

## Rayleigh testi

Oletetaan, että aika on pitkä suora viiva. Tapahtumia edustavat pisteet, jotka ovat viivalla tasavälisillä etäisyyksillä  $2\pi$ . Kelataan aika pyörälle, jonka läpimitta on  $d = 1$ . Tapahtumia edustavat pisteet päätyvät samaan paikkaan pyörän päälle. Kelataan aika takaisin suoraksi viivaksi ja poistetaan osa näistä tapahtumia edustavista pisteistä, jolloin tapahtumien väliin syntyy aukkoja. Jos aika kelataan taas takaisin pyörälle, pisteet päätyvät edelleen samaan paikkaan pyörän päälle. Mutta jos pyörän läpimitta on  $d \neq 1$ , pisteet eivät päädy samaan paikkaan, vaan ne leviävät satunnaisesti ympäri pyörän pintaa. Tämä on analogia Rayleigh:n testistä. Testissä projisoidaan aikapisteeet yksikköympyrälle käyttäen testattavan periodin arvoa  $P$ . Aikapisteet päätyvät samaan suuntaan yksikköympyrälle, jos niiden jakauma on säännöllinen testattavalla periodilla  $P$ .

Tämän tehtävän data on  $n = 528$  aikapistettä  $t_i$ , jotka ovat järjestyksessä  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ . Nämä aikapisteeet annettiin edellisen harjoituksen tiedostossa `H7binput.dat` seuraavassa muodossa

```
1.080 1.  
1.240 1.  
...
```

Ensimmäinen sarake sisälsi  $t_i$  arvot. Toisella sarakkeella ei ollut merkitystä. Ei ole järkevää esittää dataa muodossa 528 riviä & 1 sarake tässä `LATEX` dokumentissa `H8bvalmis.tex`. Edellisessä laskuharjoituksessa tehtiin `python` tai `octave` ohjelma, joka kirjoitti tämän tiedoston `H7binput.dat` toivottuun muotoon `H7bmodel.dat`. Tässä uudessa `H7bmodel.dat` tiedostossa 528 arvoa on jaettu 11 sarakkeeseen. Sarakkeiden väliin on lisätty `&` merkit ja rivien loppuun `\` merkit. Jos tiedoston `H7bmodel.dat` siirtää sopivaan `LATEX` ympäristöön `tabular`, näyttää tulos samalta kuin alla

1.08	31.26	65.09	97.47	128.28	156.09	190.26	239.08	274.36	314.07	346.38
1.24	31.43	65.27	98.09	128.47	156.27	190.43	239.23	277.07	314.22	347.38
1.40	32.09	65.46	98.28	132.09	156.46	191.09	239.38	277.22	314.36	348.08
2.08	32.26	66.09	98.47	132.28	157.09	191.26	242.08	277.36	320.07	348.23
2.24	32.43	66.27	99.09	132.47	157.27	191.43	242.23	278.07	320.22	348.38
3.08	33.26	66.46	99.28	134.09	157.46	192.09	242.38	278.22	320.37	350.08
3.24	35.09	69.09	99.47	134.28	158.09	192.26	245.08	278.36	323.07	350.23
4.08	35.26	69.28	100.09	134.47	158.27	192.43	245.23	279.07	323.22	350.39
4.24	35.43	69.46	100.28	135.09	158.46	197.08	245.38	279.22	323.37	351.08
4.40	37.09	70.09	100.47	135.28	160.09	197.25	246.08	279.36	324.07	351.23
5.40	37.26	70.28	102.09	135.47	160.27	197.42	246.23	281.07	324.37	351.39
6.08	37.43	70.46	102.28	137.09	160.45	202.08	246.38	281.22	325.07	353.08
6.24	38.09	75.09	102.47	137.28	161.09	202.25	248.07	281.36	325.22	353.23
6.40	38.26	75.28	103.09	137.47	161.27	202.42	248.23	282.07	325.37	353.39
7.08	38.43	75.46	103.28	140.09	161.45	207.08	248.38	282.22	328.07	354.08
7.24	39.09	80.09	103.47	140.28	163.27	207.25	255.07	282.36	328.22	354.23
8.08	39.26	80.28	105.09	140.47	163.45	207.41	255.22	283.07	328.37	354.39
8.24	39.44	80.47	105.28	141.09	166.09	208.08	255.37	283.22	329.07	355.08
8.41	40.09	83.09	105.47	141.28	166.27	208.25	256.07	283.36	329.22	355.39
9.08	40.26	83.28	110.47	141.47	166.45	208.41	256.22	285.07	329.37	357.08
9.24	40.44	83.47	111.09	142.09	168.09	209.08	256.37	285.21	331.07	357.24
9.41	42.09	84.09	111.28	142.28	171.09	209.25	257.07	285.36	331.22	357.39
12.08	42.26	84.28	111.47	142.47	171.27	209.41	257.22	290.36	331.37	358.08
14.08	42.44	84.47	112.09	143.09	171.44	211.08	257.37	292.07	333.37	358.24
17.08	43.09	85.09	112.28	143.28	172.09	211.25	258.07	292.21	334.07	358.39
17.25	43.26	85.28	115.09	143.47	172.27	211.41	258.22	292.36	334.22	359.08
17.41	43.44	85.47	115.28	144.09	172.44	213.08	258.37	293.07	334.37	359.24
18.08	44.09	86.09	115.47	144.28	174.09	213.24	261.07	293.21	337.07	359.39
18.25	45.09	86.28	116.09	144.47	174.26	213.41	261.22	293.36	337.23	
18.41	45.26	86.47	116.28	146.09	174.44	216.08	261.37	294.07	337.38	
20.08	45.44	87.09	119.09	146.28	177.09	216.24	262.07	294.21	338.07	
20.25	46.09	87.28	119.28	146.46	177.26	216.40	262.22	294.36	338.23	
20.42	46.27	87.47	119.47	147.09	177.44	217.08	262.37	297.07	338.38	
23.08	46.44	88.09	121.09	147.28	181.09	217.24	264.07	297.21	339.07	
23.25	48.09	88.28	121.28	147.46	181.26	217.40	264.22	297.36	339.23	
23.42	48.27	88.47	121.47	148.09	181.44	224.08	264.37	298.07	339.38	
24.08	48.44	89.09	122.09	148.28	183.09	224.24	265.07	298.21	341.08	
24.25	50.45	89.28	122.28	148.46	184.09	224.40	265.22	298.36	341.23	
26.09	57.09	89.47	122.47	149.09	184.26	225.08	265.37	299.07	341.38	
26.25	57.27	91.09	123.09	149.28	184.43	225.24	268.07	299.21	342.08	
26.42	57.45	91.28	123.28	149.46	185.09	225.40	268.22	299.36	342.23	
27.09	58.09	91.47	123.47	151.09	185.26	228.08	268.36	301.07	342.38	
27.25	58.27	93.09	124.09	151.28	185.43	228.24	269.07	301.21	343.08	
27.42	58.45	93.28	125.09	151.46	187.09	228.39	269.22	301.36	343.23	
28.25	59.09	93.47	125.28	153.09	187.26	237.08	269.36	303.07	343.38	
28.43	59.27	94.09	125.47	153.28	187.43	237.23	272.07	303.22	345.08	
29.09	59.45	94.28	127.09	153.46	188.09	237.38	272.22	303.36	345.23	
29.25	62.09	94.47	127.28	154.09	188.26	238.08	272.36	308.07	345.38	
29.43	62.27	97.09	127.47	154.28	188.43	238.23	274.07	308.22	346.08	
31.09	62.45	97.28	128.09	154.46	190.09	238.38	274.22	308.36	346.23	

Jos tiedosto `H7bmodel.dat` on samassa hakemistossa kuin tämä `LATEX` tiedosto `H8bvalmis.tex`, niin yllä näkyvä muoto voidaan tuoda `LATEX` dokumentin `H8bvalmis.tex` sisään riveillä

```
\begin{center}  
\begin{scriptsize}  
\begin{tabular}{rrrrrrrrrr}  
\input{H7bmodel.dat}  
\end{tabular}  
\end{scriptsize}  
\end{center}
```

Rayleigh testissä testattavaa periodia  $P$  vastaa frekvenssi  $f = 1/P$ . Testattavalla frekvensillä  $f$  lasketaan vaiheet

$$\phi_i = \text{FRAC}[(t_i - t_0)f],$$

missä  $t_0$  on nolla epookki ja  $\text{FRAC}[x]$  poistaa argumentin  $x$  kokonaislukuosan (Esim:  $\text{FRAC}[1.23] = 0.23$ ). Aikapisteet  $t_i$  projisoidaan yksikkövektoreille

$$\mathbf{r}_i = [\cos \Theta_i, \sin \Theta_i],$$

missä  $\Theta_i = 2\pi\phi_i$  ovat vaihekulmat. **Rayleigh:n testiparametri** on

$$z(f) = |\mathbf{R}|^2/n,$$

missä vektori  $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i$ . Jos kaikki yksikkövektorit  $\mathbf{r}_i$  ovat samansuuntaiset, toteutuu  $|\mathbf{R}| = n$  eli  $z = n$ . Jos niiden suunnat ovat satunnaiset, toteutuu  $|\mathbf{R}| \approx 0$  eli  $z \approx 0$ . Toinen käytetty muoto on

$$z(f) = (R_x^2 + R_y^2)/n,$$

missä  $R_x = \sum_{i=1}^n \cos \Theta_i$  and  $R_y = \sum_{i=1}^n \sin \Theta_i$ . Tästä saadaan muoto

$$z(f) = [(\sum_{i=1}^n \cos \Theta_i)^2 + (\sum_{i=1}^n \sin \Theta_i)^2]/n \quad (1)$$

Tässä työssä etsitään tiedoston **H7binput.dat** datalle  $t_i$  parasta periodia väliltä  $P_{\min} = 1.5$  ja  $P_{\max} = 90$ . Testattava frekvenssiväli on  $f_{\min} = 1/P_{\max} = 1/90 \approx 0.011$  ja  $f_{\max} = 1/P_{\min} = 1/1.5 \approx 0.667$ . Riippumattomien frekvenssien etäisyys on  $f_0 = 1/\Delta T$ , missä  $\Delta T = t_n - t_1$  eli koko datan ajallinen pituus. Testattavien frekvenssien välinen etäisyys on  $f_{\text{step}} = f_0/\text{OFAC}$ , missä sopiva arvo on  $\text{OFAC} = 10$  (engl. Overfilling Factor). Testattavia frekvenssejä on

$$M = \text{INT}[(f_{\max} - f_{\min})/f_{\text{step}}]$$

kappaletta, missä  $\text{INT}$  poistaa argumentin desimaaliosan (Esim:  $\text{INT}[1.23] = 1$ ). Testattavat frekvenssit ovat siis

$$f_j = f_{\min} + j f_{\text{step}},$$

missä  $j = 0, 1, 2, 3, \dots, M$ . Periodogrammi on

$$z(f_j) = [(\sum_{i=1}^n \cos \Theta_i)^2 + (\sum_{i=1}^n \sin \Theta_i)^2]/n,$$

missä  $\Theta_i = 2\pi\phi_i$  ja  $\phi_i = \text{FRAC}[(t_i - t_0)f_j]$ .

Periodogrammi lasketaan muodossa

$$z(f_j) = \{[\sum_{i=1}^n \cos 2\pi f_j(t_i - t_0)]^2 + [\sum_{i=1}^n \sin 2\pi f_j(t_i - t_0)]^2\}/n,$$

missä  $t_0 = 0$ . Rayleigh testin tulos ei riipu valitusta  $t_0$  arvosta, koska  $t_0$  arvon muuttuminen kiertää jokaista  $\mathbf{r}_i$  yksikkövektoria saman verran, joten niiden summavektorin pituus  $|\mathbf{R}|$  ei muutu.

Seuraavan sivun kuvassa on parhaimman periodin, s.o. korkeimman  $z(f_i = f_{\text{best}})$  piikin, sijainti arvon  $f_{\text{best}} = \mathbf{fbest}$  yläpuolella on merkitty sinisellä ympyrällä. Kuvassa on myös annettu aikapisteiden määrä  $n = 528$  ja parhaan periodin arvo  $P = 2.85 = 1/\mathbf{fbest}$ . Kuvan tiedosto **H9aPmalli.jpg** on kopioitu kurssin kotisivulta. Se on "tuotu sisään" tähän **L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X** dokumenttiin komennoilla

```
\clearpage
\begin{figure}[!t]
\includegraphics[width=18.0cm,height=12.0cm]{H9aPmalli.jpg}
\end{figure}
```

Seuraavan laskuharjoituksen 9a tehtävänä on laatia **python** tai **octave** ohjelma, joka tekee tälläisen kuvan.

