

Fysiikan matemaattiset menetelmät II

Christofer Cronström

Fysikaalisten tieteiden laitos, teoreettisen fysiikan osasto
Helsingin yliopisto

9. tammikuuta 2006

Esipuhe

Tämä teos perustuu useana vuonna Helsingin yliopiston fysikaalisten tieteiden laitoksen teorettisen fysiikan osastolla pitämiini luentoihin Fysiikan matemaattiset menetelmät II. Kirja on kuitenkin näiden luentojen laajennettu ja täydennetty kokonaisuus, joka soveltuu myös itseopiskeluun.

Kirjassa on seitsemän lukua, joista ensimmäinen on suurelta osin Fourier'n integraalien kertausta. Fourier'n integraalien avulla tässä luvussa esitetään Poissonin yhtälön, diffuusioyhtälön ja aaltoyhtälön ratkaisut. Toinen luku käsittelee edellistä yleisemmin lineaarisia osittaisdifferentiaaliyhtälöitä, niiden luokittelua sekä esimerkkejä muuttujien erotteluun perustuvasta ratkaisumenetelmästä erilaisin reunaehdoin. Kolmas luku sisältää toisen kertaluvun yhden muuttujan lineaaristen differentiaaliyhtälöiden sarjaratkaisumenetelmän. Menetelmää sovelletaan neljännessä luvussa erikoisfunktioiden, erityisesti Besselin funktioiden sekä Hermiten, Laguerren ja Legendren polynomien ja funktioiden konstruoimiseen. Laajahkon neljännen luvun tarkoitus on olla enemmän kuin pelkkä luettelo mainittujen erikoisfunktioiden ominaisuuksista. Esitetyt menetelmät ovat suurelta osin analyyttisten funktioiden teorian sovelluksia, minkä tuntemus on yleensäkin hyödyllistä.

Luvussa viisi käsitellään variaatiolaskua laajemmin kuin fyysikoille suuntautuvissa matemaattisten menetelmien kirjoissa on tapana. Luvun viimeinen alaluku, jossa analysoidaan variaatio-ongelmia sidosehtojen vallitessa, alkaa yleistason esityksellä ilman sidos- ja reunaehtojen seikkaperäisiä yhteensopivuustarkasteluja jotka olisivat vieneet suhteettoman paljon tilaa. Luku päättyy klassisen mekaniikan variaatioperiaatteiden analyysiin sekä holonomisten että ei-holonomisten sidosehtojen tapauksessa. Tämä analyysi on relevantti myös sellaisten kvanttimekaanisten systeemien tapauksissa, joissa on sidosehtoja. Luvussa kuusi on lyhyt esitys Sturmin ja Liouvillen teoriasta, joka käsittelee tietyntyyppisten differentiaaliyhtälöiden ominaisarvo-ongelmaa. Tässä johtavana metodina on erityisesti Rayleigh'n-Ritzin variaatioperiaatteen sovellus k. o. differentiaaliyhtälöihin reunaehtoineen. Viimeinen eli seitsemäs luku on johdatus niihin Hilbertin avaruuden käsitteisiin ja menetelmiin, jotka ovat tarpeen erityisesti kvanttimekaniikan kannalta. Luku päättyy Hilbertin avaruuden lineaaristen rajoitettujen operaattorien, erityisesti kompaktien ja hermiittisten operaattorien teoriaan, joka on tärkeä myös muiden sovellusten kuin kvanttimekaniikan kannalta.

Sellaisenaan tämä teos lienee hieman liian laaja yhden lukukauden neljän viikkoluentotunnin mittaiseksi kurssiksi. Tiettyjen alalukujen otsikot on merkitty tähdellä *. Ainakin nämä alaluvut voidaan tarvittaessa jättää vähemmälle huomiolle, ilman että kokonaisuuden omaksuminen sanottavasti kärsii.

Matemaattisia menetelmiä opitaan laskemalla, ei vain lukemalla. Tämäkin kirja on tarkoitettu luettavaksi kynän ja paperin kanssa niin, että aina tarvittaessa voi tarkistaa päättelyt kaavasta toiseen. Mahdollisten painovirheidenkin takia tämä on suotavaa. Tässä teoksessa on 2428 numeroitua kaavaa. Vaikka olen pyrkinyt tarkkuuteen, on mahdollista, että painovirheitä sittenkin on jäänyt korjaamatta. Otan mielihyvin vastaan korjausehdotuksia.

Fil. yo. Jussi Lehtola on ystävällisesti ja tarmokkaasti tarkistanut ja korjannut käsikirjoituksen kieliäsen ja on tehnyt muitakin parannusehdotuksia sekä auttanut kuvien piirtämisessä ja joidenkin LaTeX-ongelmien selvittämisessä. Lausun hänelle parhaimmat kiitokseni. Dos. Mikko Sainio on lukenut koko käsikirjoituksen ja kiitän häntä rakentavista ja kannustavista kommentteista. Dos. Claus Montonen on myös lukenut suuria osia tekstistä ja tehnyt parannusehdotuksia, joista olen kiitollinen.

Tampereella 18.12.2005

Christofer Cronström

Sisällys

1	Fourier'n integraaleista	1
1.1	Fourier'n muunnos, kertausta	1
1.1.1	Cauchyn ja Weierstrassin singulaariset integraalit . . .	2
1.1.2	Laplace-muunnos	5
1.1.3	Mellin-muunnos	6
1.2	*Eulerin Γ - ja B -funktiot	6
1.3	Sovelluksia osittaisdifferentiaaliyhtälöihin	15
1.3.1	Poissonin yhtälö \mathbb{R}^3 :ssa	15
1.3.2	Diffuusioyhtälö	17
1.3.3	*Aaltoyhtälö, Kirchhoffin kaava	19
2	Osittaisdifferentiaaliyhtälöistä	29
2.1	Differentiaaliyhtälöiden luokittelusta	32
2.2	Reuna-arvo-ongelmista	36
2.2.1	Poissonin yhtälön reuna-arvoprobleema	36
2.3	Muuttujien erottelu	40
2.3.1	Laplacen yhtälö suorakulmaisessa \mathbb{R}^3 :ssa	40
2.3.2	Dirichlet'n ongelma suorakaiteessa	42
2.3.3	*Separoituvat koordinaatistot \mathbb{R}^3 :ssa	45

2.3.4	Oikein asetetut ongelmat	50
2.3.5	Laplacen yhtälö pallokoordinaateissa	54
2.3.6	*Palloharmoniset funktiot Y_{lm}	57
2.4	Schrödingerin yhtälö	67
2.4.1	Pallosymmetrinen Schrödingerin yhtälö	72
3	Yhden muuttujan differentiaaliyhtälöt	77
3.1	Toisen kertaluvun lineaariset yhtälöt	77
3.1.1	Lineaaristen yhtälöiden yleisistä ominaisuuksista . . .	77
3.1.2	Erikoispisteet ja niiden luokittelu	81
3.1.3	Hypergeometrinen yhtälö	83
3.2	Yleinen sarjaratkaisumenetelmä	87
3.2.1	Ratkaisut kun $s \equiv r_1 - r_2 \neq 0, 1, 2, \dots$	90
3.2.2	Toinen ratkaisu kun $s \equiv r_1 - r_2 = 0, 1, 2, \dots$	92
3.2.3	Ratkaisut säännöllisen pisteen ympäristössä	95
3.3	*Asymptoottisista ratkaisuista	96
3.4	*Sarjaratkaisujen suppenemisesta	100
4	Fysiikan tavallisimmat erikoisfunktiot	105
4.1	Legendren funktiot	105
4.1.1	Legendren funktiot $P_\lambda(z)$ ja $Q_\lambda(z)$	105
4.1.2	Legendren polynomit $P_\ell(z)$	110
4.1.3	Polynomien $P_\ell(x)$ ortonormitusrelaatiot	112
4.1.4	Sarjakehitelmistä $\sum a_\ell P_\ell(z)$	114
4.1.5	Polynomien $P_\ell(z)$:n muodostajafunktio	117
4.1.6	Legendren liittofunktiot $P_\ell^m(x)$	122
4.1.7	*Laplacen integraaliesitykset funktioille $P_\ell^m(x)$	127

4.1.8	*Legendren polynomien yhteenlaskuväittäjä	130
4.2	Besselin funktiot	134
4.2.1	Muuttujien separointi sylinterikoordinaatistossa	134
4.2.2	Besselin funktiot $J_{\pm\nu}(z)$ origon $z = 0$ ympäristössä	135
4.2.3	Weberin ja Hankelin funktiot Y_ν ja $H_\nu^{1,2}$	139
4.2.4	Besselin funktioiden palautuskaavat	141
4.2.5	Funktioiden $J_n(z)$ muodostajafunktio	143
4.2.6	Poissonin integraaliesitys $J_\nu(z)$:lle	145
4.2.7	Funktiot $J_{\pm(n+\frac{1}{2})}(z)$	147
4.2.8	Tasoaallon pallo-aaltokehiteelmä	151
4.2.9	*Asymptoottisista kehitelmistä	154
4.3	Laguerren polynomit ja Coulombin ongelma	159
4.3.1	Vetyatomin Schrödingerin yhtälö	159
4.3.2	Vety-atomin diskreetti energiaspektri	163
4.3.3	Laguerren yhtälöiden polynomiratkaisut	166
4.3.4	Laguerren polynomien ortonormitus	168
4.3.5	Laguerren polynomien muodostajafunktio	170
4.3.6	*Laguerren liittopolynomien muodostajafunktio	172
4.3.7	*Vetyatomin radiaalinen normitusintegraali	175
4.4	Hermiten polynomit ja harmoninen värähtelijä	177
4.4.1	Kvanttimekaaninen harmoninen värähtelijä	177
4.4.2	Hermiten polynomit $H_n(z)$	182
4.4.3	Muodostajafunktio polynomeille $H_n(z)$	184
4.4.4	Palautuskaavat $H_n(z)$:lle	187
4.4.5	Polynomien $H_n(z)$ normitusintegraali	188
4.4.6	*Harmonisen värähtelijän operaattorialgebra	189

5	Variaatiolaskua	195
5.1	Johdanto, brachistochronongelma	195
5.2	Funktionaalit ja niiden ääriarvo-ongelmat	199
5.3	Variaatiolaskun perusongelma	201
5.3.1	Eulerin yhtälö	202
5.3.2	Maksimi- ja minimitarkasteluja.	207
5.3.3	Legendren ehdot ääriarvoille	208
5.3.4	Brachistochronongelman ratkaisu	212
5.3.5	Minimipinnan ongelman ratkaisu	214
5.4	Perusongelma n :lle muuttujalle	219
5.4.1	Maksimi- ja minimitarkastelu. Legendren lause	221
5.5	Perusongelman yleistyksiä	223
5.5.1	Funktionaalit, jotka riippuvat korkeimmista derivatoista	223
5.5.2	Useammat riippuvaiset muuttujat	225
5.5.3	Rayleigh'n-Ritzin variaatioperiaate	226
5.5.4	Homogeeninen integraaliyhtälö	228
5.6	Isoperimetriset ongelmat, Eulerin lause	233
5.6.1	Sovelluksia	238
5.7	Eulerin-Lagrangen kertojasääntö	243
5.7.1	Holonomisia sidosehtoja	244
5.7.2	*Ei-holonomisia sidosehtoja	248
5.7.3	*D'Alembert'n ja Hamiltonin periaatteet	251
5.7.4	*Sidosehdot ja D'Alembert'n periaate	255
5.7.5	*Ei-holonomisen systeemin liikeyhtälöt	260

6	Sturmin ja Liouvilien teoria	265
6.1	Johdanto	265
6.1.1	Lisää reunaehdoista	267
6.2	Erikoisfunktiot ja Sturm-Liouville- yhtälöt	268
6.3	Variaatioperiaatteet	270
6.4	Ominaisarvoratkaisuista $u(x, \lambda)$	275
6.4.1	Ominaisarvoratkaisujen olemassaolo	276
6.4.2	Ominaisarvojen asymptoottinen jakauma	281
6.5	Ominaisarvoratkaisujen täydellisyydestä	288
6.5.1	*Ortogonaalikehitelmistä funktioluokassa L^2_{wr}	293
7	Hilbertin avaruuksista	305
7.1	Johdanto	305
7.2	Lineaariset vektoriavaruuudet	306
7.3	Sisätuloavaruus, normi ja metrisointi	308
7.3.1	Cauchyn-Schwarzin-Bunjakovskin epäyhtälö	310
7.3.2	Hilbertin vektoriavaruus ℓ_2	312
7.3.3	Suppeneminen ℓ_2 :ssa	314
7.4	Normiavaruus	317
7.4.1	*Sisätulon olemassaolo normiavaruudessa	318
7.5	Hilbertin funktioavaruus L^2	323
7.5.1	Suppeneminen funktioavaruudessa L^2	324
7.5.2	Hilbertin ja Banachin avaruudet	326
7.5.3	Separoituva Hilbertin avaruus	328
7.5.4	Kuvaus L^2 :n ja ℓ_2 :n välillä	332

7.6	Kuvaukset normi- ja Hilbertin avaruudessa	335
7.6.1	Lineaariset rajoitetut funktionaalit	335
7.6.2	Lineaarisista operaattoreista	338
7.6.3	Käänteisoperaattori Banachin avaruudessa	343
7.6.4	Adjungoitu operaattori Hilbertin avaruudessa	348
7.6.5	Hermiittiset ja unitaariset operaattorit	351
7.6.6	Lineaarioperaattorin spektri	356
7.7	Kompaktit operaattorit	358
7.7.1	Määritelmä, perusominaisuudet	358
7.7.2	Kompaktit operaattorit ja funktionaaliyhtälöt	367
7.7.3	Hilbertin-Schmidtin operaattorit	371
7.7.4	Hilbertin-Schmidtin integraalioperaattorit	374
7.8	Kompaktit hermiittiset operaattorit	378
7.8.1	Ominaisarvo-ongelma	378
7.8.2	Spektraalilause	382