

Geometria

4. harjoitus

13.–15.2.2008

Vihjeitä joidenkin tehtävien ratkaisemiseksi löytyy tehtäväpaperin lopusta. Katso vihjettä vasta jollet onnistu ratkaisemaan tehtävää muuten!

Sanomme, että janat PQ ja RS ovat *melkein erilliset*, jos $PQ \cap RS = \{P, Q\} \cap \{R, S\}$. Nelikulmio $ABCD$ on sellainen yhdiste $AB \cup BC \cup CD \cup DA$, missä janat AB, BC, CD ja DA ovat pareittain melkein erilliset ja niiden päätepisteet A, B, C ja D ovat tason eri pisteitä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Janat AB, BC, CD ja DA ovat nelikulmion $ABCD$ *sivuja* ja janat AC ja BD ovat $ABCD$:n *halkaisijoita*.

Nelikulmio $ABCD$ on *suunnikas*, mikäli sivut AB ja CD ovat keskenään yhdensuuntaiset ja sivut BC ja DA ovat keskenään yhdensuuntaiset; mikäli vain toinen näistä sivupareista koostuu yhdensuuntaisista janoista, niin $ABCD$ on *puolisunnikas*.

- Osoita, että nelikulmio $ABCD$ on suunnikas jos ja vain jos sivut AB ja CD ovat samanpituiset ja sivut BC ja AD ovat samanpituiset.
- Janan AB piste P jakaa janan AB *kultaisessa leikkauksessa* (eli *jatkuvassa suhteessa*), mikäli joko AP on PB :n ja AB :n keskiwertto tai PB on AP :n ja AB :n keskiwertto (kts 2.harj. 1. teht.). *Kultainen luku* eli *kultainen suhde* on pidemmän ja lyhyemmän jakovälin (pituuksien) suhde kultaisessa leikkauksessa; tätä lukua merkitään symbolilla ϕ .
 - Määritä luvun ϕ tarkka arvo.
 - Kirjoita PostScript ohjelmanpätkä, joka antaa muuttujan *phi* arvoksi luvun ϕ likiarvon.
 - Jaa annettu jana harpin ja viivoittimen avulla kultaisessa leikkauksessa.
- ”Kultainen kolmio” on sellainen tasakylkinen kolmio, jonka yhtäsuurten sivujen välinen kulma on 36° .
 - Olkoon ABC sellainen kultainen kolmio, jolla kulma C on 36° ja olkoon P kulman B puolittajan ja sivun AC leikkauspiste. Näytä, että ABP on kultainen kolmio ja että kolmio BCP on tasakylkinen.
 - Näytä, että (a)-kohdan tilanteessa piste P jakaa sivun AC kultaisessa leikkauksessa.
- Piste P jakaa janan AB kultaisessa leikkauksessa. Konstruoi harpin ja viivoittimen (sekä pisteen P) avulla sellainen kultainen kolmio, jolla on jana AB yhtenä sivuna.
 - Konstruoi kultaisen kolmion avulla säännöllinen kymmenkulmio ja säännöllinen viisikulmio.

5. (a) Näytä, että jos jana on jaettu kultaisessa leikkauksessa ja jaon pidempi osa on edelleen jaettu kultaisessa leikkauksessa, niin jälkimmäisen jaon pidempi osa on saman pituinen kuin ensimmäisen jaon lyhyempi osa.

(b) Tarkastele seuraavaa PostScript ohjelmaa:

```

/fii ... def                                     % (tehtävästä 2(b))
100 400 translate
/kultasu{/s exch def /t s fii div def
0 0 moveto s 0 lineto s t lineto 0 t lineto 0 0 lineto    % "kultainen suorakaide"
t t translate
-90 rotate
1 fii div dup scale} def
400 kultasu stroke

```

Muokkaile ohjelmaa lisäämällä siihen viimeisen rivin kopioita 1,2,... kappaletta ja katso GSview'llä, mitä nämä ohjelmat saavat aikaan. Selitä ohjelmien toimintaa.

Muista seuraavan tehtävän yhteydessä ohjelmointiperiaatteet:

-Lokalisoi käyttämäsi muuttujat
 -Älä piirrä tai maalaa kuvioita näkyviin aliohjelmissa

6. (a) Kirjoita PostScript-aliohjelma *kolmio*, jolle annetaan parametreina luvut a, b, c, d, e, f ja joka muodostaa kuviopolun ("path") pisteiden (a, b) , (c, d) ja (e, f) yhdysjanoista.

(b) Kirjoita PostScript-aliohjelma *kesjanat*, jolle annetaan parametreina luvut a, b, c, d, e, f ja joka muodostaa kuviopolun, joka koostuu pisteiden (a, b) , (c, d) ja (e, f) määrittämän kolmion keskijanoista eli mediaaneista.

(c) Testaa aliohjelmiäsi ohjelmalla, jossa on niiden määrittelyn lisäksi seuraavat rivit:

```

250 250 350 800 600 500 kolmio stroke
250 250 350 800 600 500 kesjanat 1 0 0 setrgbcolor stroke

```

(d) Vaihtelee testiohjelman lukukuusikoita ja pohdi mediaanien käyttäytymistä.

[*Vihje tehtävään 1:* Muista, että suorat ℓ ja ℓ' ovat yhdensuuntaiset joss vastinkulmat, jotka syntyvät kun suora t leikkaa suoria ℓ ja ℓ' , ovat yhtäsuuret.]

[*Ohje tehtävään 2(c):* Konstruoi suorakulmaisen kolmion avulla jana, jonka pituus on $\sqrt{5}$ kertaa annetun janan pituus.]

[*Ohjeita tehtävään 4(a):* Piirrä P -keskinen ympyrä säteenä jaon pitempi osa; piirrä lyhyemmälle jakovälille keskinormaali.]

[*Muistutus tehtävään 6(b):* Keskijana yhdistää kolmion kärjen sen vastaisen sivun keskipisteeseen. Muista myös, että pisteiden (x, y) ja (z, u) yhdysjanan keskipiste on $(\frac{x+z}{2}, \frac{y+u}{2})$.]