

# Näkökulmia lukion matematiikan opetukseen

Dos. Kerkko Luosto

Kerkko.Luosto@Helsinki.FI

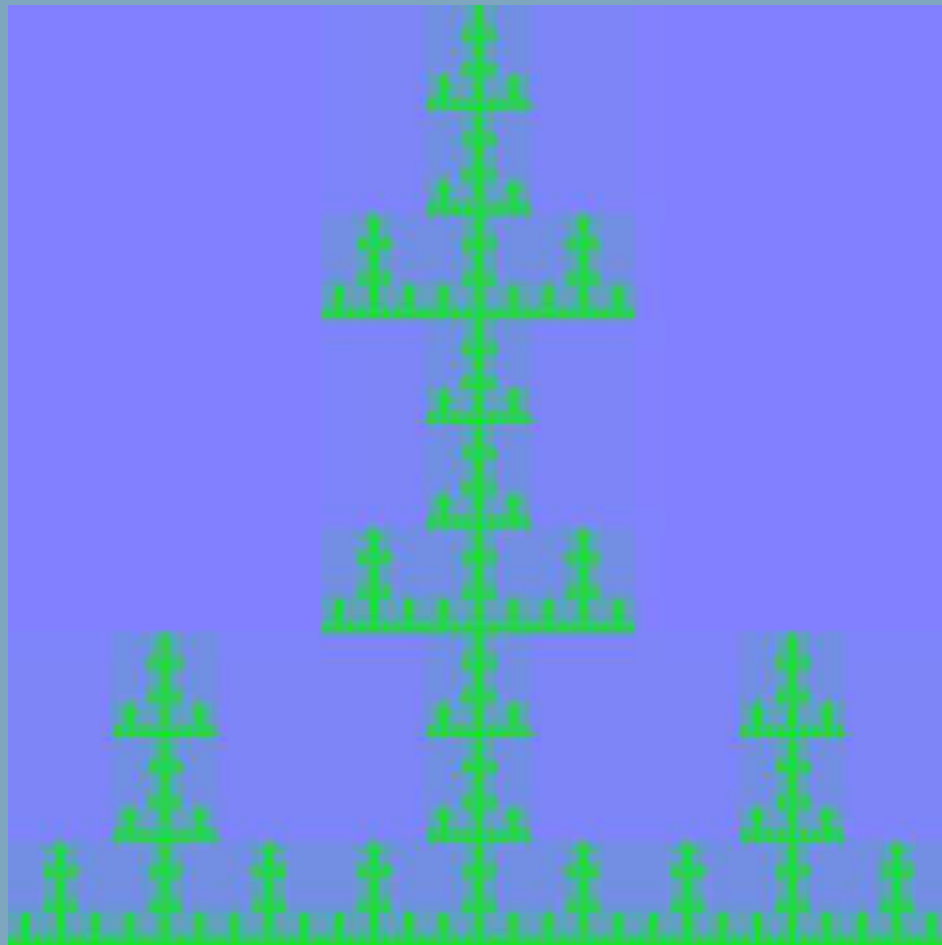
University of Helsinki

# Miksi matematiikka kiinnostaa?

- älyllinen haaste
- esteettinen elämys
- taloudellista hyötyä tuottavat sovellukset
- johdonmukaisen ajattelun kehittäminen

# Mitä matematiikka on?

- tiede, jossa uutta tietoa luodaan **perustelemalla** ja pääättelemällä
- **autonominen** tiede: synnyttää itse ongelmanasetteluja ja käsitteitä
- **sovelluksista** tuleville vaikutteille altis tiede
- käytännön työkalu
- viihdyttävää toimintaa
- kouluaine



# Ikuista matematiikkaa kouluissa

- *Antiikki*

- toisen asteen yhtälöt (Babylonia)

- geometria (Eukleides, Pythagoras, Ptolemaios)

# Ikuista matematiikkaa kouluissa

## ■ *Antiikki*

- toisen asteen yhtälöt (Babylonia)
- geometria (Eukleides, Pythagoras, Ptolemaios)

## ■ *1500-luku*

- 3. ja 4. asteen yhtälön ratkaisukaavat
- logaritmi

# Ikuista matematiikkaa kouluissa

## ■ *Antiikki*

- toisen asteen yhtälöt (Babylonia)
- geometria (Eukleides, Pythagoras, Ptolemaios)

## ■ *1500-luku*

- 3. ja 4. asteen yhtälön ratkaisukaavat
- logaritmi

## ■ *1600-luku*

- analyyttinen geometria (Descartes)
- Pascalin kolmio, binomikaava
- klassinen todennäköisyys
- derivaatta ja integraali (Newton & Leibniz)

# Ikuista matematiikkaa kouluissa

## ■ *Antiikki*

- toisen asteen yhtälöt (Babylonia)
- geometria (Eukleides, Pythagoras, Ptolemaios)

## ■ *1500-luku*

- 3. ja 4. asteen yhtälön ratkaisukaavat
- logaritmi

## ■ *1600-luku*

- analyyttinen geometria (Descartes)
- Pascalin kolmio, binomikaava
- klassinen todennäköisyys
- derivaatta ja integraali (Newton & Leibniz)

## ■ *Missä uudempi matematiikka?*

# Sovelluksia

## ■ Fysiikka

- fysikaaliset avaruudet → analyytinen geometria
- liikelait, sähköoppi → analyysi
- tilastollinen fysiikka → todennäköisyyslaskenta
- epätasaisesti jakautunut esiintymä → fraktaalit

# Sovelluksia

## ■ Fysiikka

- fysikaaliset avaruudet → analyttinen geometria
- liikelait, sähköoppi → analyysi
- tilastollinen fysiikka → todennäköisyyslaskenta
- epätasaisesti jakautunut esiintymä → fraktaalit

## ■ Perinnöllisyystiede → klassinen tn-laskenta

# Sovelluksia

## ■ Fysiikka

- fysikaaliset avaruudet → analyytinen geometria
- liikelait, sähköoppi → analyysi
- tilastollinen fysiikka → todennäköisyyslaskenta
- epätasaisesti jakautunut esiintymä → fraktaalit

## ■ Perinnöllisyystiede → klassinen tn-laskenta

## ■ Kansantaloustiede → satunnaisprosessit, peliteoria

# Sovelluksia

## ■ Fysiikka

- fysikaaliset avaruudet → analyttinen geometria
- liikelait, sähköoppi → analyysi
- tilastollinen fysiikka → todennäköisyyslaskenta
- epätasaisesti jakautunut esiintymä → fraktaalit

## ■ Perinnöllisyystiede → klassinen tn-laskenta

## ■ Kansantaloustiede → satunnaisprosessit, peliteoria

## ■ Bio- ja yhteiskuntatieteet → tilastollinen käsittely

# Sovelluksia

## ■ Fysiikka

- fysikaaliset avaruudet → analyttinen geometria
- liikelait, sähköoppi → analyysi
- tilastollinen fysiikka → todennäköisyyslaskenta
- epätasaisesti jakautunut esiintymä → fraktaalit

## ■ Perinnöllisyystiede → klassinen tn-laskenta

## ■ Kansantaloustiede → satunnaisprosessit, peliteoria

## ■ Bio- ja yhteiskuntatieteet → tilastollinen käsittely

## ■ Tietojenkäsittely

- tietorakenteet → diskreetti matematiikka
- ohjelmointikielet → logiikka
- salakirjoitus → lukuteoria
- kaikki ylläoleva!

# Laskeminen ja matematiikka

Tietotekniikka puskee rutiinitehtävien rajaa

- nelilaskin
- funktiolaskin
- ohjelmoitava laskin
- numeeriset ohjelmistot
- symbolinen laskenta

# Laskeminen ja matematiikka

Tietotekniikka puskee rutiinitehtävien rajaa

- nelilaskin
- funktiolaskin
- ohjelmoitava laskin
- numeeriset ohjelmistot
- symbolinen laskenta

Miten koulu voi vastata sovellusten haasteeseen?

Mitä tietotekniikan kehitys merkitsee opetukselle?

# Teesi

Matematiikan opetusta ei voi suunnitella yksittäisten sovellusten näkökulmasta. Oppilaiden tulisi olla käyttämiensä tietoteknisten välineiden herroja.

- oppiaines tulee valita niin, että se parhaiten edistää **matemaattisen ajattelun** kehittymistä
- opetuksessa entistä enemmän pitää korostaa asian **ymmärtämistä**
- matematiikka on **perustelemisen taitoa**
- matemaattisten väitteiden ja kaavojen **merkityssisällöt** paremmin esille

# Lukukäsite

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} (\subseteq \mathbb{C})$$

# Lukukäsite

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} (\subseteq \mathbb{C})$$

Lukion pitkän matematiikan aloituskurssiksi.  
Peruslaskutoimitukset? Alkeisalgebran suvereenia osaamista pitäisi harjoittaa luonnollisissa yhteyksissä

- geometria (pinta-alat, etäisyydet)
- lukumäärien kombinatoriikka

# Lukukäsite

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} (\subseteq \mathbb{C})$$

Lukion pitkän matematiikan aloituskurssiksi.  
Peruslaskutoimitukset? Alkeisalgebran suvereenia osaamista pitäisi harjoittaa luonnollisissa yhteyksissä

- geometria (pinta-alat, etäisyydet)
- lukumäärien kombinatoriikka
- funktiokäsite ei sovi tähän yhteyteen

# Merkityssisältöjä

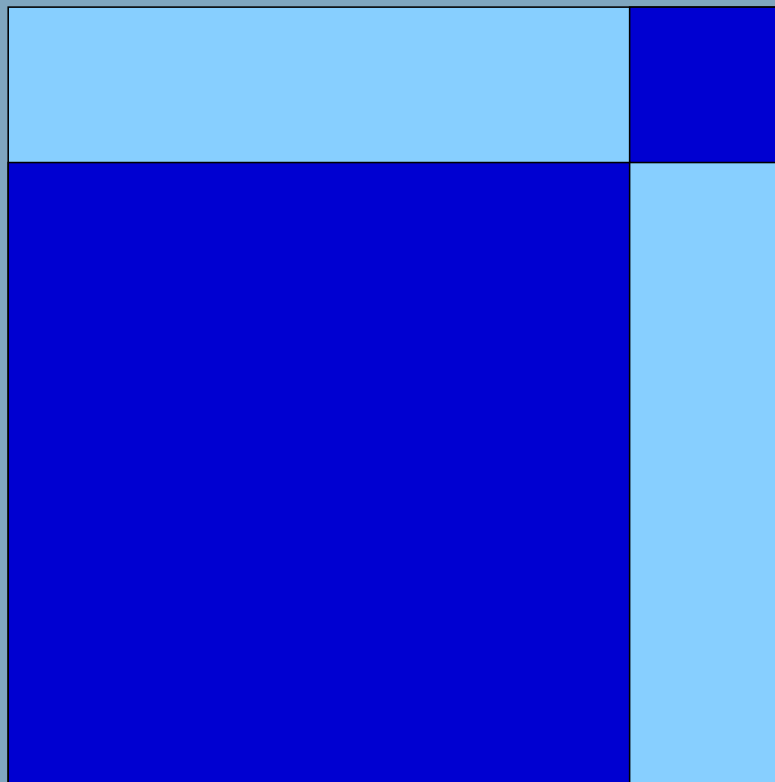
$$a^2 + b^2 < (a + b)^2, \text{ kun } a, b > 0$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

# Merkityssisältöjä

$$a^2 + b^2 < (a + b)^2, \text{ kun } a, b > 0$$

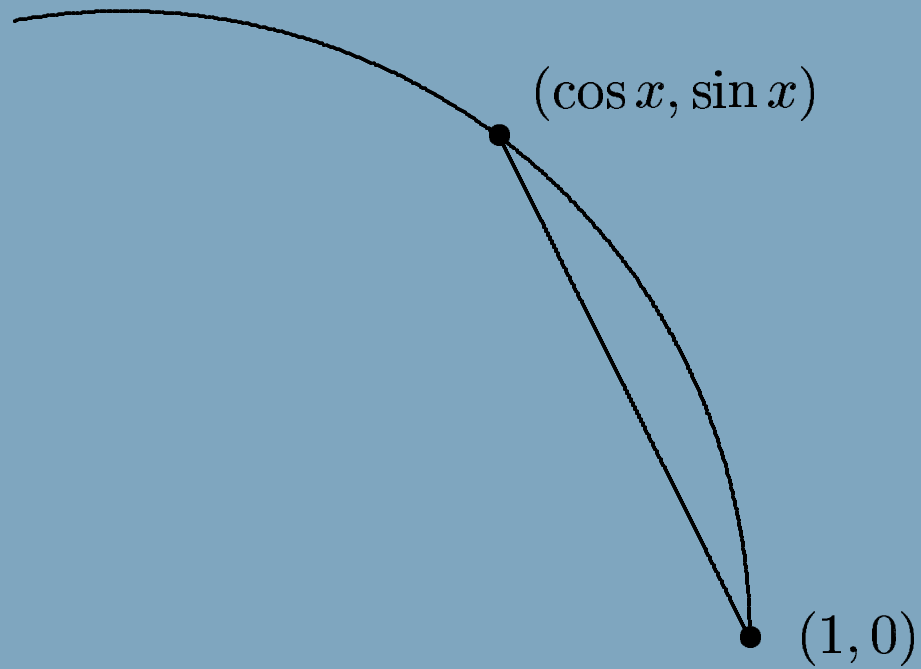
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



# Merkityssisältöjä II

$$\sqrt{(1 - \cos x)^2 + \sin^2 x} < x, \text{ kun } 0 < x < \pi/4$$

# Merkityssisältöjä II



$$\sqrt{(1 - \cos x)^2 + \sin^2 x} < x, \text{ kun } 0 < x < \pi/4$$

# Merkityssisältöjä III

$$\sum_{i=0}^n \binom{2n+1}{2i} = 4^n$$

# Merkityssisältöjä III

$$\sum_{i=0}^n \binom{2n+1}{2i} = 4^n$$

Jos  $|A| = 2n + 1$ , vasemmalla puolella joukon  $A$  parillista kokoa olevien joukkojen lukumäärä, oikealla puolella kaikista osajoukoista.

# Taso ja avaruus

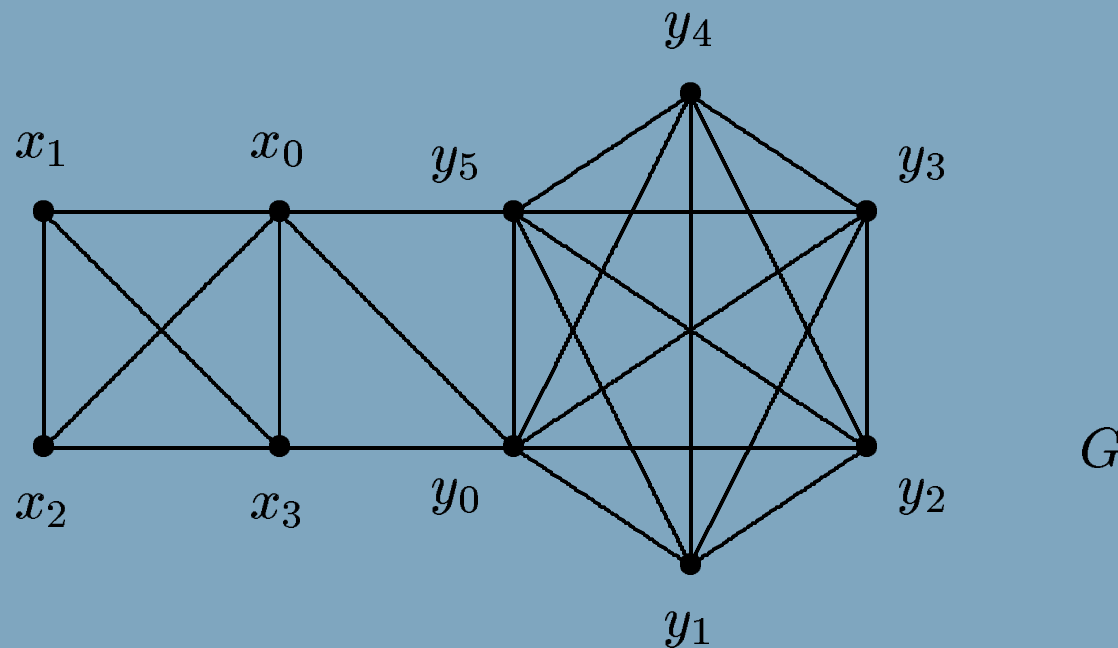
- nykyisen opetussuunnitelman selkeimpiä linjaratkaisuja, kolmiulotteiselle avaruudelle enemmän tilaa kuin ennen
- vaihtoehtoinen linjaus olisi pitäytyä tasossa ja rakentaa analyyttinen geometria kompleksilukujen varaan
- väliratkaisu (kolmiulotteista avaruutta käsitellään vain raapaisten) huonoin

# Todennäköisyyslaskenta

- merkitys sekä matemaattisen ajattelun että sovellusten kannalta suuri
- lukiokurssiin ahdettu liikaa
- kukin teemoista tilastot, klassinen todennäköisyys ja jatkuvat jakaumat voisi periaatteessa olla oma kurssinsa
- jatkon kannalta klassinen todennäköisyys riittänee  
**Kevennysehdotuksia:**
- tilastot erikoiskurssiksi
- lukumäärien kombinatoriikkaa peruslaskennan yhteydessä

# Diskreettiä matematiikkaa?

- käsitteellisesti helppoa
- kehittää päättelykykyä



# Kiitos!

Tehty  $\text{\LaTeX}$ :n Prosper-paketilla