teorian tuloksista. Alan tulosten arvon ymmärtää, kun huomaa, että jo laatikkoperiaate on erittäin hyödyllinen kombinatorinen periaate.

0.1. Lause. *(Laatikkoperiaate) Jos vähintään $r+1$ alkion joukko ositetaan r osaan, niin jossakin osassa on vähintään 2 alkiota eli jotkin eri alkiot ovat samassa osassa.* □

0.2. Lause. *(Yleinen laatikkoperiaate) Olkoot $m, n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Jos $mn+1$ alkion joukko ositetaan n osaan, niin jossakin osista on vähintään $m+1$ alkiota.*

Todistus. Jos jokaisessa osista on korkeintaan m alkiota, niin ositettavassa joukossa on korkeintaan mn alkiota. □

Esimerkiksi kymmenpuoluejärjestelmässä jokin puolue saa vähintään tuhat ääntä, kunhan uurnille saadaan riittävästi äänestäjiä, nimittäin vähintään 9991. Äänestäjien jakautumista useisiin puolueihin voi pitää järjestymättömänä kokonaisuutena, josta voidaan poimia tuhannen ihmisen järjestäytynyt, samaa puoluetta äänestänyt joukko.

Sen selittämiseksi, miten laatikkoperiaatteesta yleistetään Ramseyn teoriaa, on suotavaa ottaa käyttöön sopivia käsitteitä.

0.3. Määritelmä. Joukon A *väritys* χ väreillä C on kuvaus $\chi\colon A \to C$. (Alkion $a \in A$ väri on $\chi(a)$.)

Jatkossa käytetään myös sitä yleistä joukko-opillista tapaa, että luonnollinen luku samastetaan edeltäjiensä joukon kanssa eli $m = \{0, \ldots, m-1\}$, kun $m \in \mathbb{N}$. Positiivisten luonnollisten lukujen joukosta käytetään merkintää $\mathbb{N}^*$.

0.4. Lause. *(Yleinen laatikkoperiaate, uusi muotoilu) Olkoon $\chi\colon A \to n$ väritys, missä $n \in \mathbb{N}$. Jos $|A| = mn+1$, missä $m \in \mathbb{N}$, niin jollakin $B \subset A$, $|B| = m+1$, rajoittuma $\chi \restriction B$ on vakiokuvaus eli B on yksivärinen.* □

Laatikkoperiaate puhuu perusjoukon osajoukoista. Ramseyn teorian puolelle siirrytään, kun osajoukkojen sijasta käsitellään relaatioita. Tämä merkitsee sitä, että värityksen $\chi\colon A \to n$ sijasta tarkastellaan värityksiä $\chi\colon A^k \to n$, missä $k \in \mathbb{N}^*$. Havainnollisuuden vuoksi seuraavassa on yksinkertaisin epätriviaali Ramseyn teorian tulos.

0.5. Lause. *Jokaisessa 6 ihmisen joukossa on kolme, jotka joko tuntevat kaikki toisensa tai eivät lainkaan tunne toisiansa.*

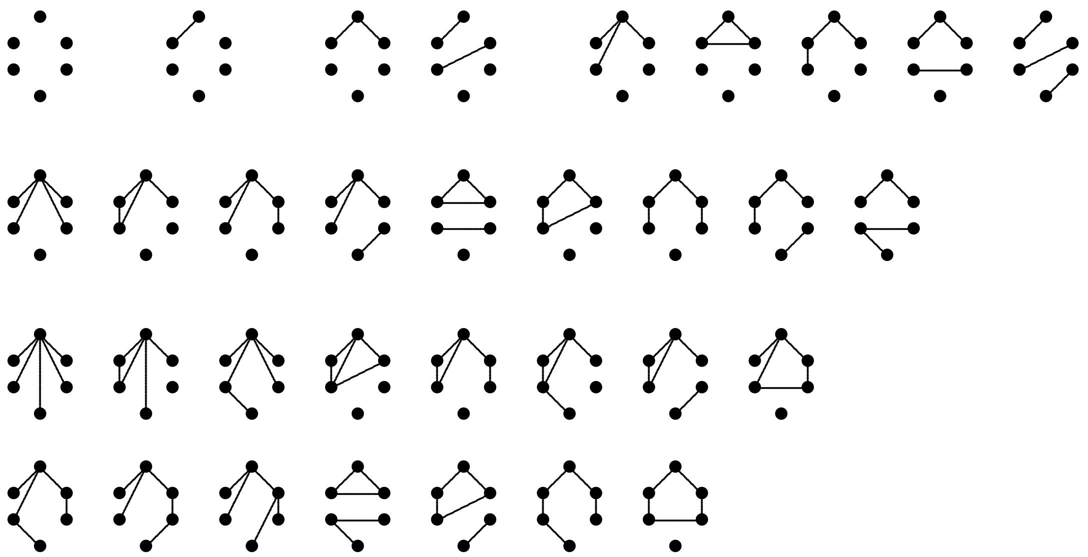
Todistus. Kiinnitetään yksi henkilö, A.

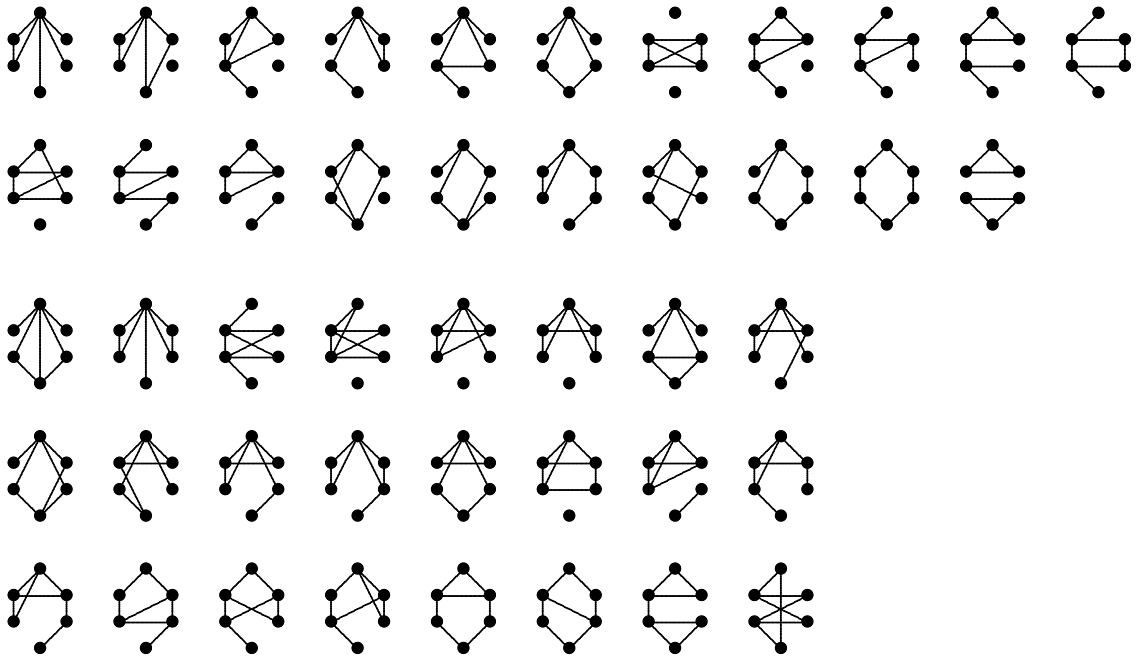
Tapaus 1: A tuntee vähintään 3 muista henkilöistä, olkoot nämä B, C, D. Jos nämä eivät tunne toisiaan lainkaan, niin $\{B, C, D\}$ on haluttu joukko. Muuten jotkut kaksi näistä tuntevat toisensa, vaikkapa B ja C, jolloin $\{A, B, C\}$ on 3 tutun joukko.

Tapaus 2: A tuntee korkeintaan 2 muista. Olkoot E, F, G henkilöitä, joita A ei tunne. Jos E, F, G tuntevat kaikki toisensa, niin $\{E, F, G\}$ on halutunlainen joukko. Muuten esim. E ja F eivät tunne toisiaan ja $\{A, E, F\}$ on kolmen toisiaan tuntemattoman joukko. $\square$

Pál Erdős on viljellyt tätä esimerkkiä osoittaakseen matemaattisen todistuksen voimaa. Edellinen todistushan on hyvin yksinkertainen ja ymmärrettävä, mutta sisältää kuitenkin runsaasti matemaattista tietoa, minkä voi todeta osoittamalla lauseen raa'alla voimalla: Kiinnitetään kuuden alkion perusjoukko, esim. 6, ja muodostetaan kaikki verkot, joilla on nämä solmuinaan. Näitä on $2^{\binom{6}{2}} = 2^{15} = 32\,768$. Käydään nämä yksitellen läpi, ja todetaan, että jokaisessa on kolmen alkion klikki tai riippumaton joukko. Menettely on työläs ja valitettavan altis virheille.

Käsiteltävien verkkojen määrää voisi periaatteessa karsia käymällä läpi vain verkkojen isomorfiatyypit. Näitä on kaikkiaan 156. Lisäksi tilanteen symmetrisyyden vuoksi riittää tarkastella verkkoja, joissa on korkeintaan $\lfloor \binom{6}{2}/2 \rfloor = 7$ särmää, jolloin tarkasteltavien isomorfiatyyppien lukumäärä putoaa 78:aan. Näiden kuvat ovat seuraavassa.





Isomorfiatyyppeihin rajoittuminenkaan ei oleellisesti helpota työtä: Ensinnäkin kahden verkon isomorfisuuden testaaminen on hyvin epätriviaali tehtävä. Toisekseenkin isomorfiatyyppejä ei ole oleellisesti vähemmän kuin kiinteän perusjoukon verkkoja, kun perusjoukon koko on suuri. Verkkoja, joiden solmujoukko on n, on näet $2^{\binom{n}{2}}$ kappaletta, kun taas isomorfiatyyppien lukumäärä on asymptoottisesti $2^{\binom{n}{2}}/n!$ (katso esim. Fagin 1973). Voidaan siis väittää, että edellisen kaltaisiin lauseisiin on koodattuna merkittävästi tietoa.

Edellisessä lauseessa esiintyvät epäsuorasti seuraavat parametrit: 1) homogeenisen joukon haluttu koko $n = 3$, 2) relaation (tuttuus) paikkaluku $k = 2$, 3) vaihtoehtoja (värejä) tuttu/ei tuttu $c = 2$ kappaletta. Tässä luentojen osassa I nämä parametrit ovat äärellisiä, minkä vuoksi puhutaan äärellisestä Ramseyn teoriasta. Kun perusjoukon koko on 6, halutunlainen homogeeninen joukko on aina olemassa. Ensimmäisen parametrin vaikutus perusjoukon kokoon on vähäisin. Kolmas vaikuttaa selvästi enemmän, mutta suuremmasta värien lukumäärästäkin selvitään helpolla induktioargumentilla. Toisen parametrin eli paikkaluvun merkitys on dramaattisin. Parametrien erilainen vaikutus näkyy luentojen rakenteessa niin, ettei seuraavassa osassa II muutetakaan muuta kuin halutun homogeenisen joukon koko äärettömäksi. Lisäksi havainnollisuuden vuoksi tulokset esitetään ensin tapauksessa $k = c = 2$.

1. Verkkojen Ramseyn lause

1.1. Määritelmä. *Verkko* on pari (V, E), missä V on epätyhjä solmujen joukko ja $E \subset V \times V$ on särmärelaatio, joka on symmetrinen ja irrefleksiivinen. Joukko $K \subset V$ on verkon (V, E) *klikki*, jos kaikilla eri $x, y \in K$ pätee $(x, y) \in E$. Joukko $I \subset V$ on verkon (V, E) *riippumaton joukko*, jos jokaisella $x, y \in I$ pätee $(x, y) \notin E$.

1.2. Ramseyn lause äärellisille verkoille *Olkoon $n \in \mathbb{N}^*$. Tällöin on olemassa sellainen $r \in \mathbb{N}^*$, että jos verkossa (V, E) on vähintään r solmua, niin siinä on n alkion klikki tai n alkion riippumaton joukko.*

Todistus. Osoitetaan induktiolla, että jokaisella $k, l \in \mathbb{N}^*$ on olemassa sellainen $r \in \mathbb{N}^*$, että vähintään r solmun verkossa on k solmun klikki tai l solmun riippumaton joukko.

Todistus etenee induktiolla summan $k + l$ suhteen.

1) Tapauksessa $k = 1$ havaitaan, että jokaisessa verkossa on yhden solmun klikki, joten voidaan valita $r = 1$. Tapaus $l = 1$ on samanlainen.

2) Induktio-oletuksen mukaan on olemassa sellaiset $r_{k-1,\ell}, r_{k,\ell-1} \in \mathbb{N}^*$, että jos verkossa on vähintään $r_{k-1,\ell}$ alkiota, niin siinä on $k - 1$ alkion klikki tai ℓ alkion riippumaton joukko; vastaavasti määritellään $r_{k,\ell-1}$. Valitaan $r = r_{k-1,\ell} + r_{k,\ell-1}$. Olkoon $G = (V, E)$ verkko, jossa on vähintään r solmua. Kiinnitetään $a \in V$ ja merkitään

$$V_+ = \{\, x \in V \mid (a, x) \in E \,\}$$

ja

$$V_- = \{\, x \in V \mid x \neq a,\ (a, x) \notin E \,\}.$$

Koska $V_+ \cup V_- = V \setminus \{a\}$ ja siis $|V_+ \cup V_-| \geq r - 1 = r_{k-1,\ell} + r_{k,\ell-1} - 1$, niin $|V_+| \geq r_{k-1,\ell}$ tai $|V_-| \geq r_{k,\ell-1}$.

a) Jos $|V_+| \geq r_{k-1,\ell}$, niin aliverkossa $G|V_+$ on $k - 1$ alkion klikki K tai ℓ alkion riippumaton joukko I. Jälkimmäisessä tapauksessa I on riippumaton joukko myös laajemmassa verkossa G. Edellisessä tapauksessa $K \cup \{a\}$ on k solmun klikki G:ssä.

b) Vastaavasti jos $|V_-| \geq r_{k,\ell-1}$, niin induktio-oletuksen mukaan aliverkossa $G|V_-$ on k solmun klikki K tai $\ell - 1$ solmun riippumaton joukko I. Edellisessä tapauksessa K on G:n k solmun klikki, jälkimmäisessä tapauksessa $I \cup \{a\}$ on G:n ℓ solmun riippumaton joukko. $\square$

2. Ramseyn funktio

Ramseyn lauseen mukaan luku

$$R(n) = \min\{\, r \in \mathbb{N}^* \mid r \text{ solmun verkossa on aina } n \text{ solmun klikki tai r.j.} \,\}$$

on hyvin määritelty, kun $n \in \mathbb{N}^*$. Näin muodostuvaa kuvausta $R\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ kutsutaan Ramseyn funktioksi (äärellisille verkoille). Lisäksi merkitään

$$R(k,\ell) = \min\{\, r \in \mathbb{N}^* \mid r \text{ solmun verkossa on aina } k \text{ solmun klikki tai } \ell \text{ solmun r.j.} \,\},$$

kun $k, \ell \in \mathbb{N}^*$. Ramseyn lauseen todistuksesta saadaan epäyhtälö

$$R(k,\ell) \le R(k-1,\ell) + R(k,\ell-1),$$

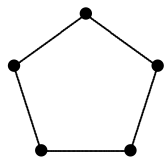
kun $k, \ell \in \mathbb{N}$, $k, \ell \ge 2$. Koska $R(k,1) = 1 \le k+1 = \binom{k+1}{1}$, saadaan induktiolla

$$R(k,\ell) \le \binom{k+\ell}{\ell} = \binom{k+\ell}{k},$$

kun $k \in \mathbb{N}^*$. Siis

$$R(n) = R(n,n) \le \binom{2n}{n} \le 2^{2n} = 4^n.$$

Nopeita havaintoja pienistä Ramseyn luvuista:

$R(3) > 5$: 

$$R(3,4) \le R(2,4) + R(3,3) = 4 + 6 = 10.$$

Harjoitustehtäväksi jätetään sen osoittaminen, että itse asiassa $R(3,4) = 9$.

$$R(4,4) \le R(3,4) + R(4,3) = 2 \cdot R(3,4) = 2 \cdot 9 = 18.$$

Harjoitustehtäväksi jätetään myös sen osoittaminen, että eräässä 17 solmun verkossa ei ole 4 solmun klikkejä eikä riippumattomia joukkoja. Siis $R(4) = 18$. Vasta vuonna 1995 McKay ja Radziszkowski saivat selville, että $R(4,5) = 25$. Luvun $R(5)$ tarkkaa arvoa ei vielä tunneta.

Ramseyn luvun tarkka laskeminen on vaikeata, koska n solmun verkkoja on paljon. Jos perusjoukko kiinnitetään, läpikäytäviä verkkoja on $2^{\binom{n}{2}}$ kappaletta. Isomorfiatyyppejä on asymptoottisesti

$$\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} \overset{\text{Stirling}}{\approx} \frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{e 2^{\frac{(n-1)}{2}}}{n} \right)^n. \qquad \text{(Fagin 1973)}$$

Ramseyn funktion asymptoottisen käyttäytymisenkin selvittämisessä on ongelmansa. Verkkojen konstruktioon perustuvat menetelmät alarajojen löytämiseksi eivät vaikuta tehokkailta, mutta Erdős keksi, että esimerkkiverkon voi valita umpimähkään.

2.1. Lause. *(Erdős 1947)* $R(n) > \sqrt{2}^{\,n}$ *kaikilla* $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$.

Todistus. Olkoon $\mathfrak{R}$ r solmun satunnaisverkko, jossa särmätodennäköisyys on $\frac{1}{2}$. Olkoon $n \in \mathbb{N}^*$. Merkitään satunnaisverkon $\mathfrak{R}$ klikkien ja riippumattomien joukkojen lukumäärää satunnaismuuttujalla X. Tällöin $X = \sum_{A \in [r]^n} I_A$, missä I_A on tapahtuman "$\mathfrak{R}|A \cong \mathbb{K}_n$ tai $\mathfrak{R}|A \cong \overline{\mathbb{K}}_n$" indikaattori ja $[r]^n = [\{0, \ldots, r-1\}]^n = \{\, A \subset \{0, \ldots, r-1\} \mid |A| = n \,\}$. Odotusarvoksi saadaan siis

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \mathbb{E}(\sum_{A \in [r]^n} I_A) = \sum_{A \in [r]^n} \mathbb{E}I_A \\
&= \binom{r}{n} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{n}{2}} \le \frac{r^n}{n!} \cdot 2 \cdot 2^{-n(n-1)/2} \\
&= \frac{2}{n!}(r \cdot 2^{-\frac{n-1}{2}})^n.
\end{aligned}$$

Erityisesti tapauksessa $r = \sqrt{2}^n$ ja $n \ge 3$ saadaan

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{"}\mathfrak{R}\text{:ssä on } n\text{:n kokoinen klikki tai riippumaton joukko"}) \\
&= \mathbb{P}(X > 0) \le \mathbb{E}X \le \frac{2}{n!}(2^{\frac{n}{2}} \cdot 2^{-\frac{n-1}{2}})^n \\
&\le \frac{2}{n!}\sqrt{2}^n \le \frac{2}{3!}\sqrt{2}^3 = 4\sqrt{2}/6 < 1,
\end{aligned}$$

joten

$$\mathbb{P}(\text{"}\mathfrak{R}\text{:ssä ei ole } n\text{:n kokoista klikkiä tai riippumatonta joukkoa"}) > 0.$$

Tästä voi päätellä, että on olemassa r alkion verkko G, jossa ei ole n alkion klikkiä eikä riippumattomia joukkoa. Siis $R(n) > \sqrt{2}^n$, kun $n \ge 3$. □

Kaikkiaan pätee

$$\sqrt{2}^n \le R(n) \le 4^n,$$

kun $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$, joten

$$\sqrt{2} \le R(n)^{1/n} \le 4.$$

Siis

$$\sqrt{2} \le \liminf_{n \to \infty} R(n)^{1/n} \le \limsup_{n \to \infty} R(n)^{1/n} \le 4.$$

Näissä luennoissa esitettyihin tuloksiin tunnetaan vain vaatimattomia parannuksia. Ei edes tiedetä, onko

$$\lim_{n \to \infty} R(n)^{1/n}$$

olemassa, vaikka raja-arvon olemattomuus merkitsisi kokolailla intuition vastaista heittelemistä Ramseyn funktion käyttäytymisessä. Varsinainen ongelma tietenkin on, jos raja-arvo on olemassa, niin mikä on tämä

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} R(n)^{1/n}?$$

Ala- ja ylärajojen kantalukujen $\sqrt{2}$ ja 4 parantaminen tunnustettaisiin jo huomattavaksi edistysaskeleeksi.

3. Äärellinen Ramseyn lause

3.1. Määritelmä. Olkoon S joukon A n-paikkainen relaatio eli $S \subset A^n = \{(a_0, \ldots, a_{n-1}) \mid a_0, \ldots, a_{n-1} \in A\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Relaatio S on *täysin symmetrinen*, jos kaikilla indeksijoukon $n = \{0, \ldots, n-1\}$ permutaatioilla σ ja kaikilla $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ pätee, että

$$(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in S \iff (a_{\sigma(0)}, \ldots, a_{\sigma(n-1)}) \in S.$$

Relaatio S on *toistoton*, jos kaikilla $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in S$ alkiot $a_0, \ldots, a_{n-1}$ ovat eri alkioita.

Huom. Jos relaatio S on täysin symmetrinen ja toistoton, niin jonon $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ kuuluminen relaatioon S riippuu vain joukosta $\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$.

3.2. Määritelmä. Olkoon S täysin symmetrinen ja toistoton n-paikkainen joukon A relaatio. Joukko $H \subset A$ kutsutaan *homogeeniseksi relaation S suhteen*, jos jompikumpi seuraavista pätee:

1) kaikilla eri $a_0, \ldots, a_{n-1} \in H$ on voimassa $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in S$. ($H$ on *positiivisesti homogeeninen*)
2) kaikilla $a_0, \ldots, a_{n-1} \in H$ pätee $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \notin S$ (eli $H^n \cap S = \emptyset$). (H on *negatiivisesti homogeeninen*)

3.3. Lause. *Olkoot $k, n \in \mathbb{N}^*$. Tällöin on olemassa sellainen $r \in \mathbb{N}^*$, että jos S on k-paikkainen vähintään r alkion joukon A toistoton ja täysin symmetrinen relaatio, niin on olemassa n alkion joukko $H \subset A$, joka on homogeeninen relaation S suhteen.*

Todistus. Kun $k, m, n \in \mathbb{N}^*$, merkitään $R_k(m, n)$:llä pienintä sellaista $r \in \mathbb{N}^*$, että jos S on k-paikkainen r alkion joukon A toistoton ja täysin symmetrinen relaatio, niin on olemassa m alkion positiivisesti homogeeninen $H \subset A$ tai n alkion negatiivisesti homogeeninen $H \subset A$. Lauseen väite on yhtäpitävää sen kanssa, että $R_k(m, n)$ on määritelty kaikilla $k, m, n \in \mathbb{N}^*$. Osoitetaan sopivalla induktioargumentilla, että tämä pätee.

1) Tapaus $k = 1$ vastaa yleistettyä laatikkoperiaatetta ($R_1(m, n) = m + n - 1$), tapaus $k = 2$ Ramseyn lausetta äärellisille verkoille.

2) Oletetaan, että $k \geq 3$ ja että väite on todistettu $(k-1)$-paikkaisille relaatioille. Todistetaan induktiolla summan $m + n$ suhteen, että $R_k(m, n)$ on määritelty. Kun $m < k$ tai $n < k$, on selvää, että $R_k(m, n) = \min\{m, n\}$.

Oletetaan siis, että $m \geq k$ ja $n \geq k$ sekä että väite on todistettu pienemmille summan $m + n$ arvoille. Asetetaan

$$r = R_{k-1}(R_k(m-1, n), R_k(m, n-1)) + 1,$$

joka on määritelty induktio-oletuksen mukaan. Tarkastellaan täysin symmetristä toistotonta relaatiota $S \subset A^k$, missä $|A| \geq r$. Kiinnitetään $a \in A$. Määritellään

$$T = \{\, \bar{b} \in (A \smallsetminus \{a\})^{k-1} \mid \bar{b}\,\hat{}\,(a) \in S \,\}$$

(kun $\bar{b} = (b_0, \ldots, b_{k-1})$, merkintä $\bar{b}\,\hat{}\,(a)$ tarkoittaa jonoa $(b_0, \ldots, b_{k-1}, a)$). Huomataan, että T on $(k-1)$-paikkainen, täysin symmetrinen, toistoton joukon $A \smallsetminus \{a\}$ relaatio. Koska

$$|A \smallsetminus \{a\}| \geq r - 1 = R_{k-1}(R_k(m-1, n), R_k(m, n-1)),$$

on olemassa

+) $H_+ \subset A \smallsetminus \{a\}$, joka on positiivisesti homogeeninen relaation T suhteen ja jolle $|H_+| = R_k(m-1, n)$

tai

−) $H_- \subset A \smallsetminus \{a\}$, joka on negatiivisesti homogeeninen relaation T suhteen ja jolle $|H_-| = R_k(m, n-1)$.

Edellisessä tapauksessa on edelleen olemassa $H_{++} \subset H_+$, joka on positiivisesti homogeeninen relaation S suhteen ja jolle $H_{+-} = m-1$ tai $H_{+-} \subset H_+$, joka on negatiivisesti homogeeninen relaation S suhteen ja jolle $H_{+-} = n$.

Jos tällainen H_{+-} on olemassa, se on vaaditunlainen homogeeninen joukko. Jos joukko H_{++} taas on olemassa, niin $H = H_{++} \cup \{a\}$ on positiivisesti homogeeninen m alkion joukko. Tapaus $-$ etenee symmetrisesti. $\square$

3.4. Määritelmä. *Suunnatulla verkolla* tarkoitetaan paria (V, E), missä $V \neq \emptyset$ ja $E \subset V^2$. Suunnattu verkko on *turnaus*, jos se on silmukaton eli kaikilla $x \in V$ pätee $(x, x) \notin E$, ja eri solmuilla $x, y \in V$ pätee joko $(x, y) \in E$ tai $(y, x) \in E$. (Intuitiivisesti: joko x voittaa y:n tai y voittaa x:n.)

3.5. Esimerkki. 18 jalkapallojoukkuetta pelaa yksinkertaisen sarjan. Oletetaan, että pelit pelataan aina ratkaisuun saakka, joten ne eivät voi päättyä tasan. Tällöin (J, E) on turnaus, missä J on joukkueiden joukko ja

$$E = \{\, (x, y) \in J \times J \mid x \text{ voitti } y\text{:n} \,\},$$

mutta myös (J, E'), missä

$$E' = \{\, (x, y) \in J \times J \mid x \text{ kotijoukkue } x\text{:n ja } y\text{:n kohtaamisessa} \,\}.$$

Olkoon $\leq$ joukon J lineaarijärjestys, esim. jonkinlainen paremmuusjärjestys. Määritellään joukkoon J erilaisia suuntaamattoman verkon särmärelaatioita:

$$\begin{aligned}
E_0 &= \{\, (x, y) \in J \times J \mid \text{kotijoukkue voitti } x\text{:n ja } y\text{:n välisen pelin} \,\} \\
&= \{\, (x, y) \in J \times J \mid x \neq y \text{ ja } ((x, y) \in E \iff (x, y) \in E') \,\} \\
E_1 &= \{\, (x, y) \in J \times J \mid (x, y) \in E \iff x \geq y \,\} \\
E_2 &= \{\, (x, y) \in J \times J \mid (x, y) \in E' \iff x \geq y \,\}.
\end{aligned}$$

Koska $R(4) = 18$, sarjassa on:

0) On olemassa 4 joukkueen klikki tai riippumaton joukko E_0:n suhteen eli joukko $A_0 \subset J$, $|A_0| = 4$, jolle pätee, että
   a) kotijoukkue voitti aina A_0:n joukkeiden välisen pelin
   tai
   b) vierasjoukkue voitti aina A_0:n väliset pelit.
1) On olemassa 4 joukkueen joukko A_1, jolle pätee, että
   a) peli vastasivat paremmuusjärjestystä
   tai
   b) pelit päättyivät aina huonomman voittoon.
2) On olemassa sellainen $A_2 \subset J$, $|A_2| = 4$, että
   a) A_2:n välisissä peleissä parempi joukkue oli kotijoukkue.
   b) A_2:n välisissä peleissä parempi joukkue oli vierasjoukkue.

3.6. Esimerkki. Olkoon $k \in \mathbb{N}^*$ ja $S \subset X \times X$, missä $|X| \geq R(k)$. Relaatiosta S voidaan määritellä suuntaamattomia särmärelaatioita, esim.

$$\begin{aligned}
E_0 &= \{ (x, y) \in X \times X \mid (x, y) \notin S \text{ ja } (y, x) \notin S \} \\
E_1 &= \{ (x, y) \in X \times X \mid \text{joko } (x, y) \in S \text{ tai } (y, x) \in S \} \\
E_2 &= \{ (x, y) \in X \times X \mid (x, y) \in S \text{ ja } (y, x) \in S \}.
\end{aligned}$$

Soveltamalla Ramseyn lausetta saadaan

0) $A_0 \subset X$, $|A_0| = k$, jolle $(A_0 \times A_0) \cap S = \emptyset$ tai jokaisella eri $x, y \in A_0$ on voimassa $(x, y) \in S$ tai $(y, x) \in S$.
1) $A_1 \subset X$, $|A_1| = k$, jolle $(A_1, S \cap (A_1 \times A_1))$ on turnaus tai $S \cap (A_1 \times A_1)$ on symmetrinen.
2) Kuten 0, mutta komplementoituna.

Entä jos haluttaisiinkiin tuntea relaatiota S vielä tarkemmin ja löytää $A \subset X$, jolle jokin seuraavista pätee?

0) $(A \times A) \cap S = \emptyset$.
1) $(A, S \cap (A \times A))$ on turnaus.
2) Kaikilla eri $x, y \in A$ pätee $(x, y) \in S$ ja $(y, x) \in S$.

Joukon A väritys on kuvaus $\chi \colon A \to C$. Yo. tilannetta vastaa implisiittisesti väritys $\chi \colon [X]^2 \to 3$, missä kukin väreistä vastaa yo. kohtia.

Äärellisten verkkojen Ramseyn lauseen muotoilu väritysten avulla. Kaikilla $n \in \mathbb{N}^*$ on olemassa sellainen $r \in \mathbb{N}^*$, että kaikilla vähintään r alkion joukoilla X ja kaikilla värityksillä $\chi \colon [X]^2 \to 2$ on olemassa sellainen $A \subset X$, että $|A| = n$ ja $\chi \restriction [A]^2$ on vakiokuvaus eli $[A]^2$ on yksivärinen.

3.7. Äärellinen Ramseyn lause. *Olkoon $n, k, c \in \mathbb{N}^*$. Tällöin on olemassa sellainen $r \in \mathbb{N}^*$, että jos joukossa A on vähintään r alkiota ja $\chi \colon [A]^k \to c$, niin on olemassa $H \subset A$, $|H| = n$, jolle $[H]^k$ on yksivärinen χ:n suhteen.*

Todistus. Tämä on jo todistettu tapauksessa $c = 2$: Asetetaan tällöin

$$S = \{ (x_0, \dots, x_{k-1}) \in A^k \mid \chi(\{x_0, \dots, x_{k-1}\}) = 1 \},$$

joka on täysin symmetrinen ja toistoton k-paikkainen relaatio. Aiemmin todistetun lauseen nojalla on olemassa sellainen $r \in \mathbb{N}^*$, että jos $|A| \geq r$, niin on olemassa $H \subset A$, joka on homogeeninen S:n suhteen eli $[H]^k$ on yksivärinen.

Voidaan olettaa, että $c = 2^u$ jollakin $u \in \mathbb{N}^*$. Todistetaan väite induktiolla luvun u suhteen; aloitusaskel $u = 1$ on jo käsitelty. Olkoon $u > 1$. Induktio-oletuksen mukaan on olemassa sellainen $R_k(n; 2^{u-1}) \in \mathbb{N}^*$, että jos joukossa X on vähintään näin monta alkiota ja $\xi\colon [X]^k \to 2^{u-1}$, niin on olemassa $H \subset X$, jolle $\xi\restriction[H]^k$ on vakiokuvaus. Asetetaan

$$r = R_k(R_k(n; 2^{u-1})).$$

Olkoon A vähintään r alkion joukko ja $\chi\colon [A]^k \to 2^u$. Määritellään

$$\psi\colon [A]^k \to 2,\ \psi(U) = \begin{cases} 1, & \text{jos } \chi(U) \geq 2^{u-1} \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Luvun r valinnan perusteella on olemassa $X \subset A$, jolle $[X]^k$ on yksivärinen ψ:n suhteen ja $|X| = R_k(n; 2^{u-1})$. Olkoon $v \in 2 \quad [X]^k$:n väri eli $\psi[[X]^k] = \{v\}$. Määritellään

$$\xi\colon [X]^k \to 2^{u-1}, \quad \xi(U) = \chi(U) - v2^{u-1}.$$

Induktio-oletuksen mukaan (koska $|X| = R_k(n; 2^{u-1})$) on olemassa $H \subset X$, $|H| = n$, jolle $[H]^k$ on yksivärinen ξ:n suhteen ja siten myös χ:n suhteen. $\square$

4. Van der Waerdenin sekä Halesin ja Jewettin lauseet

Äärellinen aritmeettinen jono on lukujono, joka on muotoa

$$(x, x + d, x + 2d, \ldots, x + (k - 1)d),$$

missä $x, d \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Tällainen on *toistoton*, jos $d \neq 0$. Jokaisessa kokonaislukujen toistottomassa aritmeettisessa jonossa esiintyvät joillakin vakioilla $a, b, d, r \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0$, täsmälleen luvut $x \in \mathbb{Z}$, joille $x \equiv r \pmod d$ ja $a \leq x \leq b$.

Motivaatio tarkastella tällaisia lukujonoja tullee lähinnä lukuteoriasta. Malliksi pari tapausta:

Dirichlet'n lause. Olkoot $r, d \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{syt}(r, d) = 1$. Tällöin on olemassa äärettömän monta alkulukua p, jotka ovat muotoa $p \equiv r \pmod d$ eli $p = r + k \cdot d$ jollain $k \in \mathbb{N}$.

Avoin ongelma: Kuinka pitkiä alkulukujen aritmeettisia jonoja on olemassa?

Tämän luvun päätavoite on osoittaa ääretön van der Waerdenin lause, jonka mukaan luonnollisten lukujen jokaisessa osituksessa äärellisen moneen osaan jokin osista sisältää mielivaltaisen pitkiä aritmeettisia jonoja.

Kaksipaikkainen van der Waerdenin funktio $W\colon \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ määritellään niin, että $W(k, c)$ on pienin sellainen $w \in \mathbb{N}^*$, että jokaista väritystä $\chi\colon w \to c$ vastaa yksivärinen pituutta k oleva toistoton aritmeettinen jono. Äärellinen van der Waerdenin lause osoittaa, että tämä funktio on hyvinmääritelty. Alkuperäisessä todistuksessa (van der Waerden 1928) $W(k+1,c)$ osoitetaan olemassaolevaksi lukujen $W(k,c')$, $c' \in \mathbb{N}^*$ avulla. Tästä todistuksesta seuraa, että W on laskettava eli rekursiivinen, mutta ei funktion W primitiivirekursiivisuutta. Jonkin aikaa spekuloitiin sillä mahdollisuudella, että W olisi esimerkki luonnollisesta kombinatorisesta funktiosta, joka ei olisi primitiivirekursiivinen, mutta Shelahin todistus vuodelta 1987 vaiensi nämä arvailut: W on primitiivirekursiivinen ja varsin alhaisella ns. Grzegorczykin tai Ackermanin hierarkian tasolla.

4.1. Määritelmä. Olkoon $n, t \in \mathbb{N}^*$. Merkitään $C_t^n = {}^n t = \{\, x \mid x\colon n \to t \,\}$; tätä kutsutaan *kombinatoriseksi kuutioksi.* Kombinatorisen kuution C_t^n *kombinatorinen suora* on mikä tahansa joukko $\{\, \bar{x}_\ell \mid \ell = 0, \ldots, t-1 \,\}$, missä jollakin $I \subset n$, $I \neq \emptyset$ ja $\bar{c}\colon n \setminus I \to t$ pätee

$$\bar{x}_\ell(i) = \begin{cases} \ell, & \text{kun } i \in I \\ \bar{c}(i), & \text{muuten.} \end{cases}$$

4.2. Esimerkki. Tapauksessa $n = 5$ ja $t = 3$

$$\{(2,2,0,0,1),(2,2,1,1,1)(2,2,2,2,1)\}$$

on kombinatorinen suora, missä $I = \{2,3\}$ ja $\bar{c}(0) = \bar{c}(1) = 2$, $\bar{c}(4) = 1$.

4.3. Merkintöjä

$$\begin{aligned} C_t^n &= {}^n t = {}^n\{0,\ldots,t-1\} \\ &= \{\, f \mid f\colon \{0,\ldots,n-1\} \to \{0,\ldots,t-1\} \,\} \\ &= \{\, (x_0,\ldots,x_{n-1}) \mid \forall i = 0,\ldots,n-1 (x_i \in \{0,\ldots,t-1\}) \,\} \end{aligned}$$

4.4. Määritelmä. Olkoot $n, t \in \mathbb{N}^*$. Kombinatorisen kuution C_t^n *Shelahin suora* on kombinatorinen suora $L = \{\, \bar{x}_\ell \mid \ell \in t \,\}$, missä $\bar{x}_\ell = \bar{c} \cup \{\, (i,\ell) \mid i \in I \,\}$, $\bar{c} \in {}^{n \setminus I} t$ on vakio ja seuraavat ehdot ovat voimassa:

(i) $I = \{j, j+1, \ldots, j'\}$ joillakin $j, j' \in n$, $j \leq j'$;
(ii) $\bar{c}(i) = t-2$, kun $i \in n$, $i < j$;
(iii) $\bar{c}(i) = t-1$, kun $i \in n$, $i > j'$.

Shelahin piste on mikä tahansa Shelahin suoran alkio.

Shelahin aliavaruus $V \subset C_t^n$ on oleellisesti karteesinen tulo Shelahin suorista, ts. luvun n voi hajottaa summaksi $n = n_0 + n_1 + \cdots + n_{s-1}$ ja on olemassa sellaiset Shelahin suorat $L_i \subset C_{t_i}^n$, $i = 0, \ldots, s-1$, että

$$\begin{aligned} V &= \{\, \bar{x}_0{}^\frown \bar{x}_1{}^\frown \cdots {}^\frown \bar{x}_{s-1} \mid \forall i \in s(\bar{x}_i \in L_i) \,\} \\ &\cong L_0 \times \cdots \times L_{s-1}. \end{aligned}$$

4.5. Määritelmä. Olkoon $\chi\colon C_t^n \to F$ väritys. Osajoukko $V \subset C_t^n$ on *käännökäs* χ:n suhteen, jos seuraava ehto pätee. Merkitään

$$p\colon t \to t-1,\ p(i) = \begin{cases} i, & \text{kun } i < t-1 \\ t-2, & \text{kun } i = t-1 \end{cases}.$$

Tällöin kaikille $\bar{x}, \bar{y} \in V$, jos $p \circ \bar{x} = p \circ \bar{y}$, niin $\chi(\bar{x}) = \chi(\bar{y})$.

4.6. Lemma. *Olkoon $n, c, t \in \mathbb{N}^*$. Oletetaan, että $n \geq c$. Olkoon $\chi\colon C_t^n \to c$ väritys. Tällöin on olemassa käännökäs Shelahin suora $L \subset C_t^n$.*

Todistus. Merkitään jokaisella $\ell = 0, \dots, n$ ja $i \in n$

$$\bar{x}_\ell(i) = \begin{cases} t-2, & \text{kun } i < \ell \\ t-1, & \text{kun } i \geq \ell. \end{cases}$$

Vektorit $\bar{x}_\ell$, $\ell = 0, \dots, n$ ovat tällöin Shelahin pisteitä. Koska niitä on $n+1$ kappaletta, jotkin kaksi ovat samanvärisiä, olkoot ne $\bar{x}_j$ ja $\bar{x}_{j'}$ $(j < j')$, ts. $\chi(\bar{x}_j) = \chi(\bar{x}_{j'})$. Molemmat sijaitsevat samalla Shelahin suoralla

$$L = \{\, \bar{c} \cup \{\, (i, m) \mid i \in n,\ j \leq i < j' \,\} \mid m \in t \,\}.$$

Ehto $\bar{x}, \bar{y} \in L$, $p \circ \bar{x} = p \circ \bar{y}$, $\bar{x} \neq \bar{y}$ toteutuu vain, kun $\{\bar{x}, \bar{y}\} = \{\bar{x}_j, \bar{x}_{j'}\}$. Koska $\chi(\bar{x}_j) = \chi(\bar{x}_{j'})$, L on siis käännökäs. $\square$

4.7. Lemma. *Olkoot $n, c, t \in \mathbb{N}^*$. Oletetaan, että $t \geq 2$ ja kun $\chi\colon C_{t-1}^n \to c$ on mikä tahansa väritys, niin C_{t-1}^n sisältää yksivärisen kombinatorisen suoran. Olkoon C_t^n käännökäs värityksen $\xi\colon C_t^n \to c$ suhteen. Tällöin C_t^n sisältää värityksen ξ suhteen yksivärisen kombinatorisen suoran.*

Todistus. Kiinnitetään $\chi = \xi \restriction C_{t-1}^n$. Tiedetään, että on olemassa yksivärinen kombinatorinen suora $L \subset C_{t-1}^n$. Olkoon

$$L = \{\, \bar{x}_\ell \mid \ell \in t-1 \,\},$$

missä $\bar{x}_\ell = \bar{c} \cup \{\, (i, \ell) \mid i \in I \,\}$, $I \neq \emptyset$, $\bar{c} \in {}^{n \setminus I}t-1$ vakio. Merkitään $\bar{x}_{t-1} = \bar{c} \cup \{\, (i, t-1) \mid i \in I \,\}$. Tällöin $L \cup \{\bar{x}_{t-1}\}$ on kombinatorinen suora C_t^n:ssä. Koska C_t^n on käännökäs ξ:n suhteen ja $p \circ \bar{x}_{t-2} = p \circ \bar{x}_{t-1}$, niin $\xi(\bar{x}_{t-2}) = \xi(\bar{x}_{t-1})$. Toisaalta kaikilla $i, j = 0, \dots, t-2$ pätee $\chi(\bar{x}_i) = \chi(\bar{x}_j)$ eli $\xi(\bar{x}_i) = \xi(\bar{x}_j)$. $\square$

4.8. Lause. *Olkoot $c, s, t \in \mathbb{N}^*$. Merkitään $n_i = c^{a_i}$, missä $a_i = \left(\prod_{j=0}^{i-1} \binom{n_j+1}{2}\right) t^{s-1}$, kun $i = 0, \dots, s-1$, ja $n = \sum_{i=0}^{s-1} n_i$. Olkoon $\chi\colon C_t^n \to c$ väritys. Tällöin on olemassa käännökäs Shelahin s-ulotteinen aliavaruus.*

Todistus. Valitaan käänteisellä induktiolla Shelahin suorat $L_i \subset C_t^{n_i}$, $i = s-1, \dots, 0$, niin että

$$V = \{\, \bar{x}_0 {}^\frown \bar{x}_1 {}^\frown \cdots {}^\frown \bar{x}_{s-1} \mid \forall i = 0, \dots, s-1 (\bar{x}_i \in L_i) \,\}$$

on käännökäs s-ulotteinen Shelahin aliavaruus. Olkoon $i < s$ ja oletetaan, että $L_{s-1}, \dots, L_{i+1}$ on jo valittu. Valitaan L_i seuraavasti. Kun $\bar{x}, \bar{y} \in C_t^{n_i}$, merkitään $\bar{x} \equiv \bar{y}$, joss kaikilla Shelahin pisteillä $\bar{x}_i \in C_t^{n_i}$, $j = 0, \dots, i-1$, ja kaikilla $\bar{x}_j \in L_j$, $j = i+1, \dots, s-1$, pätee

$$\chi(\bar{x}_0 {}^\frown \bar{x}_1 {}^\frown \cdots {}^\frown \bar{x}_{i-1} {}^\frown \bar{x} {}^\frown \bar{x}_{i+1} {}^\frown \cdots {}^\frown \bar{x}_{s-1}) = \chi(\bar{x}_0 {}^\frown \bar{x}_1 {}^\frown \cdots {}^\frown \bar{x}_{i-1} {}^\frown \bar{y} {}^\frown \bar{x}_{i+1} {}^\frown \cdots {}^\frown \bar{x}_{s-1}).$$

Relaatio $\equiv$ on ekvivalenssirelaatio, jolla on n_i ekvivalenssiluokkaa (kukin x_j, $j = 0, \ldots, i-1$ voidaan valita $\binom{n_j+1}{2} \cdot t$ tavalla, kukin x_j, $j = i+1, \ldots, s-1$ taas t tavalla.) Koska siis $p_i\colon C_t^{n_i} \to C_t^{n_i}/\equiv$ on väritys n_i värillä, on olemassa käännökäs Shelahin suora $L_i \subset C_t^{n_i}$ värityksen p_i suhteen.

On vielä osoitettava, että V on halutunlainen Shelahin aliavaruus. Olkoot $\bar{x}, \bar{y} \in V$ sellaisia, että $\sigma \circ \bar{x} = \sigma \circ \bar{y}$, missä

$$\sigma\colon t \to t-1,\ \sigma(i) = \begin{cases} t-2, & \text{kun } i = t-1 \\ i, & \text{muuten} \end{cases}.$$

Merkitään $\bar{x} = \bar{x}_0{}^\frown\bar{x}_1{}^\frown\cdots{}^\frown\bar{x}_{s-1}$ ja $\bar{y} = \bar{y}_0{}^\frown\bar{y}_1{}^\frown\cdots{}^\frown\bar{y}_{s-1}$, missä $\bar{x}_i, \bar{y}_i \in L_i$, $i = 0, \ldots, s-1$. Jokaisella $i = 0, \ldots, s-1$ pätee

$$\chi(\bar{y}_0{}^\frown\bar{y}_1{}^\frown\cdots{}^\frown\bar{y}_{i-1}{}^\frown\bar{y}_i{}^\frown\bar{x}_{i+1}{}^\frown\cdots{}^\frown\bar{x}_{s-1}) = \chi(\bar{y}_0{}^\frown\bar{y}_1{}^\frown\cdots{}^\frown\bar{y}_{i-1}{}^\frown\bar{x}_i{}^\frown\bar{x}_{i+1}{}^\frown\cdots{}^\frown\bar{x}_{s-1}),$$

sillä $\bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_{i-1}$ ovat Shelahin pisteitä ja $\bar{x}_j \in L_j$, $j = i+1, \ldots, s-1$, sekä siksi, että $\bar{x}_i \equiv \bar{y}_i$ ($\bar{x}_i, \bar{y}_i \in L_i$ ja $\sigma \circ \bar{x}_i = \sigma \circ \bar{y}_i$). Siis

$$\chi(\bar{x}) = \chi(\bar{x}_0{}^\frown\cdots{}^\frown\bar{x}_{s-1} = \chi(\bar{y}_0{}^\frown\cdots{}^\frown\bar{y}_{s-1}) = \chi(\bar{y}). \quad \square$$

4.9. Halesin ja Jewettin lause. *Olkoot $c, t \in \mathbb{N}^*$. Tällöin on olemassa sellainen $n \in \mathbb{N}^*$, että kun C_t^n väritetään c värillä, niin se sisältää yksivärisen kombinatorisen suoran.*

Todistus. Kiinnitetään värien lukumäärä c ja todistetaan väite induktiolla luvun t suhteen.

Tapaus $t = 1$ on triviaali. Oletetaan, että $t > 1$ ja väite on todistettu arvolla $t-1$. Induktio-oletuksen mukaan on olemassa sellainen $s \in \mathbb{N}^*$, että kun C_{t-1}^s väritetään c värillä, niin se sisältää yksivärisen kombinatorisen suoran. Valitaan $n \in \mathbb{N}^*$ kuten edellisessä lauseessa. Olkoon $\chi\colon C_t^n \to c$. Edellisen lauseen nojalla on olemassa käännökäs Shelahin s-ulotteinen aliavaruus V. Tämä on kanonisella tavalla bijektiivisessä suhteessa kombinatoriseen kuutioon C_t^s, ts. on olemassa muotoa

$$\varphi\colon V \to C_t^s,\ \varphi(\bar{x}) = \bar{x} \circ f$$

oleva bijektio, missä $f\colon s \to n$ on injektio. (f kerää vektorista vaihtelevia koordinaatteja vastaavia indeksejä.) Bijektio φ indusoi kombinatoriseen kuutioon C_t^s värityksen

$$\xi\colon C_t^s \to c,\ \xi(\bar{x}) = \chi(\varphi^{-1}(\bar{x}))$$

ja C_t^s on käännökäs värityksen ξ suhteen. Tiedetään, että C_{t-1}^s sisältää kombinatorisen suoran L_0, joka on yksivärinen värityksen $\xi\restriction C_{t-1}^s$ suhteen. Koska C_t^s on käännökäs, joukko L_0 voidaan jatkaa kombinatoriseksi suoraksi L, joka on yksivärinen ξ:n suhteen. Huomataan, että $\varphi^{-1}[L]$ on yksivärinen kombinatorinen suora värityksen χ suhteen. $\square$

4.10. Äärellinen van der Waerdenin lause. *Olkoot $c, k \in \mathbb{N}^*$. Tällöin on olemassa sellainen $w \in \mathbb{N}^*$, että kaikilla $\chi\colon w \to c$ on olemassa $a \in w$ ja $d \in \mathbb{N}^*$, joille $a + (k-1)d < w$ ja $\chi(a) = \chi(a+d) = \cdots = \chi(a+(k-1)d)$.*

Todistus. Kuvataan kombinatorinen kuutio C_k^n joukkoon $\mathbb{N}$ sopivalla tavalla, missä n on niin suuri, että jokaista C_k^n:n väritystä c värillä vastaa yksivärinen kombinatorinen suora. Kyseinen kuvaus on

$$f\colon C_k^n \to k^n,\ f(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i k^i.$$

Merkitään $w = k^n$. Olkoon $\chi\colon w \to c$. Valitaan L, joka on värityksen $\chi \circ f^{-1}$ suhteen yksivärinen kombinatorinen suora. Siis $L = \{\, \bar{x}_j \mid j = 0, \ldots, k-1 \,\}$, missä $\bar{x}_j = \bar{c}\,\hat{}\,\{\, (i,j) \mid i \in I \,\}$, $I \neq \emptyset$, $\bar{c} \in {}^{n \smallsetminus I}k$. Huomataan, että $f[L]$ on yksivärinen χ:n suhteen ja $f[L]$ koostuu aritmeettisesta pituutta k olevasta jonosta:

$$f(\bar{x}_j) = \Big(\sum_{i \in n \smallsetminus I} \bar{c}(i) k^i\Big) + j \sum_{i \in I} k^i = a + jd,$$

missä $a = \sum_{i \in n \smallsetminus I} \bar{c}(i) k^i$ ja $d = \sum_{i \in I} k^i \neq 0$. $\square$

4.11. Ääretön van der Waerdenin lause. *Olkoon $\mathcal{A}$ joukon $\mathbb{N}$ ositus äärellisen moneen osaan. Tällöin jossakin osassa $A \in \mathcal{A}$ on mielivaltaisen pitkiä (toistottomia) aritmeettisia jonoja.*

Todistus. Merkitään $\chi\colon \mathbb{N} \to \mathcal{A}$, $\chi(n)$ on yksikäsitteinen $A \in \mathcal{A}$, jolle $n \in A$. Merkitään lisäksi $c = |\mathcal{A}| \in \mathbb{N}$. Äärellisen van der Waerdenin lauseen nukaan jokaisella $k \in \mathbb{N}^*$ on olemassa sellainen $w \in \mathbb{N}^*$, että väritykseen $\chi \restriction w$ liittyy yksivärinen pituutta k oleva aritmeettinen jono. Valitaan $A_k \in \mathcal{A}$ niin, että kyseinen jono sisältyy A_k:hon. Koska $\mathcal{A}$ on äärellinen, niin jollakin $A \in \mathcal{A}$ pätee $A = A_k$ mielivaltaisen suurilla k. $\square$

4.12. Esimerkki. Edellisessä lauseessa ei "mielivaltaisen pitkää" voi korvata "äärettömällä". Olkoon $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ aidosti kasvava ja $f(0) = 0$. Asetetaan

$$\begin{aligned} A &= \{\, n \in \mathbb{N} \mid \text{Parillisella } m \in \mathbb{N} \text{ pätee } f(m) \leq n < f(m+1) \,\} \\ B &= \{\, n \in \mathbb{N} \mid \text{Parittomalla } m \in \mathbb{N} \text{ pätee } f(m) \leq n < f(m+1) \,\}. \end{aligned}$$

Tällöin $\{A, B\}$ on joukon $\mathbb{N}$ ositus. Kumpikaan joukoista A, B ei sisällä (toistotonta) ääretöntä aritmeettista jonoa, jos f kasvaa riittävän nopeasti,
esim. jos $\lim_{n\to\infty}(f(n+1) - f(n)) = \infty$.

5. Sovelluksia

Äärellisen Ramseyn lauseen sovelluksena on mitä luonnollisinta tarkastella Frank Ramseyn alkuperäissovellusta. Hän oli ensimmäisiä, joka tarkasteli ns. spektriongelmaa eli minkäkokoisia malleja ensimmäisen kertaluvun lauseella voi olla. Ramseyn sovellus koskee äärellisiä relationaalisia aakkostoja τ ja universaaleja lauseita, ts. lauseita, jotka ovat muotoa

$$\forall x_0 \forall x_1 \cdots \forall_{q-1} \varphi(x_0, \ldots, x_q),$$

missä kaava φ on kvanttoriton. Esimerkiksi ekvivalenssirelaation aksiomatisoinnissa aakkosto on $\{E\}$ ja aksioomat (refleksiivisyys, symmetrisyys ja transitiivisuus) ovat universaaleja. Vastaavasti osittaisilla järjestyksillä on universaalinen aksiomatisointi. Tällaisilla lauseilla ψ on seuraava ominaisuus: Jos $\mathfrak{A}$ on τ-malli, jossa on totta ψ eli $\mathfrak{A} \models \psi$, ja $\mathfrak{B}$ on $\mathfrak{A}$:n alimalli, niin $\mathfrak{B} \models \psi$. Jos siis ψ:llä on malli, jossa on n alkiota, ja $m \in \mathbb{N}^*$, $m < n$, niin ψ:llä on malli, jossa on m alkiota. (Tämä ei enää pidä paikkaansa, jos aakkostossa on funktiosymboleja, esim. jos $\tau = \{\cdot, 1, ^{-1}\}$, niin ryhmät, joissa alkioiden kertaluku on korkeintaan kaksi eli elementaariset Abelin ryhmät, voidaan aksiomatisoida universaaleilla aksioomilla.)

5.1. Merkintöjä: Olkoon $\tau = \{R_0, \ldots, R_n\}$ äärellinen relationaalinen aakkosto. Merkitään relaatiosymbolin $R \in \tau$ paikkalukua n_R:llä. τ-malliin $\mathfrak{A}$ liittyy seuraavia asioita:

- *Perusjoukko* $\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$
- *Mallin mahtavuus* $\mathrm{card}(\mathfrak{A}) = |\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})|$
- Jokaisella $R \in \tau$ relaatiosymbolin R *tulkinta* eli $R^{\mathfrak{A}} \subset \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})^{n_R}$

$\mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}$ tarkoittaa, että $\mathfrak{B}$ on mallin $\mathfrak{A}$ alimalli, ts. $\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}) \subset \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$ ja kaikilla $R \in \tau$ pätee $R^{\mathfrak{B}} = R^{\mathfrak{A}} \cap (\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))^{n_R}$. Kun $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}$ ja $B = \mathrm{Dom}(\mathfrak{B})$, merkitään myös $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}|B$ ja mallia $\mathfrak{B}$ kutsutaan mallin $\mathfrak{A}$ *suhteellistumaksi* joukkoon B. (Vertailun vuoksi: $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\restriction\varrho$ tarkoittaa mallin $\mathfrak{A}$ rajoittumaa aakkostoon ϱ eli ϱ-mallia $\mathfrak{C}$, jolle $\mathrm{Dom}(\mathfrak{C}) = \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$ ja $R^{\mathfrak{C}} = R^{\mathfrak{A}}$ kaikilla $\mathcal{R} \in \varrho \subset \tau$.)

Ramseyn idea oli seuraavanlainen: Jos lauseella ψ on riittävän iso malli $\mathfrak{A}$, niin sillä on malli $\mathfrak{B}$, joka on hyvin homogeeninen. Tästä homogeenisesta mallista saadaan rakennuspalikat, joiden avulla voidaan muodostaa mielivaltaisen suuria malleja. Nämä ovat lauseen ψ malleja, kunhan ψ on universaalinen. Jotta rakentaminen onnistuisi ristiriidattomalla tavalla, mallissa täytyy olla järjestys.

5.2. Määritelmä. Olkoon $\mathfrak{A}$ τ-malli ja $\leq^*$ joukon $\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$ (eli $\mathfrak{A}$:n universumin) lineaarijärjestys. Jonoilla $(a_0, \ldots, a_{k-1})$ ja $(b_0, \ldots, b_{k-1}) \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})^k$ on *sama tyyppi*, jos kaikilla $i, j \in k$

$$a_i \leq^* a_j \iff b_i \leq^* b_j.$$

Samantyyppisyys yleistyy myös luonnollisella tavalla tilanteeseen, jossa jonot ovat eri malleissa. Mallin $\mathfrak{A}$ sanotaan olevan *kanoninen* järjestyksen $\leq^*$ suhteen, jos kaikilla $R \in \tau$ ja $\bar{a}, \bar{b} \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})^{n_R}$ pätee: Jos $\bar{a}$:lla ja $\bar{b}$:llä on sama tyyppi, niin $\bar{a} \in R^{\mathfrak{A}} \iff \bar{b} \in R^{\mathfrak{A}}$.

5.3. Esimerkki. Jos edellä $\tau = \{R\}$, $n_R = 2$, niin seuraavat mallit ovat kanonisia joukon $\{0, 1, 2\}$ luonnollisen järjestyksen suhteen:

$$\langle \{0,1,2,3\}, \emptyset \rangle$$
$$\langle \{0,1,2,3\}, \{0,1,2,3\}^2 \rangle$$
$$\langle \{0,1,2,3\}, \{(0,1),(0,2),(1,2)\} \rangle$$
$$\langle \{0,1,2,3\}, \{(1,0),(2,0),(2,1)\} \rangle$$

5.4. Määritelmä. Olkoon τ relationaalinen aakkosto ja $k \in \mathbb{N}^*$. τ-mallin $\mathfrak{A}$ sanotaan olevan *k-kohtalokas*, jos kaikilla $\mathfrak{B}, \mathfrak{C} \leq \mathfrak{A}$, missä $\operatorname{card}(\mathfrak{B}) = \operatorname{card}(\mathfrak{C}) \leq k$, pätee

$$\mathfrak{B} \cong \mathfrak{C} \iff \operatorname{card}(\mathfrak{B}) = \operatorname{card}(\mathfrak{C}).$$

(Käsitteen nimi liittyy Fraïssén menetelmään, jonka yhteydessä käytetään käsitettä 'mallin ikä', millä tarkoitetaan mallin äärellisesti viritettyjen alimallien isomorfiatyyppien kokoelmaa.)

5.5. Lemma. *Olkoon τ äärellinen relationaalinen aakkosto, $k, n \in \mathbb{N}^*$. Tällöin on olemassa sellainen $r \in \mathbb{N}^*$, että jos τ-mallissa $\mathfrak{A}$ on vähintään r alkiota, niin on olemassa $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}$, $\operatorname{card}(\mathfrak{B}) = n$, jolle pätee seuraavaa: Jos $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}' \leq \mathfrak{B}$ ja $\operatorname{card}(\mathfrak{C}) = \operatorname{card}(\mathfrak{C}') = k$, niin $\mathfrak{C} \cong \mathfrak{C}'$.*

Todistus. Koska τ on äärellinen relationaalinen aakkosto, on olemassa isomorfiaa vaille vain äärellisen monta k:n kokoista τ-mallia. Olkoon $\mathcal{A}$ joukko epäisomorfisia kokoa k olevia τ-malleja, joka sisältää edustajan jokaisesta isomorfialuokasta. Merkitään $c = |\mathcal{A}|$. Äärellisen Ramseyn lauseen nojalla on olemassa $r \in \mathbb{N}^*$, jolle pätee: Jos $\chi\colon [A]^k \to c$ on väritys, missä $|A| \geq r$, niin on olemassa $B \subset A$, jolle $|B| = n$ ja $\chi{\restriction}[B]^k$ on yksivärinen.

Olkoon $\mathfrak{A}$ τ-malli, missä $\operatorname{card}(\mathfrak{A}) \geq r$. Määritellään $\chi\colon [\operatorname{Dom}(\mathfrak{A})]^k \to \mathcal{A}$, missä $\chi(C)$ on se yksikäsitteinen malli, jolle $\mathfrak{A}{\restriction}C \cong \chi(C) \in \mathcal{A}$. Luvun r määritelmän mukaan on olemassa $B \subset \operatorname{Dom}(\mathfrak{A})$, jolle $|B| = n$ ja $[B]^k$ on yksivärinen. Merkitään $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}{\restriction}B \leq \mathfrak{A}$. Jos $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}' \leq \mathfrak{B}$ ja $\operatorname{card}(\mathfrak{C}) = \operatorname{card}(\mathfrak{C}') = k$, niin $C = \operatorname{Dom}(\mathfrak{C}) \subset B$, $C' = \operatorname{Dom}(\mathfrak{C}') \subset B$ ja $|C| = |C'| = k$, joten C ja C' ovat samanvärisiä. Siis $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}|C \cong \chi(C) = \chi(C') \cong \mathfrak{A}|C' = \mathfrak{C}'$. $\square$

5.6. Ramseyn lause äärellisille malleille. *Olkoon τ äärellinen relationaalinen aakkosto, $k, n \in \mathbb{N}^*$. Tällöin on olemassa sellainen $r \in \mathbb{N}^*$, että jokainen vähintään r alkion τ-malli $\mathfrak{A}$ sisältää n alkion k-kohtalokkaan alimallin.*

Todistus. Väite todistetaan induktiolla edellisen lemman avulla. Aloitusaskel $k = 1$ on lemman suora sovellus. Oletetaan siis, että $k > 1$ ja että väite pätee luvulle $k - 1$ luvun k asemasta. Siis on olemassa sellainen $r' \in \mathbb{N}^*$, että jokainen vähintään r' alkion τ-malli sisältää $k - 1$-kohtalokkaan alimallin, jossa on r alkiota. Lemman nojalla on olemassa sellainen $r \in \mathbb{N}^*$, että jokainen vähintään r:n kokoinen τ-malli sisältää r':n kokoisen mallin $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}$, jolle $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}' \leq \mathfrak{B}$, $\operatorname{card}(\mathfrak{C}) = \operatorname{card}(\mathfrak{C}') = k \Rightarrow \mathfrak{C} \cong \mathfrak{C}'$. Induktio-oletuksen nojalla $\mathfrak{B}$:llä on n:n kokoinen $k - 1$-kohtalokas alimalli $\mathfrak{B}^*$. Tämä $\mathfrak{B}^*$ on k-kohtalokas. $\square$

5.7. Seuraus. *Olkoon τ ja n kuten edellä. Olkoon $\leq$ uusi kaksipaikkainen relaatiosymboli ja $\sigma = \tau \cup \{\leq\}$. Tällöin on olemassa $r \in \mathbb{N}^*$, jolle pätee seuraavaa: Olkoon $\mathfrak{A}$ vähintään r alkion σ-malli, jossa $\leq$ on tulkittu koko perusjoukon lineaarijärjestykseksi. Tällöin on olemassa n alkion $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}$, joka on kanoninen lineaarijärjestyksen $\leq^{\mathfrak{B}}$ suhteen.*

Todistus. Sovelletaan edellistä lausetta aakkostoon σ aakkoston τ sijasta. Merkitään $k = \max\{\, n_R \mid R \in \sigma \,\}$. Olkoon r kuten lauseessa ja $\mathfrak{A}$ oletuksen mukainen malli. Tällöin $\mathfrak{A}$ sisältää k-kohtalokkaan n alkion alimallin $\mathfrak{B}$. Selvästi $\mathfrak{B}$ on kanoninen $\leq^{\mathfrak{B}}$:n suhteen: Olkoon $R \in \sigma$ ja $\bar{a} = (a_0, \dots, a_{n_R-1}), \bar{b} = (b_0, \dots, b_{n_R-1}) \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{B})^{n_R}$. Oletetaan, että $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat samantyyppisiä $\leq^{\mathfrak{B}}$:n suhteen.

Koska $\mathfrak{B}$ on k-kohtalokas ja $k \geq n_R$, niin $f\colon \mathfrak{B}|\{a_0, \dots, a_{n_R-1}\} \cong \mathfrak{B}|\{b_0, \dots, b_{n_R-1}\}$, missä $f(a_i) = b_i$ kaikilla $i \in n_R$, koska $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat samantyyppisiä. Siis

$$\bar{a} \in R^{\mathfrak{B}} \iff \bar{b} = f \circ \bar{a} \in R^{\mathfrak{B}}. \quad \square$$

5.8. Lause. *(Ramsey 1930) Olkoon τ äärellinen relationaalinen aakkosto ja $q \in \mathbb{N}^*$. Tällöin on olemassa seuraavanlainen $r \in \mathbb{N}^*$: Olkoon Ψ äärellinen joukko korkeintaan kvanttoriastetta q olevia universaaleja aksioomeja. Jos tällöin Ψ:llä on r alkion malli, niin sillä on kaikenkokoisia malleja.*

Todistus. Olkoon σ ja $\leq$ kuten seurauksessa. Valitaan $n = \max(\{\, n_R \mid R \in \sigma \,\} \cup \{q\})$. Olkoon $r \in \mathbb{N}^*$ seurauksen antama luku.

Tarkastetaan, että r on halutunlainen. Olkoon Ψ äärellinen joukko korkeintaan kvanttoriastetta q olevia universaaleja lauseita. Olkoon $\mathfrak{A}$ τ-malli, jolle $\mathrm{card}(\mathfrak{A}) \geq r$ ja $\mathfrak{A} \models \Psi$. Laajennetaan $\mathfrak{A}$ σ-malliksi $\mathfrak{A}^*$, jossa $\mathfrak{A}^*$ on lineaarijärjestys.

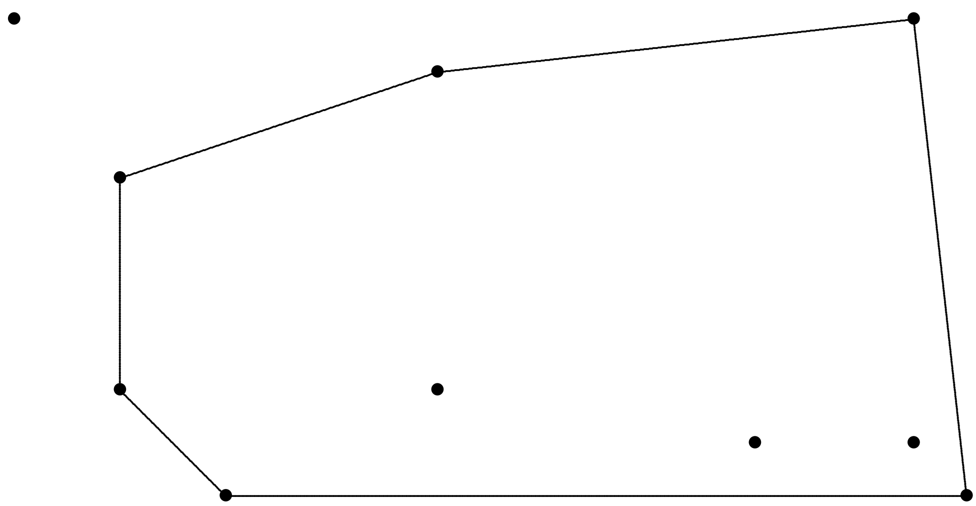
Seurauksen mukaan $\mathfrak{A}^*$:lla on alimalli $\mathfrak{B}^*$, jolle $\mathrm{card}(\mathfrak{B}^*) = n$ ja joka on kanoninen $\leq^{\mathfrak{B}^*}$:n suhteen. Tällöin $\mathfrak{B}^* \models \Psi$, koska Ψ on joukko universaaleja lauseita.

Olkoon $C \neq \emptyset$ ja $\sqsubseteq$ joukon C lineaarijärjestys. Määritellään σ-malli $\mathfrak{C}$, jolle $\mathrm{Dom}(\mathfrak{C}) = C$, $\leq^{\mathfrak{C}} = \sqsubseteq$ ja jokaisella $\mathcal{R} \in \tau$

$$R^{\mathfrak{C}} = \{\, \bar{a} \in C^{n_R} \mid \bar{a} \text{ on samantyyppinen kuin jokin } \bar{b} \in R^{\mathfrak{B}^*} \,\}.$$

Nyt kaikilla $\mathfrak{D} \leq \mathfrak{C}$, $\mathrm{card}(\mathfrak{D}) \leq q$, on olemassa $\mathfrak{D}' \leq \mathfrak{B}^*$, jolle $\mathfrak{D} \cong \mathfrak{D}'$. Tästä seuraa $\mathfrak{C} \models \Psi$. $\square$

Seuraava geometrinen sovellus on Erdősiltä ja Szekeresiltä 1930-luvulta.



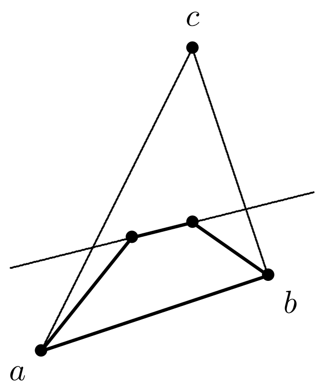
Tasossa on äärellinen määrä pisteitä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Tutkitaan, kuinka monikärkisiä kuperia monikulmioita näistä voi muodostaa. Käykö erityisesti niin, että saamme kuperaan monikulmioon halutun määrän kärkiä, kun pisteitä on riittävän monta?

5.9. Lemma. *Tasossa on viisi pistettä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Tällöin näistä voidaan valita neljä, jotka muodostavat kuperan monikulmion.*

Todistus. Olkoon A näiden viiden pisteen joukko. Muodostetaan näiden kupera peite

$$C = \left\{ \Sigma_{a \in A} \lambda_a \cdot a \;\middle|\; \Sigma_{a \in A} \lambda_a = 1, \forall a \in A (\lambda_a \geq 0) \right\}.$$

Tämän joukon C reunalla ∂C on vähintään 3 joukon A pistettä, ja C on kupera. Jos näitä pisteitä on vähintään neljä, ne muodostavat halutunlaisen kuperan monikulmion. Voidaan siis olettaa, että $|\partial C \cap A| = 3$.



Merkitään $\partial C \cap A = \{a, b, c\}$ ja $A \setminus \partial C = \{d, e\}$. Piirretään pisteiden d ja e kautta suora; se jakaa tason kahteen osaan, joista toiseen jää kaksi pisteistä a, b, c; olkoot nämä a ja b. Pisteet a, b, d ja e ovat kuperan nelikulmion kärkiä. $\square$

5.10. Lause. *Kaikilla $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, on olemassa sellainen $r \in \mathbb{N}$, että jos tasossa on r pistettä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla, niin niistä voidaan valita n, jotka muodostavat kuperan n-kulmion.*

Todistus. Valitaan $r = R_4(n)$. Olkoon A tasojoukko, jolle $|A| = r$ ja jonka pisteistä mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Tarkastellaan väritystä

$$\chi \colon [A]^4 \to \{0, 1\},\ \chi(B) = \begin{cases} 1, & \text{jos pisteet } B \text{ ovat kuperan nelikulmion kärkiä} \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Voidaan olettaa, että $n \geq 5$. Ramseyn lauseen mukaan on olemassa $H \subset A, |H| = n$, jolle $[H]^4$ on yksivärinen. Edellisen lemman mukaan $\chi\left[[H]^4\right] = \{0\}$ on mahdotonta, koska on olemassa $H_0 \subset H, |H_0| = 4$, jolle $\chi(H_0) = 1$. Siis $\chi\left[[H]^4\right] = \{1\}$. Tästä seuraa, että joukon H pisteet muodostavat kuperan n-kulmion. $\square$

II Äärettömien joukkojen Ramseyn teoriaa

1. Ääretön Ramseyn lause

Tarkastellaan tässä äärellisen Ramseyn teorian yleistystä, jossa äärelliset homogeeniset joukot korvataan äärettömillä.

1.1. Määritelmä. $F \subset P(I)$ on joukon I *filtteri* (eli *seula*), jos seuraavat ehdot ovat voimassa:
1) $\emptyset \notin F$ ja $I \in F$
2) $\forall X, Y \subset I \; (X \in F, X \subset Y \Rightarrow Y \in F)$
3) $\forall X, Y \in F \; (X \cap Y \in F)$

Joukon I filtteri F on *ultrafiltteri*, jos lisäksi
4) $\forall X \subset I \; (X \in F \vee I \smallsetminus X \in F)$.

Filtteri F on *vapaa*, jos $\bigcap F = \emptyset$.

1.2. Esimerkki. Olkoon I ääretön joukko. Tällöin

$$F = \{\, X \subset I \mid I \smallsetminus X \text{ äärellinen} \,\}$$

on filtteri, ns. Frechet'n filtteri. Se ei kuitenkaan ole ultrafiltteri, sillä joukon I voi osittaa kahdeksi äärettömäksi joukoksi J ja K, joista kumpikaan ei kuulu F:ään: $I \smallsetminus J = K$ ja $I \smallsetminus K = J$ ovat äärettömiä.

1.3. Lemma. *Olkoon F joukon I vapaa filtteri. Tällöin F ei sisällä äärellisiä joukkoja.*

Todistus. Oletetaan vastoin väitettä, että

$$F \cap [I]^{<\omega} \neq \emptyset$$

(missä $[I]^{<\omega} = \{\, X \subset I \mid X \text{ äärellinen} \,\}$). Olkoon X_0 joukon $F \cap [I]^{<\omega}$ mahtavuudeltaan pienin alkio. Koska $\bigcap F = \emptyset$, on olemassa sellainen Y, että $X_0 \not\subset Y$. Mutta tällöinhän $X_0 \cap Y \in F$ ja $|X_0 \cap Y| < |X_0|$, mikä on ristiriita. $\square$

1.4. Seuraus. *Vapaa ultrafiltteri sisältää Frechet'n filtterin.*

Todistus. Jos F on joukon I vapaa ultrafiltteri ja $X \subset I$ on sellainen, että $I \smallsetminus X$ on äärellinen, niin edellisen nojalla $I \smallsetminus X \notin F$. Koska toisaalta F on ultrafiltteri, niin joukoista X ja $I \smallsetminus X$ toinen kuuluu F:ään, siis $X \in F$. $\square$

1.5. Lemma. *Olkoon $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(I)$ epätyhjä. Oletetaan, että perheellä $\mathcal{A}$ on äärellisten leikkausten ominaisuus, ts. kaikilla äärellisillä $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ on voimassa $\bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Tällöin*

$$F = \langle \mathcal{A} \rangle = \{\, X \subset I \mid \exists \mathcal{B} \subset \mathcal{A}(\mathcal{B} \text{ on äärellinen ja } \bigcap \mathcal{B} \subset X) \,\}$$

on filtteri.

Todistus. Koska $\mathcal{A}$:lla on äärellisten leikkausten ominaisuus, niin $\emptyset \neq F$. Koska $\mathcal{A}$ on epätyhjä, on olemassa $A \in \mathcal{A}$, joten $\bigcap\{A\} = A \subset I$ ja $I \in F$. Selvästi F on ylöspäin suljettu. Lopuksi havaitaan, että jos $X, Y \in F$, niin on olemassa äärelliset $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subset \mathcal{A}$, joille $\bigcap \mathcal{B} \subset X, \bigcap \mathcal{B}' \subset Y \Rightarrow \bigcap(\mathcal{B} \cup \mathcal{B}') = \bigcap \mathcal{B} \cap \bigcap \mathcal{B}' \subset X \cap Y \Rightarrow X \cap Y \in F$ ($\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ on äärellinen) $\square$

1.6. Lause. *Olkoon $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(I)$ epätyhjä joukko, jolla on äärellisten leikkausten ominaisuus. Tällöin on olemassa joukon I ultrafiltteri D, jolle $\mathcal{A} \subset D$.*

Todistus. Luetellaan joukon $\mathcal{P}(I)$ alkiot: $\mathcal{P}(I) = \{ X_\alpha \mid \alpha < \kappa \}$, missä $\kappa = |\mathcal{P}(I)| = 2^{|I|}$ on $\mathcal{P}(I)$:n mahtavuus. Määritellään kasvava jono filttereitä D_α, $\alpha < \kappa$, transfiniittisellä induktiolla ordianaalin $\alpha < \kappa$ suhteen.

1) Asetetaan $D_0 = \langle \mathcal{A} \rangle \supset \mathcal{A}$.
2) Olkoon $\alpha < \kappa$; määritellään $D_{\alpha+1}$, kun D_α on määritelty. Osoitetaan, että $I \setminus X_\alpha \in D_\alpha$ tai joukolla $D_\alpha \cup \{X_\alpha\}$ on äärellisten leikkausten ominaisuus. Oletetaan nimittäin, että $I \setminus X_\alpha \notin D_\alpha$. Olkoon $\mathcal{B} \subset D_\alpha \cup \{X_\alpha\}$ äärellinen. Jos $\mathcal{B} \subset D_\alpha$, niin $\bigcap \mathcal{B} \in D_\alpha \Rightarrow \bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset$, sillä D_α on filtteri. Muuten $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cup \{X_\alpha\}$ ja $\bigcap \mathcal{B} = \bigcap \mathcal{B}_0 \cap X_\alpha = Y \cap X_\alpha$, missä $Y = \bigcap \mathcal{B}_0 \in D_\alpha$. Nyt $Y \cap X_\alpha \neq \emptyset$, sillä muuten $Y \subset I \setminus X_\alpha$, mistä seuraa $I \setminus X_\alpha \in D_\alpha$, mikä on vastoin oletusta. Siis perheellä $D_\alpha \cup \{X_\alpha\}$ on äärellisten leikkausten ominaisuus. Asetetaan
$$D_{\alpha+1} = \begin{cases} D_\alpha, & \text{jos } I \setminus X_\alpha \in D_\alpha \\ \langle D_\alpha \cup \{X_\alpha\} \rangle, & \text{muuten.} \end{cases}$$
3) Olkoon $\gamma < \kappa$ rajaordinaali. Tällöin asetetaan $D_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} D_\alpha$. Tämä D_γ on filtteri.

Lopuksi asetetaan $D = \bigcup_{\alpha<\kappa} D_\alpha$. D on selvästi filtteri, ja jokaisella $X \subset I$ on olemassa $\alpha < \kappa$, jolle $X = X_\alpha$. Konstruktion mukaan joko $X = X_\alpha \in D_\alpha \subset D$ tai $I \setminus X = I \setminus X_\alpha \in D_\alpha \subset D$. $\square$

1.7. Seuraus. *Jokaisella äärettömällä I on olemassa joukon I vapaa ultrafiltteri.*

Todistus. Olkoon F joukon I Frechet'n filtteri. Edellisen lauseen mukaan on olemassa joukon I ultrafiltteri $D \supset F$. Koska $\bigcap D \subset \bigcap F \subset \bigcap_{i \in I} I \setminus \{i\} = \emptyset$, niin ultrafiltteri D on vapaa. $\square$

1.8. Ramseyn lause äärettömille verkoille. *Äärettömässä verkossa on aina ääretön klikki tai ääretön riippumaton joukko.*

Todistus. Olkoon $G = (V, E)$ ääretön verkko. Edellisen seurauksen mukaan on olemassa V:n vapaa ultrafiltteri D. Merkitään jokaisella $x \in V$ $\quad N_x = \{ y \in V \mid (x, y) \in E \}$. Asetetaan $A = \{ x \in V \mid N_x \in D \}$. Osoitetaan, että jos $A \in D$, niin verkossa G on ääretön klikki, muuten ääretön riippumaton joukko.

1) Oletetaan, että $A \in D$. Valitaan induktiolla alkiot
$$a_i \in A_i = A \cap \bigcap_{j=0}^{i-1} N_{a_j},$$

kun $i \in \mathbb{N}$. Kyseinen joukko A_i on epätyhjä, sillä se on äärellinen leikkaus ultrafiltteriin D kuuluvista joukoista A, N_{a_i} $(j = 0, \ldots, i-1)$ ja $V \smallsetminus \{a_0, \ldots, a_{i-1}\}$. (Viimeisen joukon kohdalla tämä pätee, koska D on vapaa.) Valituista alkioista voidaan muodostaa ääretön klikki

$$K = \{\, a_i \mid i \in \mathbb{N} \,\}.$$

Nimittäin $a_j \notin \{a_0, \ldots, a_{j-1}\} \Rightarrow a_i \neq a_j$ ja $a_j \in N_{a_i} \Rightarrow (a_i, a_j) \in E$, kun $i < j$.

2) Oletetaan sitten, että $A \notin D$. Havaitaan, että $V \smallsetminus A = \{\, x \in V \mid N_x \notin D \,\} = \{\, x \in V \mid V \smallsetminus N_x \in D \,\}$. Riippumaton joukko voidaan siis rakentaa kuten edellä valitsemalla nyt

$$a_i \in ((V \smallsetminus A) \cap \bigcap_{j=0}^{i-1} (V \smallsetminus N_{a_j}) \smallsetminus \{\, a_j \mid j = 0, \ldots, i-1 \,\},$$

kun $i \in \mathbb{N}$. Tässä tapauksessa $I = \{\, a_i \mid i \in \mathbb{N} \,\}$ on ääretön riippumaton joukko. □

1.9. Ääretön Ramseyn lause. *Olkoot $k, c \in \mathbb{N}^*$. Olkoon $\chi\colon [\mathbb{N}]^k \to c$ väritys. Tällöin on olemassa ääretön $H \subset \mathbb{N}$, jolle $[H]^k$ on yksivärinen.*

Todistus. Olkoon D joukon $\mathbb{N}$ vapaa ultrafiltteri. Määritellään värityksen χ eräänlaiset projektiot D:n suhteen:

$$\chi_k = \chi$$
$$\chi_\ell\colon [\mathbb{N}]^\ell \to c,\ \chi_\ell(A) = v,$$

missä v on se yksikäsitteinen v, jolla

$$U_v = \{\, b \in \mathbb{N} \smallsetminus A \mid \chi_{\ell+1}(A \cup \{b\}) = v \,\} \in D,$$

$\ell = 0, \ldots, k-1$. (Joukot U_v muodostavat joukon $\mathbb{N} \smallsetminus A$ osituksen $\{\, U_v \mid v \in c \,\} \smallsetminus \{\emptyset\}$.) Merkitään v^*:llä sitä väriä, jolle $\chi_0(\emptyset) = v^*$. Valitaan induktiolla luvut $a_i \in \mathbb{N}$ niin, että kaikilla $\ell = 0, \ldots, k$ ja eri alkioilla $i_0, \ldots, i_{\ell-1} \in \mathbb{N}$ pätee $\chi_\ell(\{a_{i_0}, \ldots, a_{i_{\ell-1}}\}) = v^*$. Oletetaan, että $a_0, \ldots, a_{i-1}$ on jo valittu niin, että ehto pätee niiden kohdalla. Olkoon $S \in [\{a_0, \ldots, a_{i-1}\}]^{<k}$. Induktio-oletuksen mukaan

$$N_S = \{\, b \in \mathbb{N} \mid b > a_{i-1},\ \chi_{|S|+1}(S \cup \{b\}) = v^* \,\} \in D,$$

sillä $\chi_{|S|}(S) = v^*$. Siis

$$N = \bigcap_{S \in [\{a_0, \ldots, a_{i-1}\}]^{<k}} N_S \in D,$$

joten voidaan valita $a_i \in N$, joka toteuttaa vaaditut ehdot. Asetetaan $H = \{\, a_i \mid i \in \mathbb{N} \,\}$. Tällöin H on ääretön, koska jono $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ on kasvava. Lisäksi

$$\chi[[H]^k] = \chi_k[[H]^k] = \{v^*\}. \quad \square$$

1.10. Äärettömästä Ramseyn lauseesta seuraa äärellinen.

Vastaoletus: On olemassa sellaiset $k, n, c \in \mathbb{N}^*$, että kaikilla $r \in \mathbb{N}$ on olemassa sellainen väritys $\chi_r^* : [r]^k \to c$, että ei ole olemassa joukkoa $H \subset r$, $|H| = n$, jolle $[H]^k$ olisi yksivärinen.

Laajennetaan jokainen χ_r^*, $r \in \mathbb{N}$, kuvaukseksi $\chi_r : [\mathbb{N}]^k \to c$, $\chi_r^* \subset \chi_r$. Näitä värityksiä voidaan ajatella topologisena avaruutena $X = {}^{[\mathbb{N}]^k}c$, missä värien avaruus c on diskreetti. Koska c on äärellinen, se on kompakti ja Tihonovin lauseen mukaan X on kompakti. X on myös Hausdorffin avaruus. Tämän avaruuden kantana on

$$B = \{\, B_\xi \mid \xi : A \to c,\ A \subset [\mathbb{N}]^k \text{ äärellinen} \,\},$$

missä $B_\xi = \{\, \chi \in X \mid \xi \subset \chi \,\}$.

Jonolla $(\chi_r)_{r \in \mathbb{N}^*}$ on avaruudessa X kosketuspiste, sillä joko $\{\, \chi_r \mid r \in \mathbb{N} \,\}$ on äärellinen tai $\{\chi_r | r \in \mathbb{N}\}$ on ääretön, joten sillä on kompaktissa Hausdorffin avaruudessa kasaantumispiste. Olkoon tämä kosketusarvo χ. Äärettömän Ramseyn lauseen mukaan väritystä $\chi : [\mathbb{N}]^k \to c$ vastaa ääretön $H_0 \subset \mathbb{N}$, jolle $[H_0]^k$ on yksivärinen. Erityisesti mielivaltaisesti valitulle $H \subset H_0$, $|H| = n$ kuvaus $\xi = \chi \restriction [H]^k$ on vakio.

Tarkastellaan värityksen χ ympäristöä B_ξ. Koska χ on jonon $(\chi_r)_{r \in \mathbb{N}}$ kosketusarvo, on olemassa äärettömän monta $r \in \mathbb{N}^*$, jolle $\chi_r \in B_\xi$. Valitsemalla riittävän suuri tällainen $r \in \mathbb{N}^*$, pätee siis $H \subset r$ ja $\chi_r \in B_\xi$ eli $\xi \subset \chi_r$ eli $\chi_r^* \restriction [H]^k = \chi_r \restriction [H]^k$ on vakio, mikä on ristiriidassa χ_r^*:n valinnan kanssa.

2. Malliteoreettinen sovellus

2.1. Määritelmä. Olkoon τ aakkosto ja $\mathfrak{A}$ τ-malli sekä $\leq$ Dom($\mathfrak{A}$):n lineaarijärjestys. $X \subset \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$ on joukko *erottumattomia* alkioita mallissa järjestyksen $\leq$ suhteen, jos aina kun $\bar{a}, \bar{b} \in X^{<\omega}$ ovat samantyyppisiä järjestyksen $\leq$ suhteen, niin

$$\langle \mathfrak{A}, \bar{a} \rangle \equiv \langle \mathfrak{A}, \bar{b} \rangle$$

eli jokaiselle aakkoston τ ensimmäisen kertaluvun kaavalle $\varphi(\bar{x})$, missä $|\bar{x}| = |\bar{a}|$, pätee

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[\bar{b}].$$

Kvanttoriaste:

$$\begin{aligned}
&qr(\varphi) = 0, \text{ jos } \varphi \text{ on kvanttoriton} \\
&qr(\neg\varphi) = qr(\varphi) \\
&qr(\varphi \wedge \psi) = \max\{qr(\varphi), qr(\psi)\} \\
&qr(\exists x \varphi(x)) = qr(\varphi) + 1
\end{aligned}$$

2.2. Määritelmä. Olkoon $\mathfrak{A}$ τ-malli, $q \in \mathbb{N}$, $\leq$ Dom($\mathfrak{A}$):n lineaarijärjestys. $X \subset$ Dom($\mathfrak{A}$) on joukko *erottumattomia alkioita mallista $\mathfrak{A}$ järjestyksen $\leq$ suhteen kvanttoriasteeseen q saakka k muuttujan suhteen*, jos kaikilla järjestyksen $\leq$ suhteen samantyyppisillä $\bar{a}, \bar{b} \in X^{<\omega}$ ja FO-kaavoilla $\varphi(\bar{x})$ ($|\bar{x}| = |\bar{a}|$), $qr(\varphi) \leq q$ on voimassa

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[\bar{b}].$$

2.3. Lemma. *Olkoon τ äärellinen aakkosto, $\mathfrak{A}$ ääretön τ-malli ja $\leq$ Dom($\mathfrak{A}$):n lineaarijärjestys. Tällöin jokaisella $q \in \mathbb{N}$ on olemassa ääretön joukko X kvanttoriasteeseen q k muuttujan suhteen erottumattomia alkioita.*

Todistus. (hahmotelma) Kiinnitetään $q \in \mathbb{N}$, $|\bar{x}| = k$ ja olkoon Φ äärellinen joukko korkeintaan kvanttoriastetta q olevia aakkoston τ FO-kaavoja $\varphi(\bar{x})$, joka sisältää loogista ekvivalenssia vaille kaikki tällaiset kaavat. Väritetään $[\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})]^k$ seuraavasti kuvauksella $\chi : [\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})]^k \to P(\Phi)$:

$$\chi(A) = \{\, \varphi \in \Phi \mid \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}) \,\}$$

missä $A = \{a_0, \ldots, a_{k-1}\}, a_0 < a_1 < \cdots < a_{k-1}$ ja $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_{k-1})$. Koska χ on äärellinen väritys, Ramseyn lauseen mukaan on olemassa ääretön $X \subset$ Dom($\mathfrak{A}$), jolle $[X]^k$ on yksivärinen. $\square$

2.4. Lause. *Olkoon τ äärellinen relationaalinen aakkosto ja $\mathfrak{A}$ ääretön τ-malli. Tällöin on olemassa $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$ ja* Dom($\mathfrak{B}$)*:n lineaarijärjestys $\leq$ jolle on olemassa ääretön joukko X erottumattomia alkioita.*

Todistus. (hahmotelma) Olkoon $T = Th(\mathfrak{A})$. Tarkastellaan seuraavaa teoriaa laajennetussa aakkostossa $\sigma = \tau \cup \{\leq\} \cup \{\, c_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$.

$$\begin{aligned} T' = T &\cup \{\text{"}\leq \text{ on lineaarijärjestys"}\} \\ &\cup \{\varphi(c_{i_0}, \ldots, c_{i_{n-1}}) \leftrightarrow \varphi(c_{j_0}, \ldots, c_{j_{n-1}}) \mid i_0 < i_1 < \ldots < i_{k-1}, \\ &\qquad j_0 < j_1 < \ldots j_{k-1},\ i_u, j_u \in \mathbb{N},\ \varphi \text{ aakkoston } \tau \text{ kaava}\} \end{aligned}$$

Edellisen lemman mukaan T':n äärellisillä osajoukoilla on malli. Kompaktisuuslauseen mukaan on olemassa $\mathfrak{B} \models T'$. $\square$

3. Hindmanin lause

Tavoitteena on osoittaa, että jokaiseen luonnollisten lukujen joukon $\mathbb{N}$ äärelliseen väritykseen liittyy ääretön joukko, jonka alkioista muodostetut äärelliset summat ovat samanvärisiä. Tämän ns. Hindmanin lauseen todistamiseen käytetään Glazerin ideaa. Tämä perustuu sellaisen ultrafiltterin D käyttöön, joka toteuttaa symbolisesti ehdon $D + D = D$. Tällaisen olemassaolo perustuu viime kädessä seuraavaan lauseeseen:

3.1. Lause. *(Idempotenssilause) Varustetaan joukko E sekä topologialla $\mathcal{T}$ että laskutoimituksella $\cdot\colon E \times E \to E$. Oletetaan, että $(E, \mathcal{T})$ on kompakti Hausdorffin avaruus ja $(E, \cdot)$ on puoliryhmä eli $\cdot$ on liitännäinen. Oletetaan, että kaikilla $g \in E$ kuvaus $\psi_g\colon E \to E$, $\psi_g(f) = f \cdot g$ on jatkuva. Tällöin on olemassa $g \in E$, jolle $g^2 = g$.*

Todistus. Olkoon $\mathcal{A}$ niiden osajoukkojen $A \subset E$ joukko, joille A on suljettu $(E, \mathcal{T})$:ssä ja A on suljettu laskutoimituksen $\cdot$ suhteen sekä $A \neq \emptyset$. Koska $E \in \mathcal{A}$, niin $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Olkoon $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ ketju, ts. $(\mathcal{C}, \subset)$ on lineaarijärjestys ja $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Merkitään $C = \bigcap \mathcal{C}$. C on tietenkin suljettujen joukkojen leikkauksena suljettu, mutta koska $\mathcal{C}$:n alkiot ovat kompaktin Hausdorffin avaruuden suljettuja osajoukkoja, joiden äärelliset leikkaukset ovat $\mathcal{C}$:ssä, niin $C = \bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$. C on tietenkin suljettu laskutoimituksen suhteen, joten $C \in \mathcal{C}$.

Zornin lemmasta seuraa siis, että $\mathcal{A}$:ssä on minimaalinen alkio X. Valitaan $g \in X$ mielivaltaisesti. Tarkastellaan joukkoa

$$Xg = \{\, xg \mid x \in X \,\} = \psi_g[X].$$

Koska X on kompaktin Hausdorffin avaruuden suljettuna osajoukkona kompakti ja ψ_g on jatkuva, niin $Xg = \psi_g[X]$ on suljettu. Tietenkin $Xg \neq \emptyset$. Kaikilla $x, y \in X$ pätee $(xg)(yg) = (xgy)g \in Xg$, joten Xg on suljettu laskutoimituksen suhteen. Siis $Xg \in \mathcal{A}$. Lisäksi $Xg \subset X$, joten X:n minimaalisuuden nojalla $Xg = X$. Siis jollakin $f \in X$ pätee $fg = g$. Merkitään

$$B = \{\, f \in X \mid fg = g \,\}.$$

Joukko B on suljettu laskutoimituksen $\cdot$ suhteen, sillä kaikilla $f_0, f_1 \in B$

$$(f_0 f_1)g = f_0(f_1 g) = f_0 g = g.$$

Toisaalta

$$B = \{\, f \in X \mid \psi_g(f) \in \{g\} \,\} = \psi_g^{-1}[\{g\}]$$

on yksiön alkukuvana jatkuvassa kuvauksessa suljettu. Koska $B \neq \emptyset$, saadaan $B \in \mathcal{A}$, $B \subset X$, mistä seuraa X:n minimaalisuuden nojalla $B = X$. Koska $g \in X = B$, niin $g \cdot g = g$. $\square$

3.2. Määritelmä. Olkoon D joukon I ja E joukon J filtteri. Filtterien D ja E *tulo* $D \otimes E$ on niiden $A \subset I \times J$ joukko, joille

$$\{\, j \in J \mid \{\, i \in I \mid (i, j) \in A \,\} \in D \,\} \in E.$$

(Intuitiivisesti: E-m.k. j pätee, että D-m.k. i pätee $(i, j) \in A$.)

3.3. Lemma. *Filtterien tulo on filtteri ja ultrafiltterien tulo on ultrafiltteri.*

Todistus. Olkoon D joukon I ja E joukon J filtteri. Merkitään

$$\begin{aligned} &p\colon \mathcal{P}(I \times J) \to \mathcal{P}(J), \\ &\quad p(A) = \{\, j \in J \mid \{\, i \in I \mid (i, j) \in A \,\} \in D \,\}. \end{aligned}$$

Tällöin $D \otimes E = \{ A \subset I \times J \mid p(A) \in E \}$ ja projektiolla on seuraavia ominaisuuksia:

1) $p(\emptyset) = \{ j \in J \mid \emptyset \in D \} = \emptyset$ ja $p(I \times J) = \{ j \in J \mid I \in D \} = J$.

2) Jos $A \subset B \subset I \times J$, niin jokaisella $j \in J$ pätee

$$\{ i \in I \mid (i, j) \in A \} \subset \{ i \in I \mid (i, j) \in B \},$$

mistä seuraa $p(A) \subset p(B)$.

3) Olkoot $A, B \subset I \times J$. Merkitään jokaisella $j \in J$ $\quad A_j = \{ i \in I \mid (i, j) \in A \}$, $B_j = \{ i \in I \mid (i, j) \in B \}$ ja $C_j = \{ i \in I \mid (i, j) \in A \cap B \}$. Tällöin $C_j = A_j \cap B_j$, joten $C_j \in D \iff A_j \in D \wedge B_j \in D$. Siis

$$p(A \cap B) = \{ j \in J \mid C_j \in D \} = p(A) \cap p(B).$$

Näistä ominaisuuksista seuraa, että $D \otimes E$ on filtteri,

Jos D ja E ovat ultrafilttereitä, niin lisäksi on voimassa

4)
$$\begin{aligned} p((I \times J) \smallsetminus A) &= \{ j \in J \mid \{ i \in I \mid (i, j) \notin A \} \in D \} \\ &= \{ j \in J \mid I \smallsetminus \{ i \in I \mid (i, j) \in A \} \in D \} \\ &= J \smallsetminus \{ j \in J \mid \{ i \in I \mid (i, j) \in A \} \in D \} \\ &= J \smallsetminus p(A) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} A \in D \otimes E &\iff p(A) \in E \iff J \smallsetminus p(A) \notin E \\ &\iff p((I \times J) \smallsetminus A) \notin E \iff (I \times J) \smallsetminus A \notin D \otimes E, \end{aligned}$$

kun $A \subset I \times J$. $\quad\square$

3.4. Määritelmä. Olkoon $f \colon I \to J$ kuvaus ja D joukon I filtteri. Filtteri E saadaan *Rudin–Keisler-palautuksella* f filtteristä D, jos

$$E = \{ A \subset J \mid f^{-1}[A] \in D \} = f^{-1}[[D]].$$

3.5. Lemma. *Olkoon $f \colon I \to J$ kuvaus ja D joukon I filtteri. Tällöin*

$$E = \{ A \subset J \mid f^{-1}[A] \in D \}$$

on joukon J filtteri. Jos D on ultrafiltteri, niin myös E on ultrafiltteri.

Todistus. $\emptyset \notin E$, koska $f^{-1}[\emptyset] \notin D$. $J \in E$, koska $f^{-1}[J] = I \in D$. E on selvästi ylöspäin suljettu. E on myös leikkausten suhteen suljettu, koska

$$f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B],$$

kun $A, B \subset J$. Jos D on ultrafiltteri, myös E on, koska $f^{-1}[J \smallsetminus A] = I \smallsetminus f^{-1}[A]$, kun $A \subset J$. $\quad\square$

3.6. Määritelmä. Joukon $\mathbb{N}$ filttereiden D ja E *summa* on se filtteri $D + E$, joka saadaan Rudin–Keisler-palautuksella $+\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ filtteristä $E \otimes D$.

3.7. Lemma. *Filtterien summa on liitännäinen laskutoimitus joukon $\mathbb{N}$ filtterien joukossa.*

Todistus. Olkoot D, E ja F joukon $\mathbb{N}$ filttereitä. Kun $A \subset \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A \in D + E &\iff +^{-1}[A] \in E \otimes D \\ &\iff \{\, m \in \mathbb{N} \mid \{\, n \in \mathbb{N} \mid (n, m) \in +^{-1}[A] \,\} \in E \,\} \in D \\ &\iff \{\, m \in \mathbb{N} \mid \{\, n \in \mathbb{N} \mid m + n \in A \,\} \in E \,\} \in D. \end{aligned}$$

Kun $A \subset \mathbb{N}$ ja $m \in \mathbb{N}$, merkitään $A \dot{-} m = \{\, n \in \mathbb{N} \mid m + n \in A \,\}$. Asetetaan jokaisella joukon $\mathbb{N}$ filtterillä U

$$\psi_U\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \psi_U(A) = \{\, m \in \mathbb{N} \mid A \dot{-} m \in U \,\}$$

Tällöin

$$A \in D + E \iff \psi_E(A) \in D \tag{1}$$

Lisäksi havaitaan, että

$$A \in D \iff 0 \in \psi_D(A). \tag{2}$$

Näistä saadaan yhdistämällä

$$\begin{aligned} 0 \in \psi_{D+E}(A) &\underset{(2)}{\iff} A \in D + E \\ &\underset{(1)}{\iff} \psi_E(A) \in D \\ &\underset{(2)}{\iff} 0 \in \psi_D(\psi_E(A)) = \psi_D \circ \psi_E(A) \end{aligned}$$

Lisäksi jokaisella $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} m \in \psi_U(A \dot{-} n) &\iff (A \dot{-} n) \dot{-} m \in U \\ &\iff A \dot{-} (m + n) \in U \\ &\iff m + n \in \psi_U(A) \\ &\iff m \in \psi_U(A) \dot{-} n \end{aligned}$$

Siis kaikilla $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} m \in \psi_{D+E}(A) &\iff 0 \in \psi_{D+E}(A \dot{-} m) \\ &\iff 0 \in \psi_D(\psi_E(A \dot{-} m)) = \psi_D(\psi_E(A) \dot{-} m) = \psi_D(\psi_E(A)) \dot{-} m \\ &\iff m \in \psi_D(\psi_E(A)) = \psi_D \circ \psi_E(A), \end{aligned}$$

joten $\psi_{D+E}(A) = \psi_D \circ \psi_E(A)$. Tästä seuraa, että

$$\psi_{D+E} = \psi_D \circ \psi_E,$$

joten

$$\psi_{D+(E+F)} = \psi_D \circ \psi_E \circ \psi_F = \psi_{(D+E)+F}.$$

Lopuksi saadaan

$$\begin{aligned} A \in D + (E+F) &\iff 0 \in \psi_{D+(E+F)}(A) = \psi_{(D+E)+F}(A) \\ &\iff A \in (D+E)+F \quad \square \end{aligned}$$

3.8. Hieman topologiaa. Kun X on joukko, niin avaruus $\mathcal{P}(X)$ voidaan varustaa topologialla, jonka indusoi kanoninen bijektio

$$f\colon \mathcal{P}(X) \to {}^X2,\ f(A) = \chi_A,$$

missä χ_A on karakteristinen funktio

$$\chi_A\colon X \to 2 = \{0,1\},\ \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in A \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Tässä 2 varustetaan diskreetillä topologialla. Avaruudessa ${}^X2$ topologian kanta

$$\mathcal{B} = \{\, B_g \mid \operatorname{dom} g \text{ äärellinen },\ \operatorname{rg}(g) \subset 2 \,\}$$

missä

$$B_g = \{\, f\colon X \to 2 \mid g \subset f \,\}$$

Merkitään $P = g^{-1}[\{1\}]$, $N = g^{-1}[\{0\}]$; tällöin

$$f^{-1}[B_g] = U(P,N),$$

missä

$$U(P,N) = \{\, A \subset X \mid P \subset A, A \cap N = \emptyset \,\}.$$

Avaruuden $\mathcal{P}(X)$ kannaksi saadaan siis

$$\{\, U(P,N) \mid P, N \subset X \text{ äärellisiä },\ P \cap N = \emptyset \,\}$$

Merkitään $\mathcal{U}$:lla joukon $\mathbb{N}$ ultrafiltterien joukkoa. Tiedetään jo, että $(\mathcal{U},+)$ on puoliryhmä. $\mathcal{U}$ perii topologian avaruudesta $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

3.9. Lemma. *Kun $E \in \mathcal{U}$, kuvaus*

$$\Psi_E\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U},\ \Psi_E(D) = D + E$$

on jatkuva.

Todistus. Olkoon ψ_E kuten edellisen lemman todistuksessa. Tällöin

$$A \in \Psi_E(D) = D + E \iff \psi_E(A) \in D$$

Kun $P, N \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ovat äärellisiä, $P \cap N = \emptyset$, niin

$$\begin{aligned}\Psi_E^{-1}[U(P,N)] &= \{ D \in \mathcal{U} \mid \Psi_E(D) \in U(P,N) \} \\ &= \{ D \in \mathcal{U} \mid P \subset \Psi_E(D), \Psi_E(D) \cap N = \emptyset \} \\ &= \{ D \in \mathcal{U} \mid \psi_E[P] \subset D, \psi_E[N] \cap D = \emptyset \} \\ &= U(\psi_E[P], \psi_E[N]) \cap \mathcal{U}\end{aligned}$$

Peruskantajoukkojen alkukuvat ovat siis peruskantajoukkoja, joten Ψ_E on jatkuva.

3.10. Lemma. *$\mathcal{U}$ on kompakti Hausdorffin avaruus.*

Todistus. Koska Hausdorffin ehto säilyy tuloissa ja on perinnöllinen, $\mathcal{U}$ on Hausdorffin avaruus. Tihonovin lauseen mukaan $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ on kompakti. Pitää siis osoittaa, että $\mathcal{U}$ on suljettu avaruudessa $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Olkoon $V \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \setminus \mathcal{U}$. Tällöin jokin seuraavista pätee:

1) $\emptyset \in V$
2) $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \notin V$
3) on olemassa $X, Y \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $X \subset Y$, mutta $X \in V$ ja $Y \notin V$.
4) on olemassa $X, Y \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$, joilla $X, Y \in V$, mutta $X \cap Y \notin V$,
5) on olemassa $X \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$, joilla $X \notin V$ ja $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus X \notin V$.

Huomataan, että tapauskohtaisesti sopivilla valinnoilla $P, N \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ pätee
$V \in U(P, N) \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \setminus \mathcal{U}$:

1) $P = \{\emptyset\}, N = \emptyset$
2) $P = \emptyset, N = \{\mathcal{P}(\mathbb{N})\}$
3) $P = \{X\}, N = \{Y\}$
4) $P = \{X, Y\}, N = \{X \cap Y\}$
5) $P = \emptyset, N = \{X, \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus X\}$

Siis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \setminus \mathcal{U}$ on avoin, $\mathcal{U}$ on suljettu ja kompakti. □

3.11. Lause. *On olemassa joukon $\mathbb{N}$ vapaa ultrafiltteri, jolle $D + D = D$.*

Todistus. Merkitään $\mathcal{U}' = \mathcal{U} \setminus \{D_0\}$, missä $D_0 = \{ A \subset \mathbb{N} \mid 0 \in A \}$. Tällöin $\mathcal{U}'$ on suljettu ja siis kompakti. $\mathcal{U}'$ on suljettu filtterien summan suhteen (HT). $(\mathcal{U}', +)$ on siis puoliryhmä, jokaisella $E \in \mathcal{U}'$ $\Psi_E \restriction \mathcal{U}'$on jatkuva ja $\mathcal{U}'$ on kompakti Hausdorffin avaruus, joten idempotenssilauseen mukaan on olemassa $D \in \mathcal{U}'$, jolle $D + D = D$. D on vapaa, sillä muuten se olisi muotoa $D = \{ A \subset \mathbb{N} \mid m \in A \}$ jollakin $m \in \mathbb{N}^*$. Helppo lasku osoittaa, että $D + D = \{ A \subset \mathbb{N} \mid 2m \in A \}$, ristiriita. □

3.12. Hindmanin lause. *Olkoon $\mathcal{A}$ joukon $\mathbb{N}$ ositus äärellisen moneen osaan. Tällöin on olemassa sellainen $A \in \mathcal{A}$ ja ääretön $S \subset \mathbb{N}$, että kaikilla äärellisillä epätyhjillä $S_0 \subset S$ pätee $\sum_{a \in S_0} a \in A$.*

Todistus. Edellisen lauseen mukaan on olemassa vapaa ultrafiltteri D, jolle $D+D = D$. Määritellään induktiivisesti joukot $A_i \in D$ ja alkiot $a_i \in \mathbb{N}$, kun $i \in \mathbb{N}$. Asetetaan joukoksi A_0 se yksikäsitteinen $A \in \mathcal{A}$, jolle $A \in D$. Kun A_i on jo valittu, valitaan $a_i \in A_i$, jolle $A_i \dot{-} a_i \in D$. Tämä on mahdollista, koska kaikilla $B \subset \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned}B \in D = D + D &\iff \{ m \in \mathbb{N} \mid B \dot{-} m \in D \} \in D \\ &\iff \{ m \in B \mid B \dot{-} m \in D \} \in D.\end{aligned}$$

Asetetaan $A_{i+1} = A_i \cap (A_i \dot{-} a_i) \smallsetminus \{ m \in \mathbb{N} \mid m \leq a_i \}$, jolloin $A_{i+1} \in D$. Asetetaan lopuksi $S = \{ a_i \mid i \in \mathbb{N} \}$.

Osoitetaan induktiolla äärellisen epätyhjän joukon S_0 koon suhteen, että $\sum_{a \in S_0} a \in A_i$, missä $i \in \mathbb{N}$ on se indeksi, jolle $a_i = \min S_0$.

1) Jos $S_0 = \{a_i\}$, niin $\sum_{a \in S_0} a = a_i \in A_i$.
2) Oletetaan, että $|S_0| \geq 2$. Olkoon $j \in \mathbb{N}$ indeksi, jolle $a_j = \min(S_0 \smallsetminus \{a_i\})$. Induktio-oletuksen mukaan $s = \sum_{a \in S_0 \smallsetminus \{a_i\}} a \in A_j$. Koska jono $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ on laskeva ja $i < j$, pätee $s \in A_{i+1} \subset A_i \dot{-} a_i$, joten $\sum_{a \in S_0} a = a_i + \sum_{a \in S_0 \smallsetminus \{a_i\}} a = a_i + s \in A_i$.
Erityisesti kaikilla äärellisillä $S_0 \neq \emptyset$ pätee $\sum_{a \in S_0} a \in A_0$. $\square$

4. Erdősin ja Radon osituslaskenta

Erdős ja Rado rupesivat käyttämään seuraavaa merkintää: Olkoot k, c, n, r kardinaaleja. Merkintä

$$r \longrightarrow (n)^k_c$$

tarkoittaa, että jos joukolle X pätee $|X| = r$ ja $\chi \colon [X]^k \longrightarrow C$ on väritys, missä $|C| = c$, niin on olemassa $H \subset X$, jolle $|H| = n$ ja $[H]^k$ on yksivärinen. Oletusarvoisesti $c = 2$, joten $r \longrightarrow (n)^k$ on sama kuin $r \longrightarrow (n)^k_2$.

Kurssin kuluessa saatuja tuloksia voidaan siis merkitä

$$\begin{array}{ll}
6 \longrightarrow (3)^2_2, \quad 18 \longrightarrow (4)^2_2, & \\
\forall n \in \mathbb{N}^* \exists r \in \mathbb{N}^* \, (r \longrightarrow (n)^2_2), & \text{(verkkojen Ramseyn lause)} \\
\forall n, k \in \mathbb{N}^* \exists r \in \mathbb{N}^* \, (r \longrightarrow (n)^k_2), & \text{(äärellinen Ramseyn lause relaatioille)} \\
\forall n, k, c \in \mathbb{N}^* \exists r \in \mathbb{N}^* \, (r \longrightarrow (n)^k_c), & \text{(äärellinen Ramseyn lause)} \\
\aleph_0 \longrightarrow (\aleph_0)^2_2, & \text{(ääretön verkkojen Ramseyn lause)} \\
\forall k, c \in \mathbb{N}^* \, (\aleph_0 \longrightarrow (\aleph_0)^k_c), & \text{(ääretön Ramseyn lause).}
\end{array}$$

Äärellinen Ramseyn lause saatiin relaatioiden vastaavasta lauseesta seuraavalla havainnolla:

$$r \longrightarrow (s)^k_2 \quad \& \quad s \longrightarrow (n)^k_{2^k} \quad \Rightarrow \quad r \longrightarrow (n)^k_{2^{k+1}}$$

4.1. Hieman kardinaaleista. Jokaista joukkoa A vastaa yksikäsitteinen kardinaali κ, jolle on olemassa bijektio $f \colon A \to \kappa$. Tätä merkitään $|A| = \kappa$ (A:n mahtavuus on κ.)

Tiedetään, että $|\mathcal{P}(\kappa)| = 2^\kappa > \kappa$ (todistetaan Cantorin diagonaaliargumentilla). Jokaisella κ on olemassa pienin kardinaali λ, jolle $\lambda > \kappa$. Tätä merkitään $\lambda = \kappa^+$.

Transfiniittisellä rekursiolla määritellään $\aleph$- ja $\beth$-hierarkiat

$$\begin{array}{lll}
\aleph_0 = \omega & \beth_0 = \omega & \\
\aleph_{\alpha+1} = \aleph^+_\alpha & \beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha} & \\
\aleph_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} \aleph_\alpha & \beth_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} \beth_\alpha, & \text{kun } \gamma \text{ on rajaordinaali.}
\end{array}$$

Yleisemmin merkitään myös, kun κ on kardinaali:

$$\begin{array}{lll} \aleph_0(\kappa) = \beth_0(\kappa) = \kappa & & \\ \aleph_{\alpha+1}(\kappa) = \aleph_\alpha(\kappa)^+ & \beth_{\alpha+1}(\kappa) = 2^{\beth_\alpha(\kappa)} & \\ \aleph_\gamma(\kappa) = \bigcup_{\alpha<\gamma} \aleph_\alpha(\kappa) & \beth_\gamma(\kappa) = \bigcup_{\alpha<\gamma} \beth_\alpha(\kappa), & \text{kun } \gamma \text{ on rajaordinaali.} \end{array}$$

Seuraavassa on esimerkki siitä, että ylinumeroituvat mahtavuudet käyttäytyvät toisin kuin numeroituvat osituslaskennassa.

4.2. Esimerkki. Valinta-aksioomasta seuraa, että joukon $\mathbb{R}$ voi hyvinjärjestää eli on olemassa joukon $\mathbb{R}$ hyvinjärjestys $\preceq$. Määritellään väritys $\chi\colon [\mathbb{R}]^2 \to 2$,

$$\chi(\{x,y\}) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \le y \iff x \preceq y \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Osoitetaan, ettei ole olemassa ylinumeroituvaa homogeenista $H \subset \mathbb{R}$. Muutenhan $(H, \preceq$ $)$ olisi hyvinjärjestetty joukko, $|H| \ge \omega_1$, ja joko

(1) kaikilla $x, y \in H$ pätee $x \le y \iff x \preceq y$

tai

(2) kaikilla $x, y \in H$ on voimassa $x \le y \iff x \succeq y$.

Tällöin on olemassa järjestyksen $\preceq$ suhteen aidosti kasvava jono $(x_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ H:n alkioita. Valitaan jokaisella $\alpha < \omega_1$ lukujen x_α ja $x_{\alpha+1}$ välistä rationaaliluku $q_\alpha \in \mathbb{Q}$. Nämä alkiot ovat eri lukuja, koska $(x_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ on joko aidosti kasvava tai laskeva luonnollisen järjestyksen suhteen. Siis $\mathbb{Q}$ on ylinumeroituva, mikä on ristiriita.

Siis värityksen χ homogeeniset joukot ovat numeroituvia ja

$$2^\omega \not\to (\omega_1)^2_2.$$

Positiivisia tuloksia saadaan, kun tarkastellaan riittävän suuria perusjoukkoja. Tätä varten tarvitaan seuraava aputulos.

4.3. Lemma. *Olkoon κ ääretön kardinaali, $n \in \mathbb{N}^*$ ja $|X| \ge 2^\kappa$. Olkoon jokaisella $a \in X$ $f_a\colon [X]^n \to \omega$. Tällöin on olemassa $A \subset X$, jonka mahtavuus on 2^κ ja jolle pätee seuraavaa: Kaikilla $C \subset A$, $u \in X \setminus C$, missä $|C| = \kappa$, on olemassa $a \in A \setminus C$, jolle $f_u{\restriction}[C]^n = f_a{\restriction}[C]^n$.*

Todistus. Ensiksi havaitaan, että kaikilla $A \subset X$, $|A| = 2^\kappa$, on olemassa sellainen $A^* \subset X$, $|A^*| = 2^\kappa$, että kaikilla $C \subset A$ ja $u \in X \setminus C$, $|C| = \kappa$, on olemassa $a \in A^* \setminus C$, jolle $f_u{\restriction}[C]^n = f_a{\restriction}[C]^n$. Tämä pätee, koska joukon

$$\mathcal{F} = \{\, f_u{\restriction}[C]^n \mid C \in [A]^\kappa,\ u \in X \setminus C \,\}$$

mahtavuus on korkeintaan

$$\omega^{|[C]^n|} \cdot |[A]^\kappa| = (2^\kappa)^\kappa \cdot \omega^\kappa = 2^\kappa \cdot \omega^\kappa = 2^\kappa \cdot 2^\kappa = 2^\kappa.$$

Valitaan jokaisella $y \in \mathcal{F}$ sellainen a_y, että jos $\operatorname{dom}(y) = [C]^n$, niin $f_{a_y}{\restriction}[C]^n = y$ ja $a_y \notin C$. Tällöin $A^* = A \cup \{\, a_y \mid y \in \mathcal{F} \,\}$ on halutunlainen.

Määritellään nyt joukko A transfiniittisellä induktiolla: $A_0 \subset X$, $|A_0| = 2^\kappa$ on mielivaltainen, $A_{\alpha+1} = A^*_\alpha$, $A_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} A_\alpha$, kun γ on rajaordinaali ja $A = \bigcup_{\alpha<\kappa^+} A_\alpha$. Tällöin $|A| = 2^\kappa$. Jos $C \in [A]^\kappa$, $u \in X \setminus C$, niin $C \subset A_\alpha$ jollakin $\alpha < \kappa^+$. Siis on olemassa $a \in A_{\alpha+1} \setminus C \subset A \setminus C$, jolle $f_u{\restriction}[C]^n = f_a{\restriction}[C]^n$. $\square$

4.4. Erdősin ja Radon osituslause. *Kaikilla* $n \in \mathbb{N}$

$$\beth_n^+ \longrightarrow (\omega_1)_\omega^{n+1}.$$

Todistus. Edetään induktiolla luvun $n \in \mathbb{N}$ suhteen.

1) Kun $n = 0$, $\beth_0^+ = \omega^+ = \omega_1$, joten tarkistettavana on $\omega_1 \longrightarrow (\omega_1)_\omega^1$. Tämä on yksi yleistetyistä laatikkoperiaatteista: Jos nimittäin $|X| > \omega$ ja $\chi\colon X \to \omega$, niin jokin $\chi^{-1}[\{k\}]$ on ylinumeroituva, sillä muuten kaikki olisivat numeroituvia ja X numeroituva.

2) Oletetaan, että $\beth_n^+ \longrightarrow (\omega_1)_\omega^{n+1}$. Olkoon $\chi\colon [X]^{n+2} \to \omega$, missä $|X| \geq \beth_{n+1}^+$. Merkitään jokaisella $a \in X$ $\quad f_a\colon [X]^{n+1} \to \omega$,

$$f_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } a \in X \\ \chi(x \cup \{a\}), & \text{muuten.} \end{cases}$$

Sovelletaan lemmaa tapauksessa $\kappa = \beth_n$: On olemassa $A \subset X$, jolle $|A| = 2^{\beth_n} = \beth_{n+1}$ ja kaikilla $C \subset A$, $u \in X \smallsetminus C$ voidaan valita $a \in A \smallsetminus C$, jolle $f_u{\restriction}[C]^{n+1} = f_a{\restriction}[C]^{n+1}$. Kiinnitetään $u \in X \smallsetminus A$ ja valitaan transfiniittisellä induktiolla alkiot $a_\alpha \in A$, kun $\alpha < \beth_n^+$. Valitaan $a_0 \in A$ mielivaltaisesti. Oletetaan, että $\alpha < \beth_n^+$, $\alpha \neq 0$ ja $C_\alpha = \{\, a_\beta \mid \beta < \alpha \,\}$ on jo määritelty. Valitaan a_α niin, että $f_u{\restriction}[C_\alpha]^{n+1} = f_{a_\alpha}{\restriction}[C_\alpha]^{n+1}$. Merkitään $B = \{\, a_\alpha \mid \alpha < \beth_n^+ \,\}$. Koska $|B| = \beth_n^+$ ja $\beth_n^+ \longrightarrow (\omega_1)_\omega^{n+1}$, väritykseen $f_u{\restriction}[B]^{n+1}$ liittyy $H \subset B$, jolle $f_u{\restriction}[H]^{n+1}$ on vakio. Olkoon $v \in \mathbb{N}$ se luku, jolle $f_u(x) = v$ kaikilla $x \in [H]^{n+1}$. Olkoon $x \in [H]^{n+2}$; tällöin $x = \{a_{\alpha_0}, \ldots, a_{\alpha_{n+1}}\}$, missä $\alpha_0 < \cdots < a_{n+1} < \beth_n^+$, joten

$$\begin{aligned} \chi(x) &= \chi(\{a_{\alpha_0}, \ldots, a_{\alpha_n}\} \cup \{a_{\alpha_{n+1}}\}) \\ &= f_{a_{\alpha_n+1}}(\{a_{\alpha_0}, \ldots, a_{\alpha_n}\}) \\ &= f_u(\{a_{\alpha_0}, \ldots, a_{\alpha_n}\}) = v. \quad \square \end{aligned}$$

III Verkkojen Ramseyn teoriaa

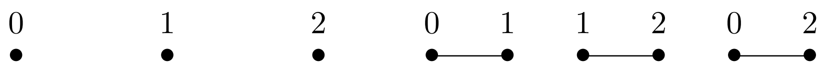
Kun äärellisen Ramseyn lauseen todistuksessa analysoidaan verkkoja, käytetään hyväksi vain pientä osaa tarjolla olevasta informaatiosta: kiinnitetään solmu a_0 ja jaetaan loput verkosta solmun a_0 naapureihin ja muihin, sitten unohdetaan joko naapurit tai muut, kiinnitetään lopusta verkosta solmu a_1 ja jatketaan samaan tapaan. Koska Ramseyn funktion tunnettujen ylä- ja alarajojen ero on suuri, on luonnollista ajatella, että käytettyä tekniikkaa pystyttäisiin oleellisesti vahvistamaan. Tällainen ajattelutapa on synnyttänyt yleistyksen, jota kutsutaan verkkojen Ramseyn teoriaksi. Alkuperäinen tavoite, Ramseyn lukujen tarkempi arviointi, ei ole onnistunut, mutta alalla on huomattu olevan omakin arvonsa.

Tässä esitellään sekalainen valikoima tuloksia alalta.

1.5. Määritelmä. Verkko $G = (V, E)$ on verkon $G' = (V', E')$ *aliverkko*, jos $V \subset V'$ ja $E \subset E'$. Aliverkko G on *indusoitu*, jos $E = E' \cap (V \times V)$. Verkon G *komplementtiverkko* on $\overline{G} = (V, E^*)$, missä $E^* = \{\, (x, y) \in V \times V \mid x \neq y,\ (x, y) \notin E \,\}$. Verkkoa G kutsutaan *täydelliseksi*, jos $E = \{\, (x, y) \in V \times V \mid x \neq y \,\}$. Solmujoukkoa $n = \{0, \ldots, n-1\}$ vastaavaa täydellistä verkkoa merkitään K_n:llä.

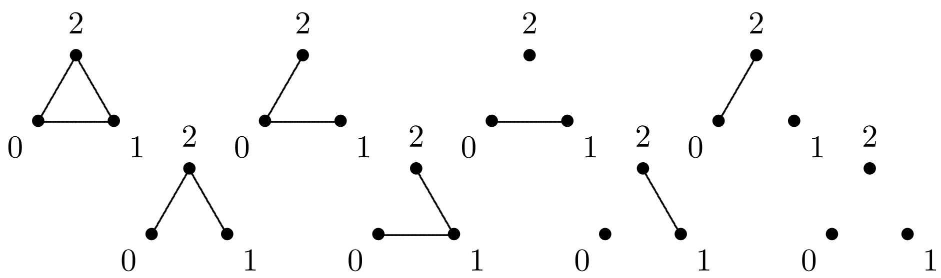
Huom. Aliverkko ei yleensä ole alimalli, vaan aliverkko on alimalli täsmälleen silloin, kun se on indusoitu aliverkko.

1.6. Esimerkki. Verkon K_3 aliverkot ovat



(1 ja 2 alkion indusoidut aliverkot)

(muut 2 alkion aliverkot)



(3 alkion aliverkot)

1.7. Määritelmä. Olkoon $m \in \mathbb{N}^*$ ja $G_0, \ldots, G_{m-1}$ äärellisiä verkkoja. Näitä vastaava *verkkojen Ramseyn luku* $r(G_0, \ldots, G_{m-1})$ on pienin sellainen $u \in \mathbb{N}^*$, että kun $\chi\colon [X]^2 \to m$ ja $|X| = u$, niin jollakin $i \in m$ on olemassa i-värinen verkon G_i kopio:

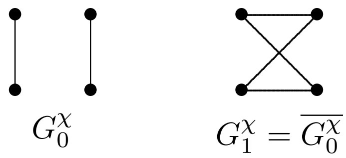
Merkitään $G_i^\chi = (X, E_i)$, missä

$$E_i = \{\, (x,y) \in X \times X \mid \chi(\{x,y\}) = i \,\},$$

kun $i \in m$. Tällöin siis jollakin $i \in m$ on olemassa G_i^χ:n aliverkko $G_i' \cong G_i$.

Huom. Värityksen χ voi tietenkin määrätä antamalla verkot G_i^χ, $i \in m$.

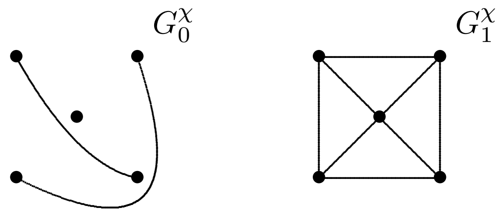
1.8. Esimerkki. Määritetään pienimmät epätriviaalit verkkojen Ramseyn luvut $r(G,G)$ ja $r(G,K_3)$, kun G on kolmen solmun verkko, jossa on kaksi särmää (tämä on isomorfiaa vaille yksikäsitteinen). Tällöin $r(G,G) = 3$, koska jos kolmen solmun verkossa ei ole vähintään kahta särmää, niin sen komplementissa on. $r(G,K_3) > 4$, sillä väritys χ, jolle



ei sisällä 0-väristä G:tä eikä 1-väristä K_3:a. Osoitetaan, että $r(G,K_3) \le 5$, jolloin $r(G,K_3) = 5$. Olkoon $\chi\colon [X]^2 \to 2$, missä $|X| = 5$. G_0^χ sisältää G:n kopion alimallinaan, joss jonkin solmun aste on vähintään 2. Siis

$$2s = \sum_{x \in X} \deg_{G_0^\chi}(x) \le 5,$$

missä s on verkon G_0^χ särmien lukumäärä, jotta G_0^χ ei sisältäisi G:tä. Toisaalta G:ssä on vähemmän kuin 3 erillistä solmua ja siis $2s > 5 - 3 = 2$, jotta $G_1^\chi = \overline{G_0^\chi}$ ei sisältäisi K_3:a. Siis $s = 2$, joten jos G_0^χ ei sisällä G:tä, niin ainoa mahdollisuus on



Mutta tällöinhän G_1^χ sisältää K_3:n.

1.9. Määritelmä. Verkon $G = (V,E)$ *värityysluku* on pienin sellainen $m \in \mathbb{N}^*$, että solmujoukko V voidaan värittää m värillä niin, että samanväristen solmujen välillä ei ole särmiä, ts. on olemassa väritys $\xi\colon V \to m$, jolle $\xi(x) \ne \xi(y)$, kun $(x,y) \in E$. Verkon G värityslukua merkitään $\chi(G)$:llä. Merkitään G:n suurimman (yhtenäisen) komponentin kokoa $c(G)$:llä.

Vaativuusteoriassa $3\mathrm{COL} = \{\, G \mid G$ verkko, jolle $\chi(G) \le 3 \,\}$ on tunnettu esimerkki NP-täydellisestä ongelmasta. Jos onnistuu osoittamaan, että $3\mathrm{COL} \in \mathrm{P}$, tai osoittamaan, että tämä ei pidä paikaansa, luvassa on 10^6 \$.

1.10. Lause. *Olkoot G ja H äärellisiä verkkoja. Tällöin*

$$r(G,H) \geq (\chi(G)-1)(c(H)-1)+1.$$

Todistus. Merkitään $n = (\chi(G)-1)(c(H)-1)$ ja osoitetaan, että väritykseen $\chi\colon [n]^2 \to 2$ ei välttämättä liity 0-väristä G:tä tai 1-väristä H:ta. Merkitään

$$\psi\colon n \to \chi(G)-1,\ \psi(x) = \left\lfloor \frac{x}{c(H)-1} \right\rfloor$$

ja

$$\xi\colon [n]^2 \to 2,\ \xi(\{x,y\}) = \begin{cases} 1, & \text{kun } \psi(x) = \psi(y) \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Verkon G_0^ξ voi värittää ψ:llä niin, että jos G_0^ξ:ssa särmä solmujen x ja y välillä, niin $\psi(x) \neq \psi(y)$. Siis $\chi(G_0^\xi) \leq \chi(G)-1$, joten G_0^ξ ei sisällä G:n kopiota aliverkkonaan. G_1^ξ:n komponentit ovat $c(H)-1$-alkioisia, joten G_1^ξ ei voi sisältää H:n kopiota aliverkkonaan.
□

Huom. Jos tarkastelee verkkojen Ramseyn teoriaa äärellisen Ramseyn teorian yleistyksenä, tulos on vaatimaton:

$$R(n) = r(K_n, K_n) \geq (n-1)(n-1)+1 = n^2-2n+2.$$

On kuitenkin tapauksia, jolloin lauseen epäyhtälössä pätee yhtäsuuruus.

1.11. Lause. *Olkoot $m, n \in \mathbb{N}^*$ ja olkoon T m-solmuinen puu. Tällöin*

$$r(K_n, T) = (m-1)(n-1)+1.$$

Todistus. Koska $\chi(K_n) = n$ ja $c(T) = m$, edellisestä lauseesta seuraa

$$r(K_n, T) \geq (m-1)(n-1)+1.$$

Käänteinen epäyhtälö todistetaan induktiolla summan $m+n$ suhteen. Tapauksiessa $m = 1$ pätee $r(K_n, T) = 1 = 0 \cdot (n-1)+1$ ja tapauksessa $n = 1$ vastaavasti $r(K_n, T) = 1 = (m-1) \cdot 0 + 1$, joten induktio pääsee alkuun.

Oletetaan, että $m > 1$ ja $n > 1$. Olkoon c puun $T = (V_T, E_T)$ lehti ja $T' = T|(V_T \smallsetminus \{c\})$ puu, joka saadaan, kun lehti c poistetaan puusta T. Olkoon b se yksikäsitteinen solmu, jolle $(b,c) \in E_T$. Olkoon $G = (V, E)$ verkko, jossa on ainakin $(m-1)(n-1)+1$ solmua. Koska induktio-oletuksesta seuraa $(m-1)(n-1)+1 \geq (m-2)(n-1)+1 = r(K_n, T')$, G sisältää n solmun klikin tai $\overline{G}$ puun T' kopion (aliverkkonaan). Edellisessä tapauksessa ei ole enää mitään todistettavaa, joten oletetaan, että $\overline{G}$ sisältää puun T' kopion, ts. jollakin f pätee $f\colon T' \cong \widetilde{T}'$, missä $\widetilde{T}'$ on $\overline{G}$:n aliverkko. Merkitään $A = \mathrm{Dom}(\widetilde{T}')$ ja sovelletaan induktio-oletusta nyt verkkoon $G|(V \smallsetminus A)$, jossa on ainakin $(m-1)(n-1)+1-(m-1) = (m-1)(n-2)+1$ solmua. Induktio-oletuksen mukaan $(m-1)(n-2)+1 = r(K_{n-1}, T)$, joten tämä verkko sisältää joko $n-1$ solmun klikin K tai $\overline{G}|(V \smallsetminus A)$ puun T kopion. Jälkimmäisessä tapauksessa ei ole enää mitään todistettavaa, joten oletetaan edellinen. Tarkastellaan solmun $f(b)$ suhdetta klikkiin K. Jos kaikista K:n solmuista on yhteys solmuun $f(b)$, niin saadaan n solmun klikki $K \cup \{f(b)\}$. Jos taas jostain solmusta $c' \in K$ tällaista yhteyttä ei ole, niin $f \cup \{(c, c')\}$ upottaa puun T verkon G aliverkoksi. □

1.12. Määritelmä. Verkkojen $G = (V, E)$ ja $G' = (V', E')$ *summa* on verkko $G^* = (V^*, E^*)$, jonka solmujoukko on erillinen yhdiste $V^* = V \sqcup V' = (\{0\} \times V) \cup (\{1\} \times V')$ ja särmärelaatio

$$E^* = \{ \big((0, x), (0, y)\big) \mid (x, y) \in E \} \cup \{ \big((1, x), (1, y)\big) \mid (x, y) \in E' \}.$$

Merkitään $G^* = G + G'$ ja määritellään

$$\begin{aligned} 1 \cdot G &= G \\ (n + 1) \cdot G &= n \cdot G + G, \text{ kun } n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

1.13. Lemma. *Kaikilla* $n \in \mathbb{N}^*$ *pätee* $r(nK_3, nK_3) \geq 5n$.

Todistus. Olkoot X ja Y erillisiä joukkoja, joille $|X| = 3n - 1$ ja $|Y| = 2n - 1$ ja olkoon $a \notin X \cup Y$. Asetetaan $V = X \cup Y \cup \{a\}$ ja

$$\chi\colon [V]^2 \to 2,\ \chi(\{x, y\}) = \begin{cases} 0, & x, y \in X \text{ tai } x = a,\ y \in Y \text{ tai } y = a,\ x \in Y \\ 1, & \text{muuten.} \end{cases}$$

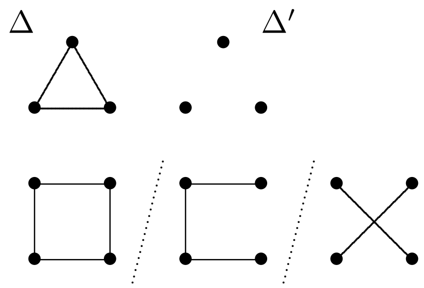
Verkossa G_0^χ joukon $Y \cup \{a\}$ pisteet eivät sisälly yhteenkään 3 solmun klikkiin. Koska $|X| < 3n$, niin nK_3 ei ole verkon G_0^χ aliverkko. Verkossa G_1^χ solmu a ei sisälly yhteenkään 3 solmun klikkiin. Kolmen solmun klikissä on korkeintaan yksi X:n alkio, joten tällaisessa on vähintään kaksi Y:n alkiota. Koska $|Y| < 2n$, niin nK_3 ei ole verkon G_1^χ aliverkko. $\square$

1.14. Lemma. $r(2K_3, 2K_3) = 10$.

Todistus. Edellisen lemman nojalla $r(2K_3, 2K_3) \geq 10$. Oletetaan vastoin väitettä, että on olemassa sellainen 10 solmun verkko $G = (V, E)$, että $2K_3$ ei suppoa verkkoon G eikä verkkoon $\overline{G}$. G:ssä ei tietenkään ole 6 solmun klikkiä, koska tästä saataisiin $2K_3$:n kopio. Osoitetaan, että G:ssä ei ole edes 5 solmun klikkiä. Oletetaan nimittäin, että tällainen klikki K olisi olemassa. $G|K$ sisältää tietenkin K_3:n kopion. $V \smallsetminus K$ ei voi olla klikki, koska silloin $2K_3$ uppoaisi G:hen. Siis on olemassa eri $a, b \in V \smallsetminus K$, joille $(a, b) \notin E$. $(V \smallsetminus K) \smallsetminus \{a, b\}$ ei voi olla klikki, joten on olemassa $c, d \in V \smallsetminus K$, joille $(c, d) \notin E$ ja a, b, c, d ovat eri alkioita. Huomataan, että mistään $x \in V \smallsetminus K$ ei voi lähteä kahta särmää K:hon, koska muuten olisi olemassa sellaiset $y, z \in K$, että $G|\{x, y, z\} \cong K_3$ ja $G|(K \smallsetminus \{y, z\}) \cong K_3$. Siis on olemassa vähintään kolme alkiota $k \in K$, joille $(a, k) \notin E$ ja

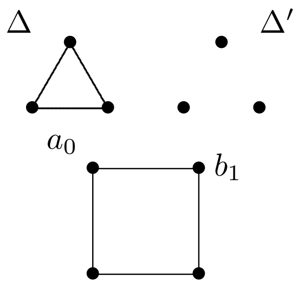
$(b,k) \notin E$. Valitaan näistä yksi. Samoin huomataan, että on olemassa vähintään kaksi solmua $v \in K \setminus \{k\}$, joille $(c,v) \notin E$ ja $(d,v) \notin E$. Siis $G|\{a,b,k\} \cong \overline{K_3} \cong G|\{c,d,v\}$, joten $\overline{G}|\{a,b,k,c,d,v\} \cong 2K_3$. Tämä on ristiriidassa alkuoletuksen kanssa, joten G:ssä ei ole 5 solmun klikkiä. Tilanteen symmetrisyyden vuoksi G:ssä ei luonnollisestikaan ole 5 solmun riippumatonta joukkoakaan.

Koska $R(3) = r(K_3, K_3) = 6$, G:ssä on kolmen solmun klikki tai riippumaton joukko. Symmetrian vuoksi voidaan olettaa, että $\Delta \subset V$ on kolmen solmun klikki. Koska $|V \setminus \Delta| \geq 7$, verkossa $G|(V \setminus \Delta)$ on edelleen kolmen solmun klikki tai riippumaton joukko. Vastaoletuksen mukaan jälkimmäisen on toteuduttava; olkoon $\Delta' \subset V \setminus \Delta$ 3 solmun riippumaton joukko.



Aliverkossa $G_0 = G|(V \setminus (\Delta \cup \Delta')) = (V_0, E_0)$ on korkeintaan neljä särmää, sillä muuten se sisältäisi K_3:n kopion, ja vähintään kaksi, jottei se sisältäisi $\overline{K}_3$:n kopiota. Symmetrian vuoksi voidaan olettaa, että särmien lukumäärä G_0:ssa on vähintään 3 (ks. kuva yllä).

Tapaus 1: G_0:ssa on neljä särmää. Merkitään $V_0 = \{a_0, a_1, b_0, b_1\}$, missä (a_i, b_j), kun $i, j \in \{0, 1\}$.



Jokaisella $x \in \Delta'$ pätee $(x, a_0), (x, a_1) \notin E$ tai $(x, b_0), (x, b_1) \notin E$, sillä muuten $\{x, a_i, b_j\}$ olisi klikki joillakin $i, j \in 2$ ja $2K_3$:n kopio G:n aliverkko. Itse asiassa joko edellisen tai jälkimmäisen ehdon on oltava voimassa jokaisella $x \in \Delta'$, muutenhan joillakin eri $x, y \in \Delta'$ $\{x, a_0, a_1\}$ ja $\{y, b_0, b_1\}$ olisivat riippumattomia joukkoja ja $2K_3$:n kopio verkon $\overline{G}$ aliverkko. Voidaan olettaa, että jokaisella $x \in \Delta'$ pätee $(x, a_0), (x, a_1) \notin E$. Siis $\Delta' \cup \{a_0, a_1\}$ on 5 solmun riippumaton joukko, mikä on mahdotonta.

Tapaus 2: G_0:ssa on 3 särmää. Tässä tapauksessa on oltava $x \in \Delta'$, jolle $(x, b_0) \in E$ ja $(x, a_1) \in E$, missä solmut a_i, b_j on valittu niin, että

$$V \setminus (\Delta \cup \Delta') = \{a_0, a_1, b_0, b_1\} \text{ ja } (a_0, b_0), (a_0, b_1), (a_1, b_1) \in E.$$

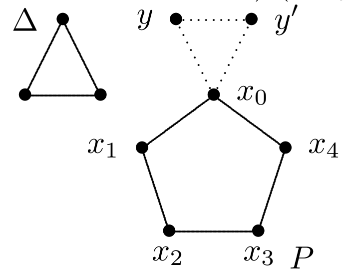
Jos niin nimittäin ei olisi, niin todistus etenisi ristiriitaan kuten tapauksessa 1. Huomataan, että tästä solmusta x ei ole särmiä solmuihin a_0 ja b_1. Muutetaan merkintöjä niin, että

$$\{x, a_0, a_1, b_0, b_1\} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\} = P$$

ja $(x_i, x_j) \in E$, jos ja vain jos $i \equiv j + 1 \pmod 5$. Merkitään lisäksi

$$V \setminus (\Delta \cup P) = \{y, y'\},$$

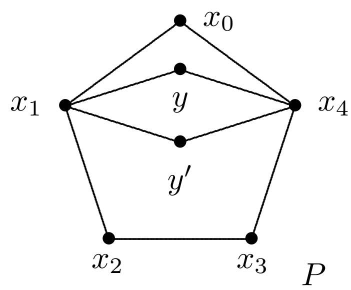
jolloin $(y, y') \notin E$ ja (valitsemalla $x_0 = x$) $(x_0, y) \notin E$ ja $(x_0, y') \notin E$.



Tutkitaan solmujen y ja y' yhteyksiä joukkoon P:

$$U = \{\, v \in P \mid (y, v) \notin E \,\}, U' = \{\, v \in P \mid (y', v) \notin E \,\}.$$

Tällöin $|U| \geq 3$ ja $|U'| \geq 3$, muuten $2K_3$ uppoaa verkkoon G. Toisaalta voidaan muodostaa kaksi kolmen alkion riippumatonta joukkoa, ellei $U = U'$ ja $|U| = |U'| = 3$. Voidaan olettaa, että $P \setminus U = \{x_1, x_4\}$, jolloin G:ssä on seuraavanlainen indusoitu aliverkko $G|(P \cup \{y, y'\})$.



Tarkastellaan klikin Δ yhteyksiä joukkoon $P \cup \{y, y'\}$. Koska $\{x_0, y, y'\}$ on riippumaton joukko, niin jokaisella $v \in \Delta$

$$(v, x_1) \in E \lor (v, x_3) \in E$$

ja

$$(v, x_2) \in E \lor (v, x_4) \in E,$$

muuten on olemassa kaksi erillistä 3 solmun riippumatonta joukkoa. On olemassa $v \in \Delta$, josta on yhteydet solmuihin x_1 ja x_4, muutenhan kaikilla $v \in \Delta$ jokin seuraavista olisi voimassa:

i) v:stä on särmät x_i:hin ja x_{i+1}:een, $i = 1, 2, 3$.

Jos jokin ehdoista toteutuu kolme kertaa, saadaan 5 solmun klikki. Jos 1) ja 3), saadaan $2K_3$:n kopio. Siis jokin ehdoista toteutuu kaksi kertaa ja jokin toinen kerran, jolloin saadaan myös 2 kolmen solmun erillistä klikkiä.

Olkoon $a \in \Delta$ solmu, jolle $(a, x_1), (a, x_4) \in E$. Olkoot b, c muut klikin Δ alkiot. Merkitään jokaisella $v \in \Delta$ $\quad N_v = \{\, x \in P \setminus \{x_0\} \mid (v, x) \in E \,\}$. Havaitaan, että $N_b \cap N_c \subset \{x_1, x_4\}$. Muutenhan jollakin $x \in (N_b \cap N_c) \setminus \{x_1, x_4\}$ $\quad \{b, c, x\}$ olisi klikki ja solmusta a ei voisi olla yhteyttä yhteenkään solmuun $w \in \{x_0, x_2, x_2, y, y'\}$, koska tällöin $\{a, x_1, w\}$ olisi tämän kanssa erillinen klikki. Siis $\{a, x_0, x_2, x_2, y\}$ olisi 5 solmun riippumaton joukko, mikä on mahdotonta.

Havainnosta $N_b \cap N_c \subset \{x_1, x_4\}$ taas seuraa suoraan $N_b \cap \{x_1, x_4\} \neq \emptyset$ tai $N_c \cap \{x_1, x_4\} \neq \emptyset$, muutenhan $N_b \cap \{x_1, x_4\} = N_c \cap \{x_1, x_4\} = \emptyset \Rightarrow N_b = N_c = \{x_2, x_3\} \Rightarrow N_b \cap N_c = \{x_2, x_3\}$. Itse asiassa $N_b \cap \{x_1, x_4\}$ ja $N_c \cap \{x_1, x_4\}$ molemmat ovat epätyhjiä. Muussa tapauksessa nimittäin voidaan olettaa $x_1 \in N_b$ ja $N_c \cap \{x_1, x_4\} = \emptyset$. Tällöin $N_c = \{x_2, x_3\}$ ja $\{a, b, x_1\}$, $\{c, x_2, x_3\}$ ovat erillisiä klikkejä, mikä on mahdotonta.

Seuraava havainto on, että $N_b \cap N_c \cap \{x_1, x_3\} \neq \emptyset$. Tämä seuraa siitä, että $\{b\} \cup N_b$ ja $\{c\} \cup N_c$ eivät voi olla erillisiä 3 solmun klikkejä.

Siis voidaan olettaa, että $x_1 \in N_b \cap N_c$ ja $x_4 \in N_b$. Nyt $x_4 \notin N_c$ on mahdotonta, sillä tällöin $\{a, b, x_4\}$ ja $\{c, x_1, x_2\}$ olisivat klikkejä. Siis $\{x_1, x_4\} \subset N_a \cap N_b \cap N_c$. Samoin kuin aiemmin saadaan jopa $\{x_1, x_4\} = N_a \cap N_b \cap N_c$. Jokaisesta $v \in \Delta$ on yhteys johonkin solmuun $w \in \{x_0, y, y'\}$, sillä muuten $\{v, x_0, y, y', x_2\}$ olisi 5 solmun riippumaton joukko. Voidaan olettaa, että $(a, x_0) \in E$. Tästä seuraa, että $(v, w) \notin E$, kun $v \in \{b, c\}$ ja $w \in \{y, y'\}$. Toisaalta on oltava $(b, x_0), (c, x_0) \in E$. Siis $\{a, b, c, x_0, x_1\}$ on 5 solmun klikki, mikä on mahdotonta. $\square$

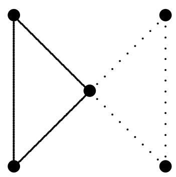
1.15. Lause. *Kun $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, niin $r(nK_3, nK_3) = 5n$.*

Todistus. Edellinen lemma oli induktion aloitusaskel. Olkoon siis $n \geq 3$. Aiemmassa lemmassa on jo todistettu alaraja $r(nK_3, nK_3) \geq 5n$, joten riittää osoittaa $r(nK_3, nK_3) \leq 5n$. Olkoon G $5n$ solmun verkko. Tarkastellaan eri tapauksia.

1) Oletetaan, että verkossa ei ole lainkaan kolmen solmun riippumattomia joukkoja. Tällöin käyttämällä toistuvasti tulosta $R(3) = 6$ löydetään $\lfloor \frac{5n-3}{3} \rfloor \geq n$ erillistä kolmen solmun klikkiä.

1') Vastaavasti $\overline{G}$ sisältää nK_3:n kopion, jos G ei sisällä 3 solmun klikkejä.

2) G sisältää kolmen solmun klikin Δ ja 3 solmun riippumattoman joukon Δ'. Loppu todistuksesta sujuu rusettitekniikalla: osoitetaan, että voidaan valita $\Delta \cap \Delta' \neq \emptyset$.



Jos nimittäin $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$, niin pareja $(x, y) \in \Delta \times \Delta'$ on 9 kappaletta. Symmetrian vuoksi voidaan olettaa, että särmiä (x, y), $x \in \Delta$, $y \in \Delta'$ on vähintään 5. Siis jollakin $y \in \Delta'$ on olemassa $x_0, x_1 \in \Delta$, $x_0 \neq x_1$, joille $(x_0, y), (x_1, y) \in E$. Tällöin $\Delta^* =$

$\{x_0, x_1, y\}$ on klikki ja $\Delta^* \cap \Delta' = \{y\}$.

Oletetaan siis $\Delta \cap \Delta' \neq \emptyset$. Verkossa $G_0 = G|(V \smallsetminus (\Delta \cup \Delta'))$ on $5n-5$ solmua. Induktio-oletuksen mukaan G_0 sisältää $(n-1)K_3$:n kopion tai $\overline{G}_0$ sisältää $(n-1)K_3$:n kopion. Lisäämällä edellisessä tapauksessa joukon Δ solmut ja jälkimmäisessä tapauksessa joukon Δ' solmut löydetään G:stä tai $\overline{G}$:stä nK_3:n kopio. $\square$

Verkkojen Ramseyn teoriassa on tarkasteltu myös värien lukumäärän vaikutusta. Merkitään

$$r(\overbrace{G, \ldots, G}^{k \text{ kpl}}) = r(G; k).$$

Kun $k \in \mathbb{N}^*$, asetetaan $P_k = (k+1, \{\, (i,j) \mid |i-j| = 1,\, i,j \in k+1 \,\})$ eli P_k on k:sta särmästä muodostuva polku. Vastaavasti kun $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$, määritellään $C_k = (k, \{\, (i,j) \in k \times k \mid i \equiv j \pm 1 \pmod{k} \,\})$ eli C_k on k alkion sykli. Seuraavanlaisia tuloksia on todistettu:

$$r(P_3; k) = \begin{cases} 2k+2, & \text{kun } k \equiv 1 \pmod 3 \\ 2k+1, & \text{kun } k \equiv 2 \pmod 3 \text{ ja joillakin } 3 \mid k \\ 2k, & \text{muilla } 3 \mid k. \end{cases}$$

$$r(C_4; k) \leq k^2 + k + 2$$

$$r(C_4; k) \geq k^2 - k + 2, \text{ jos } k-1 \text{ on alkuluvun potenssi.}$$

IV Deskriptiivistä Ramseyn teoriaa

1. Topologiaa ja deskriptiivistä joukko-oppia

Palautetaan mieleen Erdősin ja Radon ositusmerkintä

$$r \to (n)^k_c,$$

joka tarkoittaa, että aina kun $|X| = r, \chi\colon [X]^k \to c$ on väritys, niin on olemassa $H \subset X, |H| = n$, jolle $\chi\restriction[H]^k$ on vakiokuvaus (r, n, k, c kardinaaleja).

Erityisesti

$$\omega \to (\omega)^\omega_2$$

merkitsisi, että aina kun $\chi\colon [\omega]^\omega \to 2$ on väritys, olisi olemassa ääretön $H \subset \omega$, jolle $\chi\restriction[H]^\omega$ olisi vakiokuvaus; tai mikä on yhtäpitävää, jokaisella $S \subset [\omega]^\omega$ olisi olemassa ääretön $H \subset \omega$, jolle $[H]^\omega \subset S$ tai $[H]^\omega \cap S = \emptyset$. Tämä vain ei pidä paikkaansa:

1.1. Esimerkki. Osoitetaan vastaesimerkillä, että

$$\omega \not\to (\omega)^\omega_2.$$

Koska $|[\omega]^\omega| = |\mathcal{P}(\omega)| = 2^\omega$, voidaan joukko $[\omega]^\omega$ luetella seuraavasti

$$[\omega]^\omega = \{H_\alpha | \alpha < 2^\omega\}.$$

Pyritään tappamaan jokainen H_α, $\alpha < 2^\omega$.

Muodostetaan joukot $S_\alpha, T_\alpha, \alpha < 2^\omega$, transfiniittisellä induktiolla:

$$\begin{aligned} S_0 &= T_0 = \emptyset; \\ S_\gamma &= \bigcup_{\alpha<\gamma} S_\alpha \\ T_\gamma &= \bigcup_{\alpha<\gamma} T_\alpha,\ \text{kun } \gamma \text{ on rajaordinaali.} \end{aligned}$$

Seuraajaordinaalin $\alpha + 1$ kohdalla tapetaan H_α. Valitaan sellaiset $Y_\alpha, Z_\alpha \subset H_\alpha, Y_\alpha \neq Z_\alpha, |Y_\alpha| = |Z_\alpha| = \omega$, että

$$Y_\alpha, Z_\alpha \notin S_\alpha \cup T_\alpha.$$

Asetetaan $S_{\alpha+1} = S_\alpha \cup \{Y_\alpha\}, T_{\alpha+1} = T_\alpha \cup \{Z_\alpha\}$. Valinta on mahdollinen, koska $|S_\alpha| = |T_\alpha| = |\alpha| < 2^\omega$, joten $|[H_\alpha]^\omega \smallsetminus (S_\alpha \cup T_\alpha)| = |[H_\alpha]^\omega| = 2^\omega$. Asetetaan lopuksi $S = \bigcup_{\alpha<2^\omega} S_\alpha$ ja $T = \bigcup_{\alpha<2^\omega} T_\alpha$. Tällöin $S \cap T = \emptyset$ ja jokainen $H \subset \omega, |H| = \omega$, on jollakin $\alpha < 2^\omega$ $H_\alpha = H$, joten $Y_\alpha \in [H]^\omega \cap S_{\alpha+1} \subset [H]^\omega \cap S$ ja $Z_\alpha \in [H]^\omega \cap T \Rightarrow [H]^\omega \not\subseteq S$. Siis ei ole olemassa ääretöntä $H \subset \omega$, jolle $[H]^\omega \subset S$ tai $[H]^\omega \cap S = \emptyset$.

Edellisessä esimerkissä käytettiin valinta-aksioomaa, joten epäonnistuminen voi liittyä siihen, että esimerkki on jollakin tavion epäsiisti. Pyritään luomaan siistien tapausten Ramseyn teoriaa eli deskriptiivistä Ramseyn teoriaa. Tarkempi tarkastelu osoittaa, että siisteyden voi jakaa kahteen osaan:

1) varsinaiset siistysoletukset, joiden topologisia muotoiluja ovat: avoimuus, olla Borelin joukko, analyyttisyys jne.
2) voidaan myös sallia pieniä häiriöitä: harvat, laihat joukot jne.

1.2. Määritelmä. $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ on joukon X *topologia*, jos

1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
2) jokaisella $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ pätee $\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T}$; ja
3) kaikilla äärellisillä $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{T}, \mathcal{U}_0 \neq \emptyset$ on voimassa $\bigcap \mathcal{U}_0 \in \mathcal{T}$.

Topologian $\mathcal{T}$ alkioita kutsutaan avoimiksi joukoiksi. Joukko $F \subset X$ on *suljettu*, jos $X \setminus F \in \mathcal{T}$. Joukon $A \subset X$ *sisus* on

$$\operatorname{Int} A = \bigcup \{U \subset A | U \in \mathcal{T}\},$$

sulkeuma

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subset X | A \subset F, F \text{ suljettu}\}$$

ja *reuna*

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

1.3. Määritelmä. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus. Joukko A on *tiheä*, jos $\overline{A} = X$. Avaruus $(X, \mathcal{T})$ on *separoituva*, jos on olemassa numeroituva tiheä $A \subset X$.

Avaruus $(X, \mathcal{T})$ on *metristyvä*, jos on olemassa topologian $\mathcal{T}$ indusoiva metriikka, ja *täydellisesti metristyvä*, jos joku tällainen metriikka on täydellinen eli Cauchy-jonot suppenevat. Avaruus $(X, \mathcal{T})$ on *puolalainen*, jos se on täydellisesti metristyvä ja separoituva.

1.4. Määritelmä. Topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T})$ osajoukko A on *harva*, jos $\operatorname{Int} \overline{A} = \emptyset$. Joukko A on *laiha* (engl. meagre), jos se on numeroituva yhdiste harvoista joukoista.

Joukolla $B \subset X$ on *Bairen ominaisuus*, jos on olemassa avoin $U \subset X$, jolle $B \Delta U = (B \setminus U) \cup (U \setminus B)$ on laiha.

1.5. Lemma. *Jos F on topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T})$ suljettu osajoukko, niin $F \setminus \operatorname{Int} F$ on harva, joten F:llä on Bairen ominaisuus.*

Todistus. Tarkastellaan joukkoa

$$\begin{aligned}
\partial F &= \overline{F} \cap \overline{X \setminus F} \\
&= F \cap (X \setminus \operatorname{Int} F) \\
&= F \setminus \operatorname{Int} F \\
&= (F \setminus \operatorname{Int} F) \cup (\operatorname{Int} F \setminus F) \\
&= F \Delta \operatorname{Int} F.
\end{aligned}$$

Reunan sisukselle pätee toisaalta

$$\operatorname{Int} \partial F \subset \operatorname{Int} F,$$

toisaalta

$$\operatorname{Int}\partial F \subset \partial F \subset X \setminus \operatorname{Int} F,$$

joten $\operatorname{Int}\overline{\partial F} = \operatorname{Int}\partial F = \emptyset$. Siis ∂F on harva. $\square$

1.6. Lause. *(Baire) Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus ja $U_n, n \in \mathbb{N}$, sen avoimia tiheitä osajoukkoja. Tällöin $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ on epätyhjä.*

Todistus. Valitaan induktiolla pisteet $x_n, n \in \mathbb{N}$ ja säteet $r_n < 2^{-n}$ niin, että

$$\overline{B_d(x_n, r_n)} \subset U_n$$

ja

$$\overline{B_d(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset B_d(x_n, r_n).$$

Tämä on mahdollista, sillä U_n on tiheä ja siis leikkaa avointa epätyhjää joukkoa $B_d(x_{n-1}, r_{n-1})$, kun $n \in \mathbb{N}^*$ tai X:ää, kun $n = 0$. Valitaan $x_n \in B_d(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap U_n$ (tai $x_0 \in U_0$). Koska U_n on avoin, on olemassa sellainen $r_n \in]0, 2^{-n}[$, että halutut ehdot toteutuvat. Nyt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on Cauchy-jono, joten on olemassa $x = lim_{n\to\infty} x_n$. Kun $n, k \in \mathbb{N}, k > n$, pätee

$$\begin{aligned} &x_k \in \overline{B_d(x_n, r_n)} \subset U_n \\ &\Rightarrow x \in \overline{B_d(x_n, r_n)} \subset U_n. \end{aligned}$$

Siis $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. $\square$

1.7. Bairen kategorialause *Täydellisesti metristyvä avaruus ei ole laiha.*

Todistus. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ täydellisesti metristyvä avaruus, ja d vastaava täydellinen metriikka. Olkoon A laiha; osoitetaan, että $A \subsetneq X$. Valitaan harvat $A_n, n \in \mathbb{N}$, joille $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Joukot $\overline{A_n}, n \in \mathbb{N}$, ovat edelleen harvoja, ja niiden komplementit $X \setminus \overline{A_n}$ ovat avoimia sekä tiheitä:

$$U \subset X \text{ avoin } \Rightarrow U \not\subset \overline{A_n} \Rightarrow U \cap (X \setminus \overline{A_n}) \neq \emptyset.$$

Edellisen nojalla $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(X \setminus \overline{A_n}) \neq \emptyset \Rightarrow A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \subsetneq X$. $\square$

1.8. Määritelmä. $I \subset \mathcal{P}(X)$ on joukon X *ideaali*, jos
1) $\emptyset \in I$, $X \notin I$;
2) kun $A \subset B \in I$, niin $A \in I$;
3) kun $A, B \in I$, niin $A \cup B \in I$.

Huom. 1) Joukko-opillinen ideaali on algebrallisen ideaalin erikoistapaus, sillä joukon X ideaali I on Boolen renkaan $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ ideaali.
2) Nykyisin ideaalilta vaaditaan usein, että $\{x\} \in I$ kaikilla $x \in X$. Toisaalta yo. määritelmän mukaan jos I on joukon X ideaali, niin se on myös joukon $Y = \bigcup I$ ideaali ja $\{x\} \in I$, kun $x \in Y$.

1.9. Lause. *Olkoon $(X, \mathcal{T})$ täydellisesti metristyvä avaruus. Tällöin*

$$\mathcal{M} = \{\, A \subset X \mid A \textit{ laiha } \}$$

on joukon X ideaali. Itse asiassa $\mathcal{M}$ on jopa ω_1-ideaali eli ideaali, joka on suljettu numeroituvien yhdisteiden suhteen.

Todistus. 1) $\emptyset$ on jopa harva, sillä $\operatorname{Int}\overline{\emptyset} = \operatorname{Int}\emptyset = \emptyset$. Bairen kategorialauseen nojalla X ei ole laiha.

2) Kaikilla $C, D \subset X$ pätee sulkeuman ja sisuksen monotonisuuden nojalla

$$C \subset D \Rightarrow \overline{C} \subset \overline{D} \Rightarrow \operatorname{Int}\overline{C} \subset \operatorname{Int}\overline{D}.$$

Erityisesti jos Don harva, niin $\operatorname{Int}\overline{C} \subset \overline{D} = \emptyset$, joten C on harva. Jos B on laiha ja $A \subset B$, niin $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ joillakin harvoilla B_n, $n \in \mathbb{N}$, joten

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \cap A)$$

on laiha.

3) Oletetaan, että joukot A_n, $n \in \mathbb{N}$, ovat laihoja. Tällöin jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on olemassa harvat A_{nk}, $k \in \mathbb{N}$, joille $A_n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{nk}$. Siis joukko

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{nk}$$

on laiha. $\square$

1.10. Määritelmä. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus. Tämän avaruuden *Borelin joukkojen* perhe on pienin sellainen $\mathbb{B}$, että $\mathcal{T} \subset \mathbb{B}$ ja $\mathbb{B}$ on suljettu sekä komplementin että numeroituvien yhdisteiden suhteen.

Borelin hierarkia eli $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$- ja $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ joukot määritellään seuraavasti induktiolla ordinaalin $\alpha < \omega_1$, $\alpha > 0$, suhteen:

A on $\mathbf{\Sigma}^0_1$-*joukko*	$\iff$	A on avoin
A on $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$-*joukko*	$\iff$	$X \setminus A$ on $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-joukko
A on $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-*joukko* $(\alpha > 1)$	$\iff$	on olemassa joukot A_n, $n \in \mathbb{N}$, joille $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ja jokaisella $n \in \mathbb{N}$ A_n on $\mathbf{\Pi}^0_\beta$-joukko jollakin $\beta < \alpha$.

1.11. Lemma. *Topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T})$ joukko A on Borelin joukko täsmälleen silloin, kun se on $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-joukko (tai $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$-joukko) jollakin $\alpha < \omega_1$, $\alpha > 0$.*

Todistus. Transfiniittisellä induktiolla ordinaalin $\alpha < \omega_1$, $\alpha > 0$, suhteen seuraa helposti, että $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$- ja $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$-joukot ovat Borelin joukkoja. Merkitään

$$\mathbb{B}' = \{\, A \subset X \mid A \text{ on } \mathbf{\Sigma}^0_\alpha\text{-joukko jollakin } \alpha < \omega_1,\ \alpha > 0 \,\}.$$

Tällöin $\mathbb{B}' \subset \mathbb{B}$. Toisaalta avoimet joukot ovat $\mathbf{\Sigma}^0_1$-joukkoja, joten $\mathcal{T} \subset \mathbb{B}'$ ja $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$-joukot ovat $\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$-joukkoja (yksityiskohdat harjoitustehtäväksi). Osoitetaan, että $\mathbb{B}'$ on numeroituvien yhdisteiden suhteen suljettu. Olkoot $A_n \in \mathbb{B}'$, kun $n \in \mathbb{N}$, ts. A_n on $\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha_n}$-joukko ja siten $\Pi^0_{\alpha_n+1}$-joukko. Merkitään $\alpha = \sup\{\, \alpha_n + 1 \mid n \in \mathbb{N} \,\} < \omega_1$. Tällöin $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ on $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-joukko. Siis $\mathbb{B}'$ on perhe, jolle $\mathcal{T} \subset \mathbb{B}'$ ja joka on sekä komplementtien että numeroituvien yhdisteiden suhteen suljettu. $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}'$ ja $\mathbb{B} = \mathbb{B}'$. $\square$

1.12. Lause. *Topologisen avaruuden Borelin joukoilla on Bairen ominaisuus.*

Todistus. Väite on selvä avoimille joukoille. Todistetaan väite induktiolla Borelin joukon rakenteen suhteen. Oletetaan, että väite pätee avaruudessa $(X, \mathcal{T})$ Borelin joukolle B, ts. on olemassa avoin U, jolle $B \Delta U$ on laiha. Koska $X \setminus U$ on suljettu, $(X \setminus U) \Delta \operatorname{Int}(X \setminus U)$ on harva. Siis

$$\begin{aligned}
&(X \setminus B) \Delta \operatorname{Int}(X \setminus U) \\
&= \big((X \setminus B) \Delta (X \setminus U)\big) \Delta \big((X \setminus U) \Delta \operatorname{Int}(X \setminus U)\big) \\
&= (B \Delta U) \Delta ((X \setminus U) \Delta \operatorname{Int}(X \setminus U)\big)
\end{aligned}$$

on laiha.

Tarkastellaan lopuksi Borelin joukkoa $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, missä jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on olemassa sellainen avoin U_n, että $B_n \Delta U_n$ on laiha. Tällöin avoimelle joukolle $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ pätee $B \Delta U \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_n \Delta U_n)$. Oikeanpuoleinen on laihojen joukkojen numeroituvana yhdisteenä laiha, joten $B \Delta U$ on laiha. $\square$

1.13. Joukon $[\mathbb{N}]^\omega$ topologiat. Joukon $[\mathbb{N}]^\omega$ luonnollinen topologia $\mathcal{T}$ saadaan tulkitsemalla tämä joukko $\mathcal{P}(\mathbb{N})$:n aliavaruudeksi ($[\mathbb{N}]^\omega \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$). Joukkoon $[\mathbb{N}]^\omega$ indusoituu kanta

$$\mathcal{B} = \{\, U(A, B) \mid A, B \subset \mathbb{N} \text{ äärellisiä } \},$$

missä

$$U(A, B) = \{\, X \in [\mathbb{N}]^\omega \mid A \subset X,\ X \cap B = \emptyset \,\},$$

kun $A, B \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$.

Joukkoon $[\mathbb{N}]^\omega$ saadaan vaihtoehtoinen *Vietoriksen* (tai *Ellentuckin*) *topologia* $\mathcal{T}_V$, jonka virittää kanta

$$\mathcal{B}_V = \{\, V(A, B) \mid A \in [\mathbb{N}]^{<\omega},\ B \in [\mathbb{N}]^\omega,\ A \subset B \,\},$$

missä

$$V(A, B) = \{\, X \in [\mathbb{N}]^\omega \mid A \subset X \subset B \,\},$$

kun $A \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$, $B \in [\mathbb{N}]^\omega$ ja $A \subset B$.

$\mathcal{B}_V$ on todella topologian kanta, sillä kaikilla $B, B' \in [\mathbb{N}]^\omega$, $A \in [B]^{<\omega}$ ja $A' \in [B']^{<\omega}$ on voimassa

$$V(A, B) \cap V(A', B') = \begin{cases} V(A \cup A', B \cap B'), & \text{jos } A \cup A' \subset B \cap B' \in [\mathbb{N}]^\omega \\ \emptyset, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Vietoriksen topologia on hienompi kuin tavanomainen, sillä jos $A, B \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$ ja $A \cap B = \emptyset$, niin $A \subset \mathbb{N} \setminus B \in [\mathbb{N}]^\omega$ ja $U(A, B) = V(A, \mathbb{N} \setminus B)$.

2. Ellentuckin lause

2.1. Määritelmä. Olkoon $S \subset [\mathbb{N}]^\omega$. Joukko $H \in [\mathbb{N}]^\omega$ on *homogeeninen S:n suhteen*, jos $[H]^\omega \subset S$ tai $[H]^\omega \cap S = \emptyset$. S on *Ramseyn joukko*, jos on olemassa S:n suhteen homogeeninen $[H]^\omega$. S on *täysin Ramseyn joukko*, jos kaikilla $A \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$, $X \in [\mathbb{N}]^\omega$, $A \subset X$, on olemassa $Y \in V(A,X)$, jolle $V(A,Y) \subset S$ tai $V(A,Y) \cap S = \emptyset$.

Huom. 1) Koska $V(\emptyset,\mathbb{N}) = [\mathbb{N}]^\omega$, niin täysin Ramseyn joukot ovat Ramseyn joukkoja.

2) Osan IV alussa oleva esimerkki osoittaa, että valinta-aksioomalla saadaan joukkoja, jotka eivät ole Ramseyn joukkoja.

2.2. Määritelmä. Olkoot $A \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$, $X \in [\mathbb{N}]^\omega$ ja $S \subset [\mathbb{N}]^\omega$. Joukko X *S-hyväksyy* joukon A, jos on olemassa sellainen $Y \in V(A,X)$, että $X \setminus Y$ on äärellinen ja $V(A,Y) \subset S$. Joukko X *S-hylkää* joukon A, jos mikään $Y \in V(A,X)$ ei hyväksy joukkoa A. X on *S-deterministinen*, jos jokaisella $A \in [X]^{<\omega}$ joukko X joko S-hyväksyy tai S-hylkää joukon A.

Seuraavien helppojen havaintojen avulla rakennetaan hylkäämis-hyväksymis-laskentaa:

2.3. Lemma. *Olkoot A, X ja S kuten määritelmässä.*

a) Jos X S-hyväksyy joukon A ja $Y \in V(A,X)$, niin myös Y S-hyväksyy joukon A.

b) Jos X S-hylkää joukon A ja $Y \in V(A,X)$, niin myös Y S-hylkää joukon A.

c) On olemassa $Z \in V(A,X)$, joka S-hyväksyy tai S-hylkää joukon A.

Todistus. a) Koska X S-hyväksyy joukon A, on olemassa $X_0 \in V(A,X)$, jolle erotus $X \setminus X_0$ on äärellinen ja $V(A,X_0) \subset S$. Merkitään $Y_0 = Y \cap X_0$; tällöin $Y \setminus Y_0$ on äärellinen, $Y_0 \in V(A,Y)$ ja $V(A,Y_0) \subset V(A,X_0) \subset S$. Siis Y S-hyväksyy joukon A.

Kohta b on ympäristöjen monotonisuuden vuoksi selvää.

c) Joko $X \in V(A,X)$ itse S-hylkää joukon A tai ei, jolloin on olemassa $Z \in V(A,X)$, joka S-hyväksyy joukon A. $\square$

2.4. Lemma. *Olkoon $S \subset [\mathbb{N}]^\omega$, $X,Y \in [\mathbb{N}]^\omega$ ja $A \in [X \cap Y]^{<\omega}$. Oletetaan, että $|X \Delta Y| < \omega$. Tällöin X S-hyväksyy joukon A, jos ja vain jos Y S-hyväksyy joukon A. Vastaava pätee S-hylkäämiselle.*

Todistus. Jos X S-hyväksyy joukon A, niin edellisen lemman nojalla $X \cap Y$ S-hyväksyy joukon A, joten jollakin $X_0 \subset X \cap Y$, $|(X \cap Y) \setminus X_0| < \omega$, pätee $[X_0]^\omega \subset S$. Toisaalta $X_0 \in [Y]^\omega$ ja $|Y \setminus X_0| < \omega$, joten Y S-hyväksyy joukon A. Symmetrian vuoksi tämä yksi suunta riittää.

Oletetaan vastaavasti, että X S-hylkää joukon A. Olkoon $Y_0 \in V(A,Y)$; merkitään $X_0 = X \cap Y_0$. Tällöin X_0 ei S-hyväksy joukkoa A, joten Y_0 ei edellisen kohdan mukaan S-hyväksy joukkoa A, sillä $X_0 \Delta Y_0 \subset X \Delta Y$ on äärellinen. Siis Y S-hylkää joukon A. $\square$

2.5. Lemma. *Kun $S \subset [\mathbb{N}]^\omega$, $X \in [\mathbb{N}]^\omega$ ja $\mathcal{A} \subset [X]^{<\omega}$ on äärellinen, niin on olemassa sellainen $Y \in [X]^\omega$, että $\mathcal{A} \subset [Y]^{<\omega}$ ja jokaisella $A \in \mathcal{A}$ Y S-hylkää tai S-hyväksyy joukon A.*

Todistus. Todistetaan väite induktiolla perheen $\mathcal{A}$ koon $|\mathcal{A}|$ suhteen. Tapauksessa $|\mathcal{A}| = 0$ eli $\mathcal{A} = \emptyset$ voidaan selvästi valita $Y = X$. Oletetaan sitten, että $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Valitaan $A_0 \in \mathcal{A}$ mielivaltaisesti. Induktio-oletuksen mukaan on olemassa $Y_0 \in [X]^\omega$, että $\mathcal{A} \setminus \{A_0\} \subset [Y_0]^{<\omega}$ ja jokaisella $A \in \mathcal{A} \setminus \{A_0\}$ Y_0 S-hylkää tai S-hyväksyy joukon A. Tiedetään, että on olemassa sellainen $Y_1 \in V(A_0, A_0 \cup Y_0)$, että Y_1 joko S-hyväksyy tai S-hylkää joukon A_0. Tarkastellaan joukkoa $Y = Y_1 \cup \bigcup \mathcal{A}$. Koska $\bigcup \mathcal{A}$ on äärellinen ja edellisen lemman mukaan äärelliset poikkeamat eivät vaikuta hyväksymiseen eikä hylkäämiseen, niin Y joko S-hyväksyy tai S-hylkää joukon A_0. Vastaavasti huomataan, että jokaisella $A \in \mathcal{A} \setminus \{A_0\}$

Y_0	S-hylkää tai S-hyväksyy joukon A	
$\Rightarrow A_0 \cup Y_0$	S-hylkää tai S-hyväksyy joukon A	(äärelliset poikkeamat)
$\Rightarrow Y_1$	S-hylkää tai S-hyväksyy joukon A	(perinnöllisyys)
$\Rightarrow Y$	S-hylkää tai S-hyväksyy joukon A	(äärelliset poikkeamat) $\square$

2.6. Lemma. *Kun $S \subset [\mathbb{N}]^\omega$, $X \in [\mathbb{N}]^\omega$ ja $A \in [X]^{<\omega}$, on olemassa S-deterministinen $Y \in V(A, X)$.*

Todistus. Mä̈äritellään laskeva jono äärettömiä joukkoja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ja aidosti nouseva jono $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ äärellisiä $\mathbb{N}$:n osajoukkoja niin, että $X_0 = X$, $A_0 = A$ ja jokaisella $n \in \mathbb{N}$ X_{n+1} S-hylkää tai S-hyväksyy joukon B, kun $B \subset A_n$. Joukot saadaan edellisestä lemmasta soveltamalla sitä äärettömälle joukolle X_n ja perheelle $\mathcal{P}(A_n)$. Jono $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ saadaan aidosti kasvavaksi valitsemalla mielivaltainen $n \in X_i \setminus A_i$ ja asettamalla $A_{i+1} = A_i \cup \{n\}$.

Asetetaan lopuksi $Y = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Tällöin $Y \in V(A, X)$. Jokaisella äärellisellä $B \subset Y$ on olemassa $i \in \mathbb{N}$, jolle $B \subset A_i$. Siis X_{i+1} S-hyväksyy tai S-hylkää joukon B, joten Y S-hyväksyy tai S-hylkää myös joukon B. Siksi Y on S-deterministinen. $\square$

2.7. Lemma. *Olkoon X S-deterministinen joukko ja $A \in [X]^{<\omega}$. Jos X S-hylkää joukon A, niin X S-hylkää joukon $A \cup \{n\}$ melkein kaikilla $n \in X$ (ts. jostakin $n_0 \in \mathbb{N}$ lähtien).*

Todistus. Oletetaan vastoin väitettä, että X ei S-hylkää ja siten deterministisyyden vuoksi S-hyväksyy joukon $A \cup \{n\}$ mielivaltaisen suurilla $n \in X$. Määritellään alkiot $a_i \in \mathbb{N}$ ja äärelliset joukot $B_i \subset X$ induktiolla seuraavasti: Jokaisella $i \in \mathbb{N}$ a_i on pienin luku $m \in \mathbb{N}$, jolle $m \notin \{\, a_j \mid j \in i \,\} \cup \bigcup_{j\in i} B_j$ ja X S-hyväksyy joukon $A \cup \{m\}$. Koska X S-hyväksyy joukon $A \cup \{m\}$, on olemassa äärellinen $B_i \subset X$, jolle $V(A \cup \{m\}, X \setminus B_i) \subset S$.

Merkitään $Y = \{\, a_i \mid i \in \mathbb{N} \,\} \cup A$. Olkoon $Z \in V(A, Y)$. Merkitään $b = \min(Z \setminus A)$. Tällöin $b = a_i$ jollakin $i \in \mathbb{N}$ ja $V(A \cup \{b\}, X \setminus B_i) \subset S$. Koska $a_j \notin B_i$, kun $j \in \mathbb{N}$, $j \geq i$, niin $Z \setminus A \subset X \setminus B_i$, joten $Z \in V(A \cup \{b\}, X \setminus B_i) \subset S$. Siis $V(A, Y) \subset S$ ja Y S-hyväksyy joukon A, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että X:n piti S-hylätä A. $\square$

2.8. Lemma. *Olkoon X S-deterministinen joukko ja $A \in [X]^{<\omega}$. Oletetaan, että X S-hylkää joukon A. Tällöin on olemassa $Y \in V(A, X)$, joka S-hylkää kaikki äärelliset $B \subset Y$, joille $A \subset B$.*

Todistus. Valitaan induktiolla kasvava jono äärellisiä joukkoja $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Asetetaan aluksi $A_0 = A$. Oletetaan, että A_i on valittu niin, että X S-hylkää jokaisen B, jolle $A \subset B \subset A_i$. Edellisestä lemmasta seuraa, että jokaisella tällaisella B on olemassa sellainen $n_B \in \mathbb{N}$, että X S-hylkää joukon $B \cup \{n\}$ jokaisella $n \in X$, $n \geq n_B$. Valitaan $m = \max\{\, n_B \mid A \subset B \subset A_i \,\}$. Asetetaan $A_{i+1} = A_i \cup \{m\}$. Tällöin X S-hylkää jokaisen B, jolle $A \subset B \subset A_{i+1}$. Lopuksi merkitään $Y = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Tällöin jokainen

$B \in [Y]^{<\omega}$, jolle $A \subset B$, sisältyy johonkin A_i:hin, joten X ja myös Y S-hylkää joukon B. $\square$

2.9. Lause. *Jokaisen Vietoriksen topologian suhteen avoin S (eli $\mathcal{T}_V$-avoin) on täysin Ramseyn joukko.*

Todistus. Olkoot $X \in [\mathbb{N}]^\omega$ ja $A \subset [X]^{<\omega}$. Valitaan (aiemman lemman avulla) S-deterministinen $Y \in V(A, X)$. Toinen mahdollisuus on, että Y S-hyväksyy joukon A, jolloin on olemassa $Z \in V(A, Y) \subset V(A, X)$, $|Y \smallsetminus Z| < \omega$, jolle $V(A, Z) \subset S$. Toinen tapaus on, että Y S-hylkää joukon A. Tällöin voidaan valita $Z \in V(A, Y)$, joka S-hylkää kaikki äärelliset $B \subset Z$, joille $A \subset B$. Olkoon $W \in V(A, Z)$. Tällöin $W \notin S$, sillä muuten joukon S avoimuuden vuoksi olisi olemassa $C \in [W]^{<\omega}$, jolle $V(C, W) \subset S$ ja siten $V(A \cup C, W) \subset S$, ts. W S-hyväksyisi joukon $A \cup C$, vaikka Z S-hylkää joukon $A \cup C$, mikä on ristiriidassa hylkäämisen määritelmän kanssa. Siis $V(A, Z) \subset [\mathbb{N}]^\omega \smallsetminus S$. $\square$

2.10. Seuraus. *$\mathcal{T}_V$-suljetut joukot ovat täysin Ramseyn joukkoja.* $\square$

2.11. Lemma. *Olkoon $S \subset [\mathbb{N}]^\omega$ $\mathcal{T}_V$-harva. Tällöin kaikilla $A \in [\mathbb{N}]^{<\omega}, X \in [\mathbb{N}]^\omega$, missä $A \subset X$, on olemassa $W \in V(A, X)$, jolle $V(A, W) \cap S = \emptyset$. Erityisesti S on täysin Ramseyn joukko.*

Todistus. Tiedetään, että $\overline{S}$ on täysin Ramseyn joukko ja $\operatorname{Int} \overline{S} = \emptyset$, koska S on harva, joten jokaisella $X \in [\mathbb{N}]^\omega$ ja $A \in [X]^{<\omega}$ on olemassa $Y \in V(A, X)$, jolle $V(A, Y) \cap \overline{S} = \emptyset$, joten $V(A, Y) \subset [\mathbb{N}]^\omega \smallsetminus \overline{S} \subset [\mathbb{N}]^\omega \smallsetminus S$. $\square$

2.12. Lause. *Olkoon $S \subset [\mathbb{N}]^\omega$ $\mathcal{T}_V$-laiha. Tällöin S on täysin Ramseyn joukko ja $\mathcal{T}_V$-harva. Itse asiassa kaikilla $A \in [\mathbb{N}]^{<\omega}, X \in [\mathbb{N}]^\omega$, missä $A \subset X$, on olemassa $W \in V(A, X)$, jolle $V(A, W) \cap S = \emptyset$.* $\square$

Todistus. Koska S on $\mathcal{T}_V$-laiha, on olemassa $\mathcal{T}_V$-harvat joukot $S_n \subset [\mathbb{N}]^\omega, n \in \mathbb{N}$, joille

$$S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n.$$

Valitaan induktiolla aidosti kasvava jono äärellisiä joukkoja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ja laskeva jono $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niin, että $A_0 = A, X_0 = X$ ja kaikilla $n \in \mathbb{N}$ $A_n \subset X_n$ ja $V(A, X_{n+1}) \bigcap S_n = \emptyset$. Osoitetaan, että X_{n+1} ja A_{n+1} voidaan valita halutulla tavalla, kun X_n ja A_n on jo valittu. Muodostetaan äärellinen luettelo

$$\{ B_k \mid k = 0, \ldots, m-1 \} = \{ B \mid A \subset B \subset A_n \}.$$

Merkitään $Z_0 = X_n$ ja valitaan edellisen lemman avulla joukot $Z_k, k = 1, \ldots, m$ niin, että $Z_k \in V(B_{k-1}, Z_{k-1} \cup A_n)$ ja $V(B_{k-1}, Z_k) \cap S_n = \emptyset$. Asetetaan $X_{n+1} = Z_m$. Olkoon $Y \in V(A, X_{n+1})$. Merkitään $B = Y \cap A_n$; tällöin $B = B_k$ jollakin $k \in m$. Siis $V(B, Z_{k+1}) \cap S_n = \emptyset$. Koska $(Z_l \smallsetminus A_n)_{l \in m}$ on laskeva jono, niin

$$Y \smallsetminus A_n \subset X_{n+1} \smallsetminus A_n \subset Z_{k+1} \smallsetminus A_n,$$

joten

$$
\begin{aligned}
&Y = (Y \setminus A_n) \cup B \subset Z_{k+1} \\
\Rightarrow &Y \in V(B, Z_{k+1}) \subset [\mathbb{N}]^\omega \setminus S_n \\
\Rightarrow &Y \notin S_n.
\end{aligned}
$$

Siis $V(A, X_{n+1}) \cap S_n = \emptyset$. Koska X_{n+1} on ääretön, voidaan valita äärellinen A_{n+1} niin, että $A_n \subsetneq A_{n+1} \subset X_{n+1}$.

Asetetaan $W = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n \supset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Koska jono $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on aidosti kasvava, W on ääretön ja $W \in V(A, X)$. Toisaalta

$$
V(A,W) \cap S = V(A,W) \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (V(A,W) \cap S_n) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (V(A, X_{n+1}) \cap S_n) = \emptyset.
$$

□

2.13. Lause. *(Ellentuck) Olkoon $S \subset [\mathbb{N}]^\omega$. Tällöin S on täysin Ramseyn joukko täsmälleen silloin, kun S:llä on Bairen ominaisuus Vietoriksen topologian suhteen.* □

Todistus. Oletetaan ensin, että joukolla S on Bairen ominaisuus $\mathcal{T}_V$:n suhteen. Olkoot $A \in [\mathbb{N}]^{<\omega}, X \in [\mathbb{N}]^\omega$, missä $A \subset X$. Koska S:llä on Bairen ominaisuus, on olemassa $\mathcal{T}_V$-avoin U, jolle $M = S \Delta U$ on $\mathcal{T}_V$-laiha. Edellisen lauseen nojalla on olemassa $Y \in V(A, X)$, jolle $V(A, Y) \cap M = \emptyset$. Tällöin $S \cap V(A, Y) = U \cap V(A, Y)$. Koska U on $\mathcal{T}_V$-avoin, se on täysin Ramseyn joukko, joten on olemassa

$$
Z \in V(A, Y) \subset V(A, X),
$$

jolle

$$
\begin{aligned}
&V(A, Z) \subset U \ \vee\ V(A, Z) \cap U = \emptyset \\
\iff &V(A, Z) \subset S \ \vee\ V(A, Z) \cap S = \emptyset.
\end{aligned}
$$

Oletetaan toisaalta, että S on täysin Ramseyn joukko. Osoitetaan, että $S \setminus \operatorname{Int} S$ on $\mathcal{T}_V$-harva. Jos nimittäin $X \in [\mathbb{N}]^\omega$ ja $A \in [X]^{<\omega}$, niin on olemassa $Y \in V(A, X)$, jolle

$$
\begin{aligned}
&V(A, Y) \subset S \ \vee\ V(A, Y) \cap S = \emptyset \\
\Rightarrow &Y \in \operatorname{Int} S \ \vee\ Y \in [\mathbb{N}]^\omega \setminus \overline{S} \\
\Rightarrow &Y \in (\operatorname{Int} S) \cup [\mathbb{N}]^\omega \setminus \overline{S}.
\end{aligned}
$$

Siis $V(A, X) \not\subseteq \overline{S} \setminus \operatorname{Int} S$ ja

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Int}(\overline{S} \setminus \operatorname{Int} S) = \emptyset \\
\Rightarrow &\operatorname{Int} \overline{\overline{S} \setminus \operatorname{Int} S} \subset \operatorname{Int}(\overline{S} \setminus \operatorname{Int} S) = \emptyset.
\end{aligned}
$$

Siis $S \Delta \operatorname{Int} S = S \setminus \operatorname{Int} S$ on $\mathcal{T}_V$-harva, joten joukolla S on Bairen ominaisuus $\mathcal{T}_V$:n suhteen. □

2.14. Seuraus. *Jos $S \subset [\mathbb{N}]^\omega$ on Borelin joukko (tavanomaisen tai Vietoriksen topologian suhteen), niin S on täysin Ramseyn joukko.*

Todistus. Jos $S \subset [\mathbb{N}]^\omega$ on Borelin joukko Vietoriksen topologian suhteen, niin sillä on Bairen ominaisuus $\mathcal{T}_V$:n suhteen. Siis S on Ellentuckin lauseen mukaan täysin Ramseyn joukko.

Jos taas S on Borelin joukko tavanomaisen topologian suhteen, niin S on Borelin joukko myös $\mathcal{T}_V$:n suhteen, sillä Vietoriksen topologia on hienompi kuin tavanomainen ja Borelin joukkojen kokoelma on pienin kokoelma, joka sisältää topologian ja on suljettu komplementin ja numeroituvien yhdisteiden suhteen. $\square$

Huom. Seurausta voi parantaa deskriptiivisessä mielessä, ja todistaa, että ns. analyyttiset joukot ovat täysin Ramseyn joukkoja.

3. Sovellus Banachin avaruuksien teoriaan

Tavoitteena on esittää Rosenthalin lause, joka karkeasti ottaen sanoo, että joko Banachin avaruudella on hyviä suppenemisominaisuuksia tai ℓ^1 uppoaa Banachin avaruuteen.

Banachin avaruuksista

3.1. Määritelmä. *Reaalikertoiminen topologinen vektoriavaruus* on $\mathbb{R}$-vektoriavaruus, joka on varustettu topologialla, joka on T1 (pisteet suljettuja) ja jonka suhteen yhteenlasku ja skalaarikerronta ovat jatkuvia. *Reaalinen Banachin avaruus* on täydellisesti normittuva reaalikertoiminen topologinen vektoriavaruus. Banachin avaruudet X ja Y ovat *isomorfiset*, jos on olemassa bijektio $f\colon X \to Y$, joka on lineaarinen isomorfismi ja homeomorfismi.

Huom. 1) Funktionaalianalyysissa tarkastellaan paitsi reaalisia, myös kompleksisia Banachin avaruuksia. Näissä luennoissa pitäydytään reaalisissa Banachin avaruuksissa vain yksinkertaisuuden vuoksi.

2) Banachin avaruudet on tapana määritellä täydellisinä normiavaruuksina. Isomorfismi kuitenkin määritellään kuten yllä, joten se ei välttämättä säilytä normirakennetta eli ei ole isometria. Vaikka tarkkuuden vuoksi Banachin avaruudet on määritelty vain täydellisesti normittuvina, käytetään tässäkin kuitenkin yleistä tapaa liittää avaruuteen jokin sen täydellisesti normittava normi.

Banachin avaruuksien ominaisuuksia tarkastellaan tarkemmin Funktionaalianalyysin peruskurssilla, eikä kaikkia yksityiskohtia pystytä näissä luennoissa käsittelemään, vaan jotkut asiat joudutaan olettamaan tunnetuiksi. Voidaan esim. osoittaa, että lineaarinen bijektio Banachin avaruudesta X avaruuteen Y on isomorfismi, jos ja vain jos on olemassa vakiot $a, b > 0$, joille kaikilla $x \in X$ pätee

$$a\|x\| \le \|f(x)\| \le b\|x\|.$$

3.2. Esimerkki. $\langle {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}, + \rangle$ on luonnollisesti vektoriavaruus: kun $x, y \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(x+y)(n) = x(n) + y(n) \text{ ja } (\lambda x)(n) = \lambda x(n).$$

Merkitään

$$\ell^p = \{\, x \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \,\},$$

kun $p > 0$, ja

$$\ell^\infty = \{\, x \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R} \mid x \text{ rajoitettu} \,\}.$$

Nämä voidaan osoittaa vektoriavaruuksiksi. Kun $p \geq 1$ tai $p = \infty$, ℓ^p voidaan lisäksi varustaa Banachin avaruuden rakenteella, sillä normit

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \qquad (x \in \ell^p, 1 \leq p < \infty)$$

ja

$$\|x\|_\infty = \sup\{\, |x(n)| \mid n \in \mathbb{N} \,\}$$

ovat täydellisiä.

Edellä esitetyn isomorfismin karakterisoinnin mukaan reaalikertoimiseen Banachin avaruuteen X uppoaa ℓ^1 eli X:llä on aliavaruutena ℓ^1:n kanssa isomorfinen avaruus täsmälleen silloin, kun on olemassa sellaiset alkiot $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, ja vakiot $a, b > 0$, että kaikilla $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_0, \ldots, \lambda_{k-1} \in \mathbb{R}$ pätee

$$a \sum_{i=0}^{k-1} |\lambda_i| \leq \Big\| \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i x_i \Big\| \leq b \sum_{i=0}^{k-1} |\lambda_i|. \tag{$*$}$$

ℓ^1:llä on nimittäin kanoninen kanta $\{\, e_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$, missä

$$e_n(m) = \begin{cases} 1, & \text{kun } m = n \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Jos $f\colon \ell^1 \to X$ on upotus, niin vektorille $x_n = f(e_n)$, $n \in \mathbb{N}$, on oltava voimassa $(*)$, sillä

$$\Big\| \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i e_i \Big\|_1 = \|(\lambda_0, \ldots, \lambda_{k-1}, 0, 0, \ldots,)\|_1 = \sum_{i=0}^{k-1} |\lambda_i|$$

ja

$$f\Big(\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i e_i\Big) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i f(e_i) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i x_i.$$

Toisaalta jos $(*)$ on voimassa, niin $Y = \langle\{\, x_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}\rangle \cong \ell_1$, sillä $f\colon \ell^1 \to X$, $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n)x_n$ on tällöin isomorfismi. (Kuten $\mathbb{R}$:ssä, Banachin avaruudessakin määritellään $\sum_{n=0}^{\infty} y(n)x_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k-1} y(n)x_n$.)

Olkoon X Banachin avaruus ja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jono X:n alkioita. Välttämätön ehto suppenemiselle on, että $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on rajoitettu eli $\sup\{\, \|x_n\| \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ on olemassa.

Funktionaalianalyysistä tiedetään, että jokaisella rajoitetulla $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on suppeneva osajono, joss X on äärellisulotteinen eli sillä on äärellinen kanta. Äärellisulotteiset reaaliset Banachin avaruudet ovat nimittäin isomorfisia euklidisten avaruuksien kanssa. Ääretönulotteisista avaruuksista taas voidaan valita sopiva vapaa jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jolla ei ole suppenevaa osajonoa.

3.3. Määritelmä. Banachin avaruuden X *duaali* on

$$\begin{aligned} X^* &= \{\, y\colon X \to \mathbb{R} \mid y \text{ on jatkuva ja lineaarinen} \,\} \\ &= \{\, y\colon X \to \mathbb{R} \mid y \text{ on lineaarinen ja rajoitettu eli } \exists a > 0 \forall x \in X(|y(x)| \le a\|x\|) \,\}. \end{aligned}$$

Duaali voidaan varustaa normilla ($y \in X^*$)

$$\|y\| = \sup\{\, |y(x)| \mid x \in X, \|x\| = 1 \,\} = \sup\Big\{\, \frac{|y(x)|}{\|x\|} \;\Big|\; x \in X, x \ne 0 \Big\}.$$

Jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avaruuden X alkioita *suppenee heikosti*, jos jollakin $x \in X$ ja kaikilla $y \in X^*$ pätee $\lim_{n\to\infty} y(x_n) = y(x)$. Jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on *heikko Cauchyn jono*, jos jokaisella $y \in X^*$ jono $(y(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee.

Tiedetään, että jonolla $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on heikosti suppeneva osajono, joss X on ns. refleksiivinen avaruus eli kanonisella tavalla isomorfinen biduaalinsa $X^{**} = (X^*)^*$ kanssa.

Rosenthalin lauseeseen liittyvä Ramseyn teoria

3.4. Lause. *Olkoon $\mathcal{A} \subset [\mathbb{N}]^{<\omega}$. Oletetaan, että*

$$\forall M \in [\mathbb{N}]^\omega \exists N \in [M]^\omega \forall n \in \mathbb{N}(N \cap n \in \mathcal{A}).$$

Tällöin $\exists H \in [\mathbb{N}]^\omega([H]^{<\omega} \subset \mathcal{A})$. □

Todistus. Merkitään

$$S = \{M \in [\mathbb{N}]^\omega | \forall n \in \mathbb{N}(M \cap n \in \mathcal{A})\}.$$

Joukko $S \subset [\mathbb{N}]^\omega$ on suljettu tavanomaisen topologian suhteen, sillä jokaisella $X \in [\mathbb{N}]^\omega \smallsetminus S$ on olemassa $n \in \mathbb{N}$, jolle $X \cap n \notin \mathcal{A}$; tällöin $U(A, B) \subset [\mathbb{N}]^\omega \smallsetminus S$, missä $A = X \cap n$ ja $B = n \smallsetminus X$. Ellentuckin lauseen mukaan S on siis Ramseyn joukko.

Oletuksen nojalla

$$\begin{aligned} &\forall M \in [\mathbb{N}]^\omega \exists N \in [M]^\omega \forall n \in \mathbb{N}(N \cap n \in \mathcal{A}) \\ \Leftrightarrow &\forall M \in [\mathbb{N}]^\omega \exists N \in [M]^\omega (N \in S) \\ \Leftrightarrow &\forall M \in [\mathbb{N}]^\omega ([M]^\omega \cap S \ne \varnothing). \end{aligned}$$

Siis on olemassa $H \in [\mathbb{N}]^\omega$, jolle $[H]^\omega \subset S$. Jokainen äärellinen $A \in [H]^{<\omega}$ on alkuosa jostakin joukosta $M \in [H]^\omega$. Koska $M \in S$, saadaan $A \in \mathcal{A}$. □

3.5. Määritelmä. Olkoon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Banachin avaruuden rajoitettu jono ja $\varepsilon > 0$. Jonon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sanotaan sallivan $\varepsilon - l^1$*-lohkoja*, jos jokaisella $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ on olemassa äärellinen $C \subset M$ ja kertoimet $a_i, i \in C$, joille $\sum_{i\in C} |a_i| = 1$ ja $\| \sum_{i\in C} a_i x_i\| \leq \varepsilon$.

Huom. Jono $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on jonon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ osajono, jos on olemassa aidosti kasvava $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, jolle $y_n = x_{f(n)}$, kun $n \in \mathbb{N}$ (usein merkitään $n_k = f(k)$ ja $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$). Havaitaan, että jos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sallii $\varepsilon - l^1$-lohkoja, niin sen jokainen osajonokin sallii.

3.6. Lemma. *Olkoon $\varepsilon, \delta, \tau > 0$. Oletetaan, että reaalisen Banachin avaruuden X rajoitettu jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sallii ε-l^1-lohkoja. Oletetaan toisaalta, että jokaista $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:n osajonoa $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vastaa sellainen $x^* \in X^*$, että $\|x^*\| = 1$ ja*

$$\limsup_{n\to\infty} x^*(z_n) - \liminf_{n\to\infty} x^*(z_n) > 2\varepsilon + 2\delta.$$

Tällöin $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:lla on osajono $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jolla on seuraavat ominaisuudet:

1) *Jos $C, D \subset \mathbb{N}$ ovat erillisiä, äärellisiä ja epätyhjiä, niin on olemassa $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$, jolle*

$$\min\{x^*(y_n) | n \in D\} - \max\{x^*(y_n) | n \in C\} > 2\varepsilon + \delta.$$

2) *On olemassa $A \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$ ja $a_i \in \mathbb{R}, i \in A$, joille*

$$\sum_{i\in A} |a_i| = 1, \left|\sum_{i\in A} a_i\right| \leq \tau \text{ ja } \left\|\sum_{i\in A} a_i y_i\right\| \leq \varepsilon.$$

Todistus. Koostukoon $\mathcal{A}$ sellaisista $A \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$, että on olemassa $x^* \in X^*, \|x^*\| = 1$, jolle

$$\min\{\, x^*(x_n) \mid n \in D \,\} - \max\{\, x^*(x_n) \mid n \in C \,\} > 2\varepsilon + \delta,$$

missä $C = \{\, a_k \mid k \text{ parillinen}, k \in m \,\}$, $D = A \setminus C$, $A = \{a_0, \ldots, a_{m-1}\}$ (järjestyksessä lueteltuna).

Osoitetaan, että edellistä Ramseyn teorian lausetta voidaan soveltaa, ts. $\mathcal{A}$ toteuttaa lauseen oletuksen. Olkoon $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ ja $f : \mathbb{N} \to M$ aidosti kasvava bijektio. Merkitään $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_{f(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Osajonoa $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vastaa sellainen $x^* \in X^*$, että $\|x^*\| = 1$ ja

$$\limsup_{n\to\infty} x^*(z_n) - \liminf_{n\to\infty} x^*(z_n) > 2\varepsilon + 2\delta.$$

Valitsemalla sopivasti vuorotellen alkioita, löydetään sellainen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$:n osajono $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, että

$$\inf\{x^*(t_{2n+1}) | n \in \mathbb{N}\} - \sup\{x^*(t_{2n}) | n \in \mathbb{N}\} > 2\varepsilon + \delta.$$

Jono $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on jonon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ osajono, joten jollakin aidosti kasvavalla $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pätee $t_n = x_{g(n)}$, kun $n \in \mathbb{N}$. Merkitään $N = g[\mathbb{N}]$. Huomataan, että kaikki joukon N alkuosat ovat $\mathcal{A}$:ssa. Edellisen lauseen mukaan on olemassa $H \in [\mathbb{N}]^\omega$, jolle $[H]^{<\omega} \subset \mathcal{A}$. Valitaan H:n ääretön osajoukko $M \subset H$, joka ei sisällä H:n peräkkäisiä alkioita. Olkoon

$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ joukkoa M vastaava osajono, ts. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_{f(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, missä $f : \mathbb{N} \to M$ on aidosti kasvava bijektio.

Havaitaan, että kaikilla $A \in [H]^{<\omega}$ on olemassa $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$, jolle

$$\min\{\, x^*(x_n) \mid n \in D \,\} - \max\{\, x^*(x_n) \mid n \in C \,\} > 2\varepsilon + \delta,$$

missä C sisältää joka toisen ja D joka toisen joukon A alkioista suuruusjärjestyksessä. Olkoot $C, D \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$ erillisiä ja epätyhjiä. Tällöin $f[C], f[D] \subset M$, missä $M \subset H$ ei sisällä joukon H peräkkäisiä alkioita, joten voidaan valita $C', D' \in [H]^{<\omega}$, joille $f[C] \subset C'$, $f[D] \subset D'$ ja C', D' lomittuvat keskenään: kun luetellaan $A = C' \cup D' = \{a_0, \ldots, a_{m-1}\}$ suuruusjärjestyksessä, niin $C' = \{\, a_i \mid i \in n \text{ parillinen} \,\}$ ja $D' = \{\, a_i \mid i \in n \text{ pariton} \,\}$. Siis on olemassa sellainen $x^* \in X$, $\|x^*\| = 1$, että

$$\begin{aligned}
&\min\{\, x^*(y_n) \mid n \in D \,\} - \max\{\, x^*(y_n) \mid n \in C \,\} \\
&= \min\{\, x^*(x_{f(n)}) \mid n \in D \,\} - \max\{\, x^*(x_{f(n)}) \mid n \in C \,\} \\
&\geq \min\{\, x^*(x_m) \mid m \in D' \,\} - \max\{\, x^*(x_m) \mid n \in C' \,\} \\
&> 2\varepsilon + \delta,
\end{aligned}$$

ts. ehto 1 on voimassa.

Tarkistetaan vielä, että ehto 2 on voimassa. Valitaan $m \in \mathbb{N}$ niin, että $m\tau \geq 1$. Valitaan erilliset joukot A_i, $i = 0, \ldots, m$, niin, että jokaisella $i = 0, \ldots, m$ on olemassa kertoimet $a_{in} \in \mathbb{R}$ ($n \in A_i$), joille

$$\sum_{n\in A_i} |a_{in}| = 1 \text{ ja } \left\| \sum_{n\in A_i} a_{in} x_n \right\| \leq \varepsilon.$$

Tällaiset saadaan valittua soveltamalla ε-ℓ^1-lohkoehtoa vuoroin äärettömään joukkoon $\mathbb{N} \setminus \bigcup_{j\in i} A_i$. Merkitään $\eta_i = \sum_{n\in A_i} a_{in} \in [-1, 1]$, kun $i = 0, \ldots, m$. Laatikkoperiaatteen nojalla on olemassa eri $i, j \in \{0, \ldots, m\}$, joille

$$\eta_i, \eta_j \in [-1 + k \cdot \frac{2}{m}, -1 + (k+1) \cdot \frac{2}{m}]$$

jollakin $k \in m$. Näille η_i, η_j pätee $|\eta_i - \eta_j| \leq \frac{2}{m} \leq 2\tau$. Asetetaan $A = A_i \cup A_j$. Kun merkitään

$$a_s = \begin{cases} \frac{1}{2} a_{is}, & \text{kun } s \in A_i \\ -\frac{1}{2} a_{js}, & \text{kun } s \in A_j \end{cases}$$

huomataan, että

$$\sum_{s\in A} |a_s| = \frac{1}{2} \sum_{s\in A_i} |a_{is}| + \frac{1}{2} \sum_{s\in A_j} |a_{js}| = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1,$$

$$\left| \sum_{s\in A} a_s \right| = \left| \sum_{s\in A_i} \frac{1}{2} a_{is} + \sum_{s\in A_j} -\frac{1}{2} a_{js} \right| = \left| \frac{1}{2}\eta_i - \frac{1}{2}\eta_j \right| = \frac{1}{2} |\eta_i - \eta_j| \leq \frac{1}{2} \cdot 2\tau = \tau$$

ja

$$
\begin{aligned}
\Big\| \sum_{s\in A} a_s x_s \Big\| &= \Big\| \frac{1}{2} \sum_{s\in A_i} a_{is} x_s - \frac{1}{2} \sum_{s\in A_j} a_{js} x_s \Big\| \\
&\leq \frac{1}{2} \Big\| \sum_{s\in A_i} a_{is} x_s \Big\| + \frac{1}{2} \Big\| \sum_{s\in A_j} a_{js} x_s \Big\| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. \quad \square
\end{aligned}
$$

3.7. Lause. *Olkoon X reaalinen Banachin avaruus ja $\varepsilon > 0$. Oletetaan, että rajoitettu jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sallii ε-ℓ^1-lohkoja. Tällöin $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:llä on osajono $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jolle*

$$
\limsup_{n\to\infty} x^*(y_n) - \liminf_{n\to\infty} x^*(y_n) \leq 2\varepsilon,
$$

kun $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$.

Todistus. Oletetaan, että tällaista osajonoa ei ole olemassa. Voidaan olettaa, että tällöin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että jokaisella osajonolla $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on olemassa $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$, jolle

$$
\limsup_{n\to\infty} x^*(y_n) - \liminf_{n\to\infty} x^*(y_n) > 2\varepsilon + 2\delta.
$$

(Jos tätä rakoa 2δ ei nimittäin saataisi aikaan, niin diagonalisointitekniikalla saataisiin väitteen mukainen osajono.) Edellisen lemman tilanne on siis voimassa. Olkoon $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lemmasta saatava osajono. Merkitään $\lambda = \sup\{\, \|x_n\| \mid n \in \mathbb{N} \,\}$. Tällöin

$$
\lim_{\tau\to 0+} (-\lambda\tau + \varepsilon + \delta/2) = \varepsilon + \delta/2 > \varepsilon,
$$

joten on olemassa τ, jolle $-\lambda\tau + \varepsilon + \delta/2 > \varepsilon$. Edellisen lemman nukaan on olemassa äärellinen $A \subset \mathbb{N}$ ja kertoimet $a_s \in \mathbb{R}$ $(s \in A)$, joille

$$
\sum_{s\in A} |a_s| = 1, \Big| \sum_{s\in A} a_s \Big| \leq \tau \text{ ja } \Big\| \sum_{s\in A} a_s y_s \Big\| \leq \varepsilon.
$$

Valitaan $C = \{\, s \in A \mid a_s < 0 \,\}$ ja $D = \{\, s \in A \mid a_s > 0 \,\}$. Edellisen lemman ehdon 1 mukaan on olemassa sellainen $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$, että $\lambda_+ - \lambda_- > 2\varepsilon + \delta$, missä $\lambda_+ = \min\{\, x^*(y_n) \mid n \in D \,\}$ ja $\lambda_- = \max\{\, x^*(y_n) \mid n \in C \,\}$. Siis

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &\geq \Big\| \sum_{s\in A} a_s y_s \Big\| \geq x^*(\sum_{s\in A} a_s y_s) = \sum_{s\in A} a_s x^*(y_s) \\
&= \sum_{s\in D} a_s x^*(y_s) + \sum_{s\in C} a_s x^*(y_s) \geq \lambda_+ \sum_{s\in D} a_s + \lambda_- \sum_{s\in C} a_s \\
&= \frac{\lambda_+ + \lambda_-}{2} \sum_{s\in A} a_s + \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{2} \sum_{s\in A} |a_s| \geq \frac{\lambda_+ + \lambda_-}{2}(-\tau) + \varepsilon + \delta/2 \\
&\geq -\lambda\tau + \varepsilon + \delta/2 > \varepsilon,
\end{aligned}
$$

mikä on ristiriita. $\square$

3.8. Rosenthalin lause. *Olkoon X reaalinen Banachin avaruus. Tällöin joko*

1) ℓ^1 uppoaa avaruuteen X

tai

2) jokaisella X:n rajoitetulla jonolla $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on heikko Cauchyn osajono.

Todistus. Oletetaan, että ℓ^1 ei uppoa avaruuteen X. Olkoon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rajoitettu X:n jono, ts. $\lambda = \sup\{\, \|x_n\| \mid n \in \mathbb{N}\,\} < \infty$. Tällöin kaikilla $A \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$, $a_s \in \mathbb{R}$ $(s \in A)$

$$\left\| \sum_{s\in A} a_s x_s \right\| \leq \sum_{s\in A} |a_s| \|x_s\| \leq \lambda \sum_{s\in A} |a_s|.$$

Jotta $e_n \mapsto y_n$ ei määrittäisi ℓ^1:n upotusta X:ään millään osajonolla $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on siis jonon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sallittava ε-ℓ^1-lohkoja jokaisella $\varepsilon > 0$.

Valitaan induktiolla luvun $k \in \mathbb{N}$ suhteen sellaiset jonot $(x_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$, että

a) $(x_{0n})_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

ja jokaisella $k \in \mathbb{N}$

b) $(x_{k+1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ on jonon $(x_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ osajono.

c) jokaisella $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$, pätee $\limsup_{n\to\infty} x^*(x_{k+1,n}) - \liminf_{n\to\infty} x^*(x_{k+1,n}) \leq 2^{-k}$.

Edellisen lauseen avulla tämä saadaan tehtyä. Diagonalisoidaan: $y_n = x_{nn}$, kun $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:n osajono, jolle $(x^*(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee kaikilla $x^* \in X^*$ eli $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on heikko Cauchyn jono. $\square$