

Deskriptiivistä joukko-oppia universumissa \mathcal{N}_1

Aapo Halko

Huhtikuu 25, 1991

Sisällys

1	Johdanto	2
2	Peruskäsitteitä	3
2.1	Topologiset perusasiat	3
2.2	Puista ja peleistä	6
3	Borel*-joukot	11
3.1	Borel*-joukon määritelmä ja perusominaisuuksia	11
3.2	Joitakin Borel*-joukkoja	16
4	Vaughtin joukot	19
4.1	Vaughtin joukon määritelmä	19
4.2	Approksimaatiot	23
4.3	Esihyvinjärjestys avoimille Vaughtin joukoille	25
5	Projektiiviset joukot	30
6	Avoimia ongelmia	33

1 Johdanto

Deskriptiivinen joukko-oppi tutkii määriteltävien joukkojen, lähinnä reaalilukujoukkojen, ominaisuuksia. Monet yleisille joukoille vaikeat kysymykset, esimerkiksi kontinuumihypoteesi tai determinoituvuus, ovat riippumattomia joukko-opin aksiomeista. Kun oletetaan, että tarkasteltava joukko on määriteltävä, kuten Borel-joukko, niin kysymykset voidaan ratkaista mahdollisesti joidenkin lisäoletusten avulla. Esimerkkinä tällaisesta ilmiöstä on determinoituvuus. Valinta-aksiomasta seuraa, että on olemassa ei-determinoitu joukko. Vuonna 1970 D.A. Martin [8] todisti, että kaikki analyttiset joukot ovat determinoituja, jos oletetaan mitallinen kardinaali, ja vuonna 1975 [9], että Borel-joukot ovat determinoituja.

Reaalilukujoukko A on Borel, jos se kuuluu pienimpään luokkaan, joka sisältää avoimet ja suljetut joukot sekä on suljettu numeroituvan yhdisteen ja leikkauksen suhteen. Blackwell [1] esitti seuraavan karakterisoinnin Borel-joukolle. Otetaan sellainen joukko $U \subseteq \omega^{<\omega}$, jossa jokaisella $b \in \omega^\omega$ on täsmälleen yksi rajoittuma joukossa U . Liitetään jokaiseen joukon U alkioon s avoin tai suljettu joukko $L(s)$. Pelataan peli $G(x, U, L)$, jossa pelaajat \forall ja \exists valitsevat vuorotellen luonnollisia lukuja, kunnes valittujen lukujen jono s on joukossa U . Pelin voittaa pelaaja \exists , jos tällöin $x \in L(s)$. Joukko

$$A = \{x \mid \text{pelaajalla } \exists \text{ voittostrategia pelissä } G(x, U, L)\}$$

on Borel-joukko ja kääntäen jokainen Borel-joukko voidaan esittää tässä muodossa.

Reaalilukujen asemesta deskriptiivisessä joukko-opissa usein tutkitaan irrationaalilukujen kanssa homeomorfista Bairen avaruutta $\mathcal{N} = \omega^\omega$. Tutkimuksen tarkoitus on tarkastella Bairen avaruuden \mathcal{N} yleistystä $\mathcal{N}_1 = \omega_1^{\omega_1}$, jossa pisteen $f \in \mathcal{N}_1$ avoimen ympäristökannan muodostavat joukot

$$U(f, \alpha) = \{g \in \mathcal{N}_1 \mid g(\beta) = f(\beta) \text{ kaikilla } \beta < \alpha\} \quad \alpha < \omega_1.$$

Avaruutta \mathcal{N}_1 tutkittaessa oletetaan kontinuumihypoteesi, koska tällöin $|\omega_1^{<\omega_1}| = \omega_1$.

Blackwellin Borel-joukon karakterisointi on suoraan yleistettävissä avaruuteen \mathcal{N}_1 . Valitaan puu $T \subseteq \omega_1^{\omega_1}$, jossa ei ole ylinumeroituvia oksia ja liitetään puun T jokaiseen oksaan b avoin tai suljettu joukko $L(b)$. Pelataan mahdollisesti ääretön peli $G(f, T, L)$, missä pelaajat \forall ja \exists pelaavat ylöspäin puuta T , kunnes heidän valintansa muodostavat oksan b . Tällöin pelaaja \exists voittaa, jos $f \in L(b)$. Koska ylläoleva peli ei ole välttämättä determinoitu, niin peli määrittelee luonnollisella tavalla kaksi eri Borel-joukon yleistystä

$$\begin{aligned} A^* &= \{f \in \mathcal{N}_1 \mid \text{pelaajalla } \exists \text{ voittostrategia pelissä } G(f, T, L)\} \text{ ja} \\ A' &= \{f \in \mathcal{N}_1 \mid \text{pelaajalla } \forall \text{ ei ole voittostrategiaa pelissä } G(f, T, L)\}. \end{aligned}$$

Kutsutaan joukkoa A^* tason T Borel*-joukoksi ja joukkoa A' vastaavasti Borel'-joukoksi. Koska \mathcal{N}_1 on Borel*-joukko, niin tarkastellaan lähinnä Borel*-joukkoja.

Borel*-joukkojen tutkimus käyttää hyväkseen puiden tutkimusta. Luvussa 2 on tutkittu puiden teoriaa kuten puiden kokoa ja järjestämistä sekä puiden laskutoimituksia.

Luvussa 3 määritellään Borel*- ja Borel'-joukot ja todistetaan näiden perusominaisuudet. Lisäksi esitetään esimerkkejä Borel*-joukoista.

Luvussa 4 tarkastellaan tiettyjä alhaisimman ei-hyvinperustetun tason $\omega^{<\omega}$ Borel*-joukkoja ns. Vaughtin joukkoja. Ne ovat joukkoja, joiden määrittelevä peli on determinoitu. Vaughtin joukkojen avulla voidaan todistaa, että on olemassa Borel*-joukko, joka ei ole Borel* millään hyvinperustetulla T . Tämä tulos osoittaa, että Borel*-joukon määritelmä on mielekäs. Lisäksi Vaughtin joukoille todistetaan muita säännöllisyystuloksia.

Analyyttinen joukko on suljetun joukon projektio. Viimeisessä luvussa todistetaan Suslinin lauseen vastine avaruudessa \mathcal{N}_1 : Jos joukko A on analyyttinen ja sen komplementti on analyyttinen, niin silloin A on sellainen Borel*-joukko, jonka määrittelevä peli on determinoitu.

Kiitän erityisesti ohjaajaani Jouko Väänästä, mutta myös koko Malliteoreettiset kielet -projektin jäseniä. Kiitän myös Antti ja Jenny Wihurin rahastoa työni taloudellisesta tukemisesta ja Jaakko Hintikkaa, joka otti minut projektiinsa.

2 Peruskäsitteitä

2.1 Topologiset perusasiat

Perusavaruudet ovat ω_1 , $\mathcal{N}_1 = \omega_1^{\omega_1}$ ja $\mathcal{C}_1 = 2^{\omega_1}$. Tässä työssä tutkitaan avaruuksia, jotka ovat muotoa

$$\mathcal{N}_1^{\gamma_1} \times \mathcal{C}_1^{\gamma_2} \times \omega_1^{\gamma_3}, \text{ missä } \gamma_i < \omega_1.$$

Merkitään näitä avaruuksia symboleilla \mathcal{X} , \mathcal{Y} jne. Kun $f = (f_{\xi_1}, g_{\xi_2}, \delta_{\xi_3})_{(\xi_i < \gamma_i)} \in \mathcal{X}$, niin merkitään $f(\alpha) = (f_{\xi_1}(\alpha), g_{\xi_2}(\alpha), \delta_{\xi_3}(\alpha))_{(\xi_i < \gamma_i)}$ ja $\bar{f}(\alpha) = f \cdot \alpha = \langle f(\beta) \rangle_{\beta < \alpha}$. Kun \mathcal{X} on avaruus, niin olkoon $\text{Seq}_{\mathcal{X}} = \{\bar{f}(\alpha) \mid f \in \mathcal{X}, \alpha < \omega_1\}$. Kutsutaan joukon $\text{Seq}_{\mathcal{X}}$ alkioita \mathcal{X} -*jonoiksi* tai vain *jonoiksi*. Merkitään jonoja symboleilla s, t, \dots . Symbolilla $\ell(s)$ merkitään jonon s *pituutta*. Kun s ja t ovat jonoja, niin merkitään $s \leq t$, kun $t \ell(s) = s$ ja $s < t$, kun $s \leq t$ ja $s \neq t$. Kun s ja t ovat jonoja, niin näiden *katenaatio*, $s \hat{\cdot} t$, on jono r , jolle $\text{dom}(r) = \text{dom}(s) + \text{dom}(t)$, $r \upharpoonright \text{dom}(s) = s$ ja $r(\text{dom}(s) + \xi) = t(\xi)$, kun $\xi \in \text{dom}(t)$.

Lemma 2.1 *Kun oletetaan kontinuumihypoteesi, niin $|\omega_1^{<\omega_1}| = \omega_1$.*

TODISTUS. Kun $\gamma < \omega_1$, niin

$$|\omega_1^\gamma| = |(2^\omega)^\gamma| = |2^{\omega \times \gamma}| = 2^\omega = \omega_1.$$

Täten $|\omega_1^{<\omega_1}| = \omega_1 + \sup_{\gamma < \omega_1} |\omega_1^\gamma| = \omega_1$. \square

Huomautus 2.2 Tässä työssä oletetaan kontinuumihypoteesi.

Avaruudet \mathcal{X} varustetaan topologialla, jossa pisteen $f \in \mathcal{X}$ avoimen ympäristökannan muodostavat joukot

$$U(f, \alpha) = \{g \in \mathcal{X} \mid \bar{g}(\alpha) = \bar{f}(\alpha)\}, \alpha < \omega_1.$$

Nämä joukot ovat selvästi avoimia ja suljettuja. Kun $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, niin topologia on diskreetti. Avaruus \mathcal{X} ei tietenkään ole separoituva, mutta on olemassa tiheä joukko $\mathcal{Q}_{\mathcal{X}} \subseteq \mathcal{X}$, jonka mahtavuus on ω_1 :

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{X}} = \{f \in \mathcal{X} \mid \exists \alpha \forall \beta \geq \alpha [f(\beta) = 0]\}.$$

Olkoon

$$\sigma : \omega_1^{<\omega_1} \rightarrow \omega_1.$$

bijektio. Funktio σ on kiinteä koko esityksen ajan. Kun $\alpha = \sigma(\bar{f}(\beta))$, niin merkitään myös $N_\alpha = U(f, \beta)$. Mahtavuutta ω_1 oleva avaruuden \mathcal{X} kanta on

$$\{U(f, \alpha) \mid f \in \mathcal{Q}_{\mathcal{X}}, \alpha < \omega_1\} = \{N_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}.$$

Kantajoukon N_α säde, $\text{rad}(N_\alpha)$, on $\min \{\delta < \omega_1 \mid U(f, \delta) \subseteq N_\alpha \text{ jollakin } f\}$.

Olkoon Γ kokoelma avaruuksien \mathcal{X} osajoukkoja. Kun γ on ordinaali, niin Ψ on γ -paikkainen operaatio luokalla Γ , jos seuraava ehto on voimassa:

$\Psi(\langle A_\xi \rangle)$ on määritelty, jos $A_\xi \in \Gamma$, $\xi < \gamma$, ovat saman avaruuden \mathcal{X} osajoukkoja. Merkitään tällöin

$$\Gamma^- \mathcal{X} = \{A \in \Gamma \mid A \subseteq \mathcal{X}\} \text{ ja } \Psi\Gamma = \{\Psi(\langle A_\xi \rangle) \mid A_\xi \in \Gamma^- \mathcal{X} \text{ jollakin } \mathcal{X}\}.$$

Esimerkki 2.3 i) Operaatiot \cup_{ω_1} ja \cap_{ω_1} ovat ω_1 -paikkaisia ja kun A_ξ , $\xi < \omega_1$, ovat avaruuden \mathcal{X} osajoukkoja, niin

$$\begin{aligned} \cup_{\omega_1}(\langle A_\xi \rangle_{\xi < \omega_1}) &= \cup_{\xi < \omega_1} A_\xi \\ \cap_{\omega_1}(\langle A_\xi \rangle_{\xi < \omega_1}) &= \cap_{\xi < \omega_1} A_\xi \end{aligned}$$

ii) Operaatio \neg on yksipaikkainen ja jos $A \subseteq \mathcal{X}$, niin $\neg(A) = \mathcal{X} \setminus A$.

iii) Operaatiot $\exists^{\mathcal{Y}}$ ja $\forall^{\mathcal{Y}}$ ovat yksipaikkaisia ja jos $A \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, niin

$$\exists^{\mathcal{Y}} A = \{f \in \mathcal{X} \mid \exists g \in \mathcal{Y} [(f, g) \in A]\} \text{ ja } \forall^{\mathcal{Y}} A = \{f \in \mathcal{X} \mid \forall g \in \mathcal{Y} [(f, g) \in A]\}$$

Merkitään $\exists^{\mathcal{N}_1} = \exists$ ja $\forall^{\mathcal{N}_1} = \forall$.

Luokka Γ on *suljettu operaation* Ψ suhteen, jos $\Psi\Gamma \subseteq \Gamma$. Merkitään $\Delta = \Gamma \cap \neg\Gamma$.

Kun $A \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$, niin merkitään $A(f, \cdot, h) = \{g \in \mathcal{Y} \mid (f, g, h) \in A\}$. Merkinnät $g \in A(f)$ ja $A(f, g)$ tarkoittavat samaa kuin $(f, g) \in A$.

Määritelmä 2.4 i) Relaatio $U \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ on \mathcal{Y} -universaalinen joukkoluokalle $\Gamma^- \mathcal{X}$, jos $U \in \Gamma$ ja jokaiselle $B \in \Gamma^- \mathcal{X}$ on olemassa $g \in \mathcal{Y}$, jolle

$$B = \{f \in \mathcal{X} \mid U(f, g)\} = U(\cdot, g).$$

Sanotaan, että relaatio on *universaalinen*, jos se on \mathcal{N}_1 -universaalinen.

ii) Luokka Γ on \mathcal{Y} -parametrisoitu, jos jokaisella \mathcal{X} on olemassa \mathcal{Y} -universaalinen relaatio luokalle $\Gamma^- \mathcal{X}$. Sanotaan, että Γ on *parametrisoitu*, jos Γ on \mathcal{N}_1 -parametrisoitu.

iii) Luokka Γ on *sopiva*, jos Γ on suljettu

(1) numeroituvan leikkauksen ja yhdisteen suhteen

(2) jatkuvan sijoituksen suhteen, s.o.

$$\text{jos } F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} \text{ on jatkuva ja } A \in \Gamma^- \mathcal{Y} \text{ niin } F^{-1}A \in \Gamma$$

Seuraava lemma on ns. hierarkialemma.

Lemma 2.5 Jos Γ on suljettu jatkuvan sijoituksen suhteen ja parametrisoitu, niin $\neg\Gamma \not\subseteq \Gamma$.

TODISTUS. Olkoon $U \subseteq \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_1$ universaalinen luokalle $\Gamma\text{-}\mathcal{N}_1$. Olkoon $A = \{f \in \mathcal{N}_1 \mid (f, f) \notin U\}$. Koska Γ on suljettu jatkuvan sijoituksen suhteen, niin on myös $\neg\Gamma$. Koska $F : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_1, f \mapsto (f, f)$, on jatkuva, niin $A = F^{-1}[\mathcal{N}_1^2 \setminus U] \in \neg\Gamma$. Nyt $A \notin \Gamma$, koska muuten $A = U(\cdot, g)$ jollakin $g \in \mathcal{N}_1$, jolloin saadaan ristiriita

$$(g, g) \in U \iff g \in A \iff (g, g) \notin U.$$

□

Määritelmä 2.6 Merkitään symbolilla Σ_1^0 kaikkien avaruuksien \mathcal{X} avoimien joukkojen luokkaa. Suljettujen joukkojen luokkaa merkitään Π_1^0 . Olkoon $\Delta_1^0 = \Sigma_1^0 \cap \Pi_1^0$. Kun λ on ordinaali, niin λ -Borelin joukkojen luokka $\lambda\text{-B}$ on pienin luokka Γ , joka toteuttaa seuraavat ehdot

- i) $\Sigma_1^0 \cup \Pi_1^0 \subseteq \Gamma$
- ii) Jos $A_\xi \in \Gamma$ kaikilla $\xi < \gamma < \lambda$, niin $\cup_{\xi < \gamma} A_\xi \in \Gamma$ ja $\cap_{\xi < \gamma} A_\xi \in \Gamma$.

Merkitään lyhyesti $(\aleph_1 + 1)\text{-B} = \mathbf{B}$ ja kutsutaan tämän luokan alkioita *Borel-joukoiksi*.

Borel-joukot voidaan myös määritellä induktiolla tasoittain:

$$\Sigma_\gamma^0 = \cup_{\xi < \omega_1} \left(\bigcup_{\xi < \gamma} \Pi_\xi^0 \right), \quad \Pi_\gamma^0 = \cap_{\xi < \omega_1} \left(\bigcup_{\xi < \gamma} \Sigma_\xi^0 \right)$$

kun $\gamma < \omega_2$. Merkitään lisäksi $\Delta_\alpha^0 = \Sigma_\alpha^0 \cap \Pi_\alpha^0$.

Lemma 2.7 $\mathbf{B} = \cup_{\alpha < \omega_2} \Sigma_\alpha^0$.

TODISTUS. Luokka $\cup_{\alpha < \omega_2} \Sigma_\alpha^0$ toteuttaa selvästi määritelmän 2.6 ehdot i) ja ii): Jos $A_\xi \in \Sigma_{\delta_\xi}^0$, $\xi < \omega_1$, niin $\cup_{\xi < \omega_1} A_\xi, \cap_{\xi < \omega_1} A_\xi \in \Sigma_{\delta+1}^0$, missä $\delta = \sup_{\xi < \omega_1} \delta_\xi < \omega_2$. Induktiolla α :n suhteen on helppo todeta, että $\Sigma_\alpha^0 \subseteq \mathbf{B}$. □

Myöhemmista tarkasteluista seuraa, että luokat Σ_α^0 ja Π_α^0 ovat parametrisoituja ja suljettuja jatkuvan sijoituksen suhteen. Koska $\Sigma_\alpha^0 \subseteq \Pi_{\alpha+1}^0$, $\Pi_\alpha^0 \subseteq \Sigma_{\alpha+1}^0$, $\Sigma_1^0 \subseteq \Sigma_2^0$ ja $\Pi_1^0 \subseteq \Pi_2^0$, niin lemmän 2.5 nojalla saadaan ns. Borel-hierarkia:

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma_1^0 & & \Sigma_2^0 & & \Sigma_\alpha^0 & & \\ \neq & \Delta_2^0 & \neq & \cdots & \neq & \Delta_{\alpha+1}^0 & \\ \Pi_1^0 & & \Pi_2^0 & & \Pi_\alpha^0 & & \end{array}$$

missä vasempana oleva luokka sisältyy oikealla olevaan.

2.2 Puista ja peleistä

Määritelmä 2.8 *Puu* on sellainen osittainjärjestetty joukko $(T, <)$, että joukko

$$\hat{t} = \{s \in T \mid s < t\}$$

on hyvinjärjestetty kaikilla $t \in T$. Merkitään puuta $(T, <)$ vain symbolilla T . Alkion $t \in T$ korkeus, $\text{ht}(t)$, on joukon \hat{t} järjestystyyppi. Puun T korkeus, $\text{ht}(T)$, on $\sup \{\text{ht}(t) + 1 \mid t \in T\}$. Puun T α :s taso, $\text{Lev}_\alpha(T)$, on joukko $\{t \in T \mid \text{ht}(t) = \alpha\}$. Jos $t \in T$, niin merkitään t :n välittömien seuraajien joukkoa symbolilla $\text{succ}(t)$. Jono $\langle t_\xi \rangle_{\xi < \gamma}$ on puun T oksa, jos se on maksimaalinen lineaarisesti järjestetty jono T :n alkioita. Lineaarisesi järjestetty joukko $X \subseteq T$ on puun T alkusegmentti, jos $\hat{t} \subseteq X$ kaikilla $t \in X$. Jos X ja Y ovat puun T alkusegmenttejä, niin merkitään $X < Y$, jos $X \subseteq Y$ ja $X \neq Y$. Kun $t \in T$, niin olkoon $T_t = \{t' \in T \mid t' \geq t\}$ järjestettynä puusta T perityllä relaatiolla.

Kun T_1 ja T_2 ovat puita, niin puut ovat *isomorfiset*, $T_1 \simeq T_2$, jos on olemassa bijektio $F : T_1 \rightarrow T_2$, jolle pätee kaikilla $t, t' \in T_1$

$$t < t' \iff F(t) < F(t').$$

Pari $(T, <)$ (yksinkertaisemmin T) on $\lambda\kappa$ -puu, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

- i) Jos \bar{b} on puun T oksa, niin $\ell(\bar{b}) < \kappa$.
- ii) Jos $t \in T$, niin $|\text{succ}(t)| < \lambda$.
- iii) Jos $s, t \in T$, $\hat{t} = \hat{s}$ ja $\text{ht}(t)$ on rajaordinaali, niin $s = t$. Tällöin sanotaan, että puulla T on *yksikäsitteiset rajat*.

Jokaisella $\lambda\kappa$ -puulla on pienin alkio eli yksikäsitteinen juuri. Tässä tutkielmassa tutkitaan lähinnä $\omega_2\omega_1$ -puita. Niille voidaan löytää edustajat joukon $\omega_1^{<\omega_1}$ osajoukoista. Olkoon \mathcal{T} niiden $T \subseteq \omega_1^{<\omega_1}$ joukko, jossa T toteuttaa ehdot

- i) jos $s \in T$, niin $t^{-\xi} \in T$ kaikilla $\xi < \omega_1$.
- ii) T :ssä ei ω_1 -oksa.

Jos $T \in \mathcal{T}$, niin T on $\omega_2\omega_1$ -puu. Myös kääntäen:

Lemma 2.9 *Jos T_1 on $\omega_2\omega_1$ -puu, niin on olemassa $T_2 \in \mathcal{T}$, jolle pätee*

$$T_1 \simeq T_2.$$

TODISTUS. Konstruoidaan T_2 ja isomorfismi $F : T_1 \rightarrow T_2$ induktiolla tasoittain. Koska puussa T_1 on yksi juuri t , niin asetetaan $\text{Lev}_0(T_2) = \{\langle \rangle\}$ ja $F(t) = \langle \rangle$. Jos tasot $\text{Lev}_\beta(T_2)$, $\beta < \alpha = \cup\alpha$, ja $F : \cup_{\beta < \alpha} \text{Lev}_\beta(T_1) \rightarrow \cup_{\beta < \alpha} \text{Lev}_\beta(T_2)$ on määritelty, niin asetetaan alkion $t \in \text{Lev}_\alpha(T_1)$ kuvaksi $F(t) = \cup_{s < t} F(s) \in \text{Lev}_\alpha(T_2)$. Jos $\text{Lev}_\beta(T_2)$ ja $F : \text{Lev}_\beta(T_1) \rightarrow \text{Lev}_\beta(T_2)$ on määritelty, niin valitaan kullekin $t \in T$ injektio $G_t : \text{succ}(t) \rightarrow \omega_1$ ja asetetaan, kun $t' \in \text{Lev}_{\beta+1}(T_1)$ ja $t' \in \text{succ}(t)$, $F(t') = F(t) \hat{\ } \langle G_t(t') \rangle$. \square

Tästä lähtien sovitaan, että tarkasteltavat $\omega_2\omega_1$ -puut ovat lemmän 2.9 avulla \mathcal{T} :n alkioita. Kun \bar{b} on puun $T \in \mathcal{T}$ oksa, merkitään $b = \cup\{t \mid t \in \bar{b}\}$ ja $[T] =$

$\{b \mid \bar{b} T\text{:n oksa}\}$. Jos oksan \bar{b} pituus on seuraajaordinaali, niin $b \in T$. Kutsutaan alkiota $t \in \text{Tr}[T]$ *solmuksi* ja alkiota $b \in [T]$ *lehdeksi*. Kun $T \in \mathcal{T}$, $t \in T$ ja $b \in [T]$, niin sanotaan, että t ja b ovat *parillisia*, jos $\text{ht}(t)$ ja $\ell(b)$ ovat. Vastaavasti määritellään *pariton*.

Seuraavassa on yleinen pelin määritelmä. Aina kuitenkin pelejä ei esitetä suoraan määritelmän nojalla, vaan kuvailemalla pelin säännöt.

Määritelmä 2.10 Olkoon X joukko ja $x \in X$. *Peli* on kolmikko (x, T, L) , missä T on puu, jolla on yksikäsitteiset rajat, ja $L : T \cup [T] \rightarrow \{\forall, \exists\} \cup \mathcal{P}(X)$, jolle $L(t) \in \{\forall, \exists\}$, kun t solmu, ja $L(b) \subseteq X$, kun b lehti. Pelin *pelaajat* ovat \forall ja \exists . Pelin *kulku* on mikä tahansa $b \in [T]$. Pelin kulun b *voittaa* \exists , jos $x \in L(b)$. Muussa tapauksessa pelaaja \forall voittaa. Pelaajan Q , $Q \in \{\forall, \exists\}$, *strategia* on sellainen kuvaus $\tau : T \cap L^{-1}(Q) \rightarrow T$, että $\tau(t) \in \text{succ}(t)$. Pelaaja Q on *noudattanut* strategiaansa τ pelin kulussa b , jos kaikilla $\xi < \ell(b)$ pätee $\tau(b^- \xi) = b^-(\xi + 1)$, mikäli $b^- \xi \in \text{dom}(\tau)$. Pelaajan Q strategia τ on *voittostrategia*, jos kaikilla pelin kuluilla b , jossa pelaaja on noudattanut strategiaansa τ , peli päättyy Q :n voittoon. Toisinaan sanotaan lyhyesti, että pelaaja Q *voittaa* pelin (x, T, L) , jos pelaalla Q on voittostrategia tässä pelissä. Peli (x, T, L) on *determinoitu*, jos jommalla kummalla pelaajalla on voittostrategia. Pelin (x, T, L) *duaali* on peli $(x, T, \sim L)$, missä $\sim L(t) = \exists$, kun $L(t) = \forall$, $\sim L(t) = \forall$, kun $L(t) = \exists$, ja $\sim L(b) = X \setminus L(b)$.

Määritelmä 2.11 Olkoon $\alpha \leq \omega_1$ ordinaali. Olkoon $P \subseteq \mathcal{X} \times \omega_1^\alpha$. Olkoon $T = \omega_1^{<\alpha}$, $L(t) = \exists$, kun $t \in T$ on parillinen, $L(t) = \forall$, kun $t \in T$ on pariton, ja $L(b) = P(\cdot, b)$, kun $b \in [T]$. Merkitään peliä (f, T, L) symbolilla $G^\alpha(f, P)$ ja peliä $(f, T, \sim L)$ symbolilla $\check{G}^\alpha(f, P)$. Olkoon

$$G^\alpha(P) = \{f \in \mathcal{X} \mid \text{pelaajalla } \exists \text{ on voittostrategia pelissä } G^\alpha(f, P)\}.$$

Ehto $f \in G^\alpha(P)$ voidaan havainnollisesti kirjoittaa myös muodossa

$$(\exists \alpha_1 \forall \beta_1 \exists \alpha_2 \forall \beta_2 \dots \exists \alpha_\xi \forall \beta_\xi \dots)_{\xi < \alpha} [(f, \langle \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_\xi, \beta_\xi, \dots \rangle_{\xi < \alpha}) \in P].$$

Kun Γ on pisteluokka, niin merkitään $G^\alpha(\Gamma) = \{G^\alpha(P) \mid P \in \Gamma\}$. Vastaavasti olkoon

$$\check{G}^\alpha(P) = \{f \in \mathcal{X} \mid \text{pelaajalla } \exists \text{ on voittostrategia pelissä } \check{G}^\alpha(f, P)\}.$$

Tällöin ehto $f \in \check{G}^\alpha(P)$ on havainnollisessa muodossa

$$(\forall \alpha_1 \exists \beta_1 \forall \alpha_2 \exists \beta_2 \dots \forall \alpha_\xi \exists \beta_\xi \dots)_{\xi < \alpha} [(f, \langle \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_\xi, \beta_\xi, \dots \rangle_{\xi < \alpha}) \in P].$$

Myöhemmin palataan operaatioon G^α erityisesti ordinaalin α arvoilla ω ja ω_1 .

Määritelmä 2.12 Jonojen s ja t *lomit*, $s * t$, on jono r , jonka pituus on $\min\{2\ell(s), 2\ell(t)\}$ ja

$$\begin{aligned} r(\gamma + 2n) &= s(\gamma + n) \\ r(\gamma + 2n + 1) &= t(\gamma + n), \end{aligned}$$

missä $\gamma = \cup \gamma$ ja $\gamma + 2n + 1 < \ell(r)$. Olkoon $\alpha \leq \omega_1$ ordinaali. Tällöin α -strategia on kuvaus $\omega_1^{<\alpha} \rightarrow \omega_1$. Jos ρ on α -strategia ja $s \in \omega_1^{<\alpha}$, niin $\rho * s$ on jono t , jonka pituus on $2\ell(s)$ ja jolle

$$\begin{cases} t(\gamma + 2n) = \rho(\langle t(0), t(1), \dots, t(\xi), \dots \rangle), & \xi < \gamma + 2n, \\ t(\gamma + 2n + 1) = s(\gamma + n) \end{cases}$$

missä $\gamma = \cup\gamma$ ja $\gamma + 2n + 1 < \beta$. Samalla tavalla määritellään $s * \rho$. Jos ρ ja τ ovat α -strategioita, niin

$$\rho * \tau$$

on jono t , jonka pituus on 2α ja jolle

$$\begin{aligned} t(\gamma + 2n) &= \rho(\langle t(\xi) \rangle_{\xi < \gamma + 2n}), \\ t(\gamma + 2n + 1) &= \tau(\langle t(\xi) \rangle_{\xi < \gamma + 2n + 1}), \end{aligned}$$

Avaruuden ω_1^α alkiot koodaavat α -strategioita bijektion σ välityksellä. Jos $f \in \omega_1^\alpha$, niin $f:n$ määräämä α -strategia τ_f määritellään seuraavasti

$$\tau_f(s) = f(\sigma(s)), \text{ kun } s \in \omega_1^{<\alpha}.$$

Lemma 2.13 $G^\alpha sP(s, g) \iff \exists f \in \omega_1^\alpha \forall f' \in \omega_1^\alpha P(\tau_f * \tau_{f'}, g)$

TODISTUS. Olkoon $g \in \mathcal{N}_1$ ja $G^\alpha sP(s, g)$. Olkoon $\tau \in \exists:n$ voittostrategia pelissä $G^\alpha(g, P)$. Valitaan $f \in \mathcal{N}_1$, jolle

$$f(\sigma(s)) = \tau(s) \text{ kaikilla } s \in \omega_1^{<\omega_1}.$$

Tällöin kaikilla $f' \in \mathcal{N}_1$ pätee $P(\tau_f * \tau_{f'}, g)$.

Olkoon sitten $\exists f \forall f' P(\tau_f * \tau_{f'}, g)$ voimassa. Valitaan $\tau = \tau_f$. Tällöin τ on $\exists:n$ voittostrategia pelissä $G^\alpha(g, P)$. \square

Huomautus 2.14 Jos $\forall f \exists f' P(\tau_{f'} * \tau_f, g)$, niin $G^\alpha sP(s, g)$ voidaan päätellä vain, jos peli on determinoitu.

Puiden koon vertailemiseksi määritellään peli $G(T, T')$ kahden puun T ja T' välille. Se on pelaajien \exists ja \forall välinen $\omega_1:n$ mittainen peli,

$$\begin{array}{ccccccc} \forall & t_0 & & t_1 & & \cdots & t_\gamma & \cdots \\ \exists & & t'_0 & & t'_1 & \cdots & & t'_\gamma & \cdots \end{array}$$

missä $\gamma < \omega_1$ on rajaordinaali. Pelin säännöt ovat: $t_0 < t_1 < \cdots < t_\delta < \cdots \in T$ ja $t'_0 < t'_1 < \cdots < t'_\delta < \cdots \in T'$. Se pelaaja, joka ensimmäisenä rikkoo sääntöjä, häviää. Määritellään puiden välille järjestys asettamalla $T \leq T'$, jos on olemassa järjestyksen säilyttävä kuvaus $F : T \rightarrow T'$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että \exists :lla on voittostrategia pelissä $G(T, T')$. Lisäksi merkitään $T < T'$, jos $T \leq T'$ ja $T' \not\leq T$. Toinen järjestysrelaatio saadaan, kun asetetaan $T \ll T'$ jos ja vain jos pelaajalla \forall on voittostrategia pelissä $G(T', T)$. Sekä \leq ja $<$ ovat selvästi transitiivisia. Merkitään $T \equiv T'$, jos $T \leq T'$ ja $T' \leq T$.

[Määritelmään 2.10 nojautuva ylläolevan pelin määritelmä saa seuraavan muodon. Olkoot vertailtavat puut T_1 ja T_2 . Olkoon $T = (T_1 \cup T_2)^{<\omega_1}$, $X = \{0\}$. Kun $b \in [T]$, niin merkitään $\bar{b}_0(\delta) = \langle b(\xi) \mid \xi \text{ parillinen ja } \xi < 2\delta \rangle$ ja kun vaihdetaan parillisen paikalle pariton saadaan $\bar{b}_1(\delta)$. Olkoon $L(t) = \exists$, kun t parillinen, ja $L(t) = \exists$, kun t pariton. Kullekin $b \in [T]$ olkoon $L(b) = \{0\}$, kun

$$\min\{\xi \mid \bar{b}_0(\xi) \text{ ei ole } T_0:n \text{ kasvava jono}\} \leq \min\{\xi \mid \bar{b}_1(\xi) \text{ ei ole } T_1:n \text{ kasvava jono}\}$$

ja olkoon $L(b) = ?$ muuten. Nyt pätee $T_1 \leq T_2$, jos ja vain jos pelaaja \exists voittaa pelin $(0, T, L)$.]

Määritelmä 2.15 i) Kun $T \in \mathcal{T}$, niin puun T levitys on joukko

$$wT = \{\langle (\alpha_\xi, \delta_\xi) \rangle_{\xi < \gamma} \mid \langle \alpha_\xi \rangle \in T \wedge \delta_\xi \in \omega_1 \text{ kaikilla } \xi < \gamma\}$$

järjestettynä alkusegmenttirelaatiolla.

- ii) Puu T on *leveä*, jos $T \simeq wT$.
- iii) Kun T on puu, niin olkoon σT puun T alkusegmenttien joukko järjestettynä alkusegmenttirelaatiolla.
- iv) Olkoon $\mu T = w(\sigma T)$.

Kaikilla $T \in \mathcal{T}$ selvästi $wT \equiv T$ ja $wT \simeq w(wT)$. Kun $T \in \mathcal{T}$, niin $\sigma T = \{\langle b \xi \rangle_{\xi < \gamma} \mid b \in [T], \gamma \leq \ell(b)\}$ ja $[\sigma T] = \{\langle b \xi \rangle_{\xi < \ell(b)} \mid b \in [T]\}$. Kun $t = \langle \alpha_\xi \rangle_{\xi < \gamma} \in T \cup [T]$, niin merkitään $(t, \beta) = \langle (\alpha_\xi, \beta) \rangle_{\xi < \gamma} \in wT$.

Lemma 2.16 Jos $T \leq T'$, niin on olemassa funktio $F : T \rightarrow wT'$, joka toteuttaa ehdot

- i) F injektio
- ii) kaikilla $\alpha < \omega_1$ jos $t \in \text{Lev}_\alpha(T)$ niin $F(t) \in \text{Lev}_\alpha(wT')$
- iii) $t < t' \iff F(t) < F(t')$.

TODISTUS. Olkoon τ sellainen \exists :n voittostrategia pelissä $G(T, T')$, että \exists pelaaja mahdollisimman ekonomisesti s.o. $\tau(\langle t_\xi, t'_\xi \rangle_{\xi \leq \delta}, t_{\delta+1}) \in \text{succ}(t'_\delta)$ ja $\tau(\langle t_\xi, t'_\xi \rangle_{\xi < \gamma}, t_\gamma) = \cup_{\xi < \gamma} t'_\xi$, kun $\gamma = \cup \gamma$. Määritellään $F : T \rightarrow wT'$ induktiolla tasoittain. Asetetaan $F(t) = \cup_{\xi < \gamma} F(t_\xi)$, kun $t = \cup_{\xi < \gamma} t_\xi$ ja $\gamma = \cup \gamma = \ell(t)$. Kun $t = \langle \alpha_\xi \rangle_{\xi < \delta+1}$, niin olkoon $\tau(\langle t \xi, F(t \xi) \rangle, t) = \langle \alpha'_\xi \rangle_{\xi < \delta+1}$. Asetetaan $F(t) = F(\langle \alpha_\xi \rangle_{\xi < \delta}) \hat{\ } \langle \alpha'_\delta, \alpha_\delta \rangle$. Näin määritellen F toteuttaa selvästi vaaditut ehdot. \square

Seuraavat väitteet on todistettu [5]:ssä, mutta todistukset esitetään myös tässä.

Lemma 2.17 i) $\sigma T \in \mathcal{T}$ ja $T \ll \sigma T$.

- ii) Jos $T \ll T'$, niin $T < T'$.
- iii) $T \ll T' \iff \sigma T \leq T'$
- iv) $T \leq T' \iff T \ll \sigma T'$
- v) Ei ole olemassa puuta T' siten, että $T \ll T' \ll \sigma T$.
- vi) Ei ole olemassa puuta T_n , $n < \omega$, joille $T_{n+1} \ll T_n$ kaikilla n .

TODISTUS. i. Ensimmäinen väite on selvä. Pelaajan \forall voittostrategia pelissä $G(\sigma T, T)$ on pelata pelaajan \exists aikaisempien siirtojen määräämä alkusegmentti. Näin pelaten \forall :lla on aina vastaus \exists :n siirtoon, joten \forall voittaa.

ii. Olkoon τ pelaajan \forall voittostrategia pelissä $G(T', T)$. Nyt $\neg(T' \leq T)$, koska molemmilla pelaajilla ei voi olla voittostrategiaa pelissä $G(T', T)$. Määritellään järjestyksen säilyttävä kuvaus $F : T \rightarrow T'$. Olkoon $t \in T$. Pelataan peli, jossa \exists siirtää t :n edeltäjineen ja \forall käyttää voittostrategiaa τ . Strategia τ antaa siten viimeisenä siirtona $F(t)$.

iii. Olkoon ρ pelaajan \exists voittostrategia pelissä $G(\sigma T, T')$. Määritellään pelaajan \forall voittostrategia τ peliin $G(T', T)$. Olkoot $t'_\xi \in T$, $t_\xi \in T$, $\xi < \gamma$, pelin aikaisemmat siirrot, missä \forall ei ole vielä hävinnyt. Olkoon \bar{s} jonon $\langle t_\xi \rangle$ määräämä puun T alkusegmentti ja $\bar{t}' = \langle t'_\xi \rangle$. Asetetaan

$$\tau(\langle t'_\xi, t_\xi \rangle_{\xi < \gamma}) = \rho(\langle \bar{s} * \bar{t}' - \xi \rangle_{\xi < \gamma}).$$

Olkoon sitten τ on pelaajan \forall voittostrategia pelissä $G(T', T)$. Määritellään \exists :n voittostrategia ρ peliin $G(\sigma T, T')$. Olkoot $s_0 < s_1 < \dots < s_\gamma \in \sigma T$ ja $\bar{t}' = \langle t'_\xi \rangle_{\xi < \gamma}$, pelissä aikaisemmin pelatut siirrot. Asetetaan tällöin \exists :n siirroksi $\tau(\bar{t}' * s_\gamma)$.

iv. Seuraa kohdasta iii, koska $T \ll \sigma T' \iff \sigma T \leq \sigma T' \iff T \leq T'$.

v. Kohtien i, ii ja iii nojalla $T \ll T' \ll \sigma T$ on mahdotonta, koska siitä seuraisi $\sigma T \leq T'$ ja $\sigma T' \leq \sigma T$.

vi. Olkoon τ_n pelaajan \forall voittostrategia pelissä $G(T_n, T_{n+1})$. Määritellään puiden T_n kasvavat jonot $\langle t_\xi^n \rangle$ ehdolla

$$t_\xi^n = \tau_n(\langle t_\delta^n, t_\delta^{n+1} \rangle_{\delta < \xi})$$

Nyt $\langle t_\xi^0 \rangle_{\xi < \omega_1}$ on kasvava ω_1 -jono puussa T_0 , mikä on ristiriita. \square

Edellinen lemma pätee myös, kun σT korvataan μT :llä. Lemmasta seuraa myös, että relaatio \ll on transitiivinen. Nimittäin jos $T_1 \ll T_2 \ll T_3$, niin $\sigma T_1 \leq T_2$ ja $\sigma T_2 \leq T_3$, joten $\sigma T_1 \leq T_3$.

Määritelmä 2.18 Puu T on *hyvinperustettu*, jos T :ssä ei ole äärettömiä oksia.

Seuraavan lemmän nojalla puut $\omega_1^{<\omega}$ ja $\omega_1^{<\omega_1}$ ovat puiden luokassa selvät rajapyykit.

Lemma 2.19 *Puu T on hyvinperustettu jos ja vain jos $T \ll \omega_1^{<\omega}$. Puu $T \subseteq \omega_1^{<\omega_1}$ on $\omega_2\omega_1$ -puu jos ja vain jos $T \ll \omega_1^{<\omega_1}$.*

TODISTUS. Olkoon T hyvinperustettu. Tällöin pelaajan \forall voittostrategia pelissä $G(\omega_1^{<\omega}, T)$ on pelata ääretöntä oksaa puussa $\omega_1^{<\omega}$. Jos pelaajalla \forall on voittostrategia pelissä $G(\omega_1^{<\omega}, T)$, niin puussa T ei ole ääretöntä oksaa, sillä muuten \exists voi pelata ω siirtoa häviämättä. Jos T on $\omega_2\omega_1$ -puu, niin \forall :n voittostrategia pelissä $G(\omega_1^{<\omega_1}, T)$ on pelata ω_1 -oksa. Jos T :ssä on ω_1 -oksa, niin pelaamalla sitä pitkin \exists selviää pelissä ω_1 siirtoa. \square

Kun puu T on hyvinperustettu, niin puun T *astefunktio* $r : T \rightarrow \text{ON}$ on seuraava

$$r(t) = \sup \{r(t \hat{\langle \alpha \rangle}) + 1 \mid t \hat{\langle \alpha \rangle} \in T\}$$

Tällöin *puun T aste* on $r(T) = \sup \{r(t) + 1 \mid t \in T\}$. (Supremum tyhjästä joukosta on 0.)

Kun $\alpha < \omega_2$, niin olkoon

$$T^\alpha = \{ \langle (a_{\alpha_0}, \alpha_0), (a_{\alpha_1}, \alpha_1), \dots, (a_{\alpha_n}, \alpha_n) \rangle \mid \alpha > \alpha_0 > \alpha_1 > \dots > \alpha_n, a_{\alpha_i} \in \omega_1 \}$$

järjestettynä alkusegmenttirelaatiolla. Koska ei ole olemassa laskevaa ääretöntä ordinaaliketjua, niin T^α on hyvinperustettu. Lisäksi $r(T^\alpha) = \alpha$.

Esimerkki 2.20 $\mu T^\alpha = T^{\alpha+1}$ ja $\mu\omega_1^{<\omega} = \omega_1^{<\omega+1}$.

Seuraavat puiden operaatiot on määritellyt mm. Taneli Huuskonen [3]. Olkoot $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$. Näiden puiden *summa*, $T = T_1 + T_2$, on seuraava

$$T = T_1 \times \{0\} \cup ([T] \times T_2) \times \{1\}$$

järjestettynä seuraavasti: $t_1 < t_2$ jos ja vain jos yksi seuraavista pätee

- i) $t_1 = (t'_1, 0)$ ja $t_2 = (t'_2, 0)$ joillekin $t'_1, t'_2 \in T_1$ niin, että $t'_1 < t'_2$.
- ii) $t_1 = (t'_1, 0)$ ja $t_2 = ((b, t'_2), 1)$ joillekin $t'_1 \in T_1, t'_2 \in T_2$ ja $b \in [T_1]$ niin, että $t_1 \in \bar{b}$.
- iii) $t_1 = ((b, t'_1), 1)$ ja $t_2 = ((b, t'_2), 1)$ joillekin $t'_1, t'_2 \in T_2$ ja $b \in [T_1]$ niin, että $t'_1 < t'_2$.

Intuitiivisesti T saadaan liittämällä T_2 :n kopio jokaisen T_1 :n oksan perään. Puiden $T_i, i \in I$, *supremum*, $T = \sqcup_{i \in I} T_i$, on seuraava:

$$T = \cup_{i \in I} (T_i \text{r Lev}_0(T_i)) \times \{i\} \cup \{\langle \rangle\}$$

järjestettynä seuraavasti: $\langle \rangle$ on puun T pienin alkio eli juuri. Muutoin $(t_1, i_1) < (t_2, i_2)$ jos ja vain jos $i_1 = i_2$ ja $t_1 < t_2$.

Seuraavassa ordinaali käsitetään edeltäjiensä muodostamana jonona: $\xi = \langle \delta \rangle_{\delta < \xi}$.

Puu T on *refleksiivinen*, jos on olemassa sellainen juuresta poikkeava $t \in T$, että $T \leq T_t$. Tällöin T ei ole hyvinperustettu, sillä jos $F : T \rightarrow T_t$ on järjestyksen säilyttävä, niin jono $\langle t, F(t), F(F(t)), \dots \rangle$ on ääretön kasvava jono T :ssä. Kun T on puu, niin puu $T' = \{n \hat{t} \mid t \in T, n \in \omega\}$ on refleksiivinen, sillä funktio $F : T' \rightarrow T'_1, F(n \hat{t}) = (n+1) \hat{t}$, kun $t \in T$, on järjestyksen säilyttävä. On olemassa puu, joka ei ole hyvinperustettu eikä refleksiivinen. Tällainen on esimerkiksi puu $T = \{\langle \xi \rangle \hat{\xi} \mid \xi < \omega_1\}$, sillä kaikilla juuresta poikkeavilla $t \in T$ pätee $T_t \leq \xi$, jollakin $\xi < \omega_1$, joten $\xi + 1 \not\leq T_t$. Siis $T \not\leq T_t$.

Lemma 2.21 *Puu T on refleksiivinen, jos ja vain jos $1 + T \leq T$.*

TODISTUS. Puu $1 + T$ on isomorfinen puun $T' = \{\langle 0 \rangle \hat{t} \mid t \in T\} \cup \langle \rangle$ kanssa. Jos $F : T' \rightarrow T$ on järjestyksen säilyttävä, niin $F^{-1} \{ \langle 0 \rangle \hat{t} \mid t \in T \}$ määrittelee järjestyksen säilyttävän kuvauksen $T \rightarrow T_{F(\langle 0 \rangle)}$, missä $F(\langle 0 \rangle)$ ei ole T :n juuri. Kääntäen oletetaan, että $t \in T$ ei ole juuri ja $F : T \rightarrow T_t$ on järjestyksen säilyttävä. Tällöin $F' : T' \rightarrow T$,

$$F'(\langle \rangle) = \langle \rangle, F'(\langle 0 \rangle \hat{t}) = F(t),$$

on järjestyksen säilyttävä. \square

3 Borel*-joukot

3.1 Borel*-joukon määritelmä ja perusominaisuuksia

Borel*-joukon määritelmä esitetään asettamalla joukon asteeksi ordinaalin sijasta $\omega_2\omega_1$ -puu. Osoitetaan, että joukko on Borel, jos ja vain jos joukko on Borel* jollakin hyvinperustetulla puulla. Tämä on Blackwellin [1] Borel-joukon karakterisointi Baire-avaruuksissa. Näin Borel*-joukon määritelmä yleistää klassisen määritelmän.

Määritelmä 3.1 Olkoon T $\omega_2\omega_1$ -puu. Funktio

$$L : T \cup [T] \rightarrow \{\cup, \cap\} \cup \Sigma_1^0\text{-}\mathcal{X} \cup \Pi_1^0\text{-}\mathcal{X}$$

on puun T laputus joukolla \mathcal{X} , jos $L(t) \in \{\cup, \cap\}$, kun t on puun T solmu ja $L(b) \in \Sigma_1^0\text{-}\mathcal{X} \cup \Pi_1^0\text{-}\mathcal{X}$, kun b on puun T lehti. Puun T Σ -laputus L toteuttaa lisäksi ehdot:

- i) Jos $t \in \text{Tr}[T]$, niin $L(t) = \cup$, kun t on parillinen ja $L(t) = \cap$, kun t on pariton.
- ii) Jos $b \in [T]$, niin $L(b) \in \Sigma_1^0$, kun b on parillinen ja $L(b) \in \Pi_1^0$, kun b pariton.

Laputuksen L duaali $\sim L$ toteuttaa ehdot

$$\begin{aligned} \sim L(t) &= \cup, \text{ kun } L(t) = \cap \\ \sim L(t) &= \cap, \text{ kun } L(t) = \cup \\ \sim L(b) &= \mathcal{X}r L(b), \text{ kun } b \in [T] \end{aligned}$$

Puun T Π -laputus on puun T Σ -laputuksen duaali.

Määritelmä 3.2 Olkoon $f \in \mathcal{X}$, T $\omega_2\omega_1$ -puu ja L sen laputus joukolla \mathcal{X} . Peli $G(f, T, L)$ on peli \exists :n ja \forall :n välillä pitkin puuta T . Peli alkaa puun T juuresta. Kun on päästy puussa solmuun t , siirtovuorossa oleva pelaaja valitsee jonkin t :n välittömän seuraajan. Siirtovuorossa on \exists , jos $L(t) = \cup$ ja \forall valitsee, jos $L(t) = \cap$. Rajalla jatketaan aikaisemmin valittujen solmujen supremumista. Peli päättyy, kun ei ole enää mahdollista siirtää. Tällöin pelaajien valinnat määräävät lehden $b \in [T]$. Tällöin pelin voittaa \exists , jos $f \in L(b)$. Muussa tapauksessa \forall voittaa.

Kun T, T' ovat $\omega_2\omega_1$ -puita ja L, L' ovat vastaavasti puun T ja T' laputuksia joukolla \mathcal{X} , niin parit (T, L) ja (T', L') ovat *ekvivalentit*, jos kaikilla $f \in \mathcal{X}$ jommallakummalla pelaajalla on voittostrategia pelissä $G(f, T, L)$, jos ja vain jos hänellä on voittostrategia pelissä $G(f, T', L')$.

Tason T Borel*-joukko laputuksella L on joukko

$$B(T, L) = \{f \in \mathcal{X} \mid \exists \text{llä voittostrategia pelissä } G(f, T, L)\}$$

ja duaalisti Borel'-joukko on

$$\begin{aligned} B'(T, L) &= \mathcal{X}r B(T, \sim L) \\ &= \{f \in \mathcal{X} \mid \forall \text{lla ei ole voittostrategiaa pelissä } G(f, T, L)\}. \end{aligned}$$

Määritellään

$$\begin{aligned} \Sigma_T &= \{B(T, L) \mid L \text{ } \Sigma\text{-laputus}\}, & \Pi_T &= \{B(T, L) \mid L \text{ } \Pi\text{-laputus}\} \\ \Sigma'_T &= \{B'(T, L) \mid L \text{ } \Sigma\text{-laputus}\}, & \Pi'_T &= \{B'(T, L) \mid L \text{ } \Pi\text{-laputus}\}. \end{aligned}$$

Olkoon $\Delta_T = \Sigma_T \cap \Pi_T$ ja $\Delta'_T = \Sigma'_T \cap \Pi'_T$. Merkitään

$$\mathcal{B}^* = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \Sigma_T \text{ ja } \mathcal{B}' = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \Sigma'_T$$

Merkitään symbolilla \mathcal{B}^d niiden Borel*-joukkojen $B(T, L)$ luokkaa, joille pätee, että peli $G(f, T, L)$ on determinoitu kaikilla f . Symboli \mathcal{B}^n tarkoittaa niiden Borel*-joukkojen luokkaa, joiden komplementti on myös Borel*-joukko.

Määritelmistä seuraa heti, että $\mathcal{B}^d \subseteq \mathcal{B}^n \subseteq \mathcal{B}^*$. Myöhemmin osoitetaan, että $\mathcal{B}^d = \mathcal{B}^n$. Jos (T, L) ja (T', L') ovat ekvivalentit, niin $B(T, L) = B(T', L')$ ja $B'(T, L) = B'(T', L')$. Koska Borel*-joukko on määritelty pelin avulla, joka voi olla ei-determinoitu, niin voi olla $B(T, L) \neq B'(T, L)$. Kuitenkin aina pätee $B(T, L) \subseteq B'(T, L)$.

Esimerkki 3.3 Olkoon $A \subseteq 2^\omega$ ei-determinoitu joukko ja $T = \omega_1^{<\omega}$. Määritellään $F : \omega_1^\omega \rightarrow A$ asettamalla $F(s)(n) = 0$, jos $s(n)$ on parillinen ja $F(s)(n) = 1$, jos $s(n)$ on pariton. Olkoon lehden b laputus $L(b) = \mathcal{N}_1$, kun $F(b) \in A$ ja $L(b) = ?$, kun $F(b) \notin A$. Nyt $B(T, L) = ?$ ja $B'(T, L) = \mathcal{N}_1$, sillä kummallakaan pelaajalla ei ole voittostrategiaa pelissä $G(f, T, L)$ millään $f \in \mathcal{N}_1$. Tietysti $?$ ja \mathcal{N}_1 voidaan esittää Borel*-joukkona, jonka peli on determinoitu.

Lemma 3.4 *Kaikilla $T \in \mathcal{T}$ luokat $\Sigma_T, \Sigma'_T, \Pi_T$ ja Π'_T ovat*

- i) *suljettuja jatkuvan sijoituksen suhteen*
- ii) *parametrisoituja.*

TODISTUS. i. Olkoon $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ jatkuva ja $B = B^{(\cdot)}(T, L) \subseteq \mathcal{Y}$ Borel*-joukko. Tällöin $F^{-1}B = B^{(\cdot)}(T, L')$, missä

$$\begin{cases} L'(t) = L(t), & \text{kun } t \in \text{Tr}[T] \\ L'(b) = F^{-1}L(b), & \text{kun } b \in [T]. \end{cases}$$

Koska F on jatkuva, niin $L'(b)$ on avoin (suljettu), jos $L(b)$ on. Olkoon $g \in F^{-1}B$. Tällöin $F(g) \in B$, joten \exists -lla on voittostrategia pelissä $G(F(g), T, L)$. Käyttämällä samaa strategiaa pelissä $G(g, T, L')$ \exists pääsee aina tilanteeseen, jossa $g \in L'(b) = F^{-1}L(b)$, joten $F(g) \in L(b)$. Kääntäen, jos $g \in B(T, L')$, niin \exists -lla on voittostrategia τ pelissä $G(g, T, L')$. Tällöin $g \in F^{-1}B$, koska käyttäen strategiaa τ pelissä $G(F(g), T, L)$ \exists pääsee aina asemaan, jossa $g \in L'(b)$, mistä seuraa $F(g) \in L(b)$.

ii. Olkoon \mathcal{X} tarkasteltava avaruus ja $\{N_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ sen topologian kanta. Olkoon $T \in \mathcal{T}$. Kun $b \in [T]$, niin asetetaan $U_b \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}_1$ ehdolla

$$U_b(f, g) \iff \exists \alpha < \omega_1 (f \in N_{g(\sigma(b^{\wedge} \langle \alpha \rangle))}).$$

Tämä on avoin, sillä jos $(f, g) \in U_b$, niin olkoon

$$\gamma = \max(g(\sigma(b^{\wedge} \langle \alpha \rangle)), \text{rad}(N_{g(\sigma(b^{\wedge} \langle \alpha \rangle))})) + 1,$$

jolloin $U((f, g), \gamma) \subseteq U_b$. Määritellään puun T laputus L seuraavasti

$$\begin{aligned} L(b) &= U_b, \text{ kun } b \text{ on parillinen lehti} \\ L(b) &= \neg U_b, \text{ kun } b \text{ on pariton lehti} \\ L(t) &= \cup, \text{ kun } t \text{ on parillinen solmu} \\ L(t) &= \cap, \text{ kun } t \text{ on pariton solmu} \end{aligned}$$

Tällöin L on Σ -laputus. Olkoot $U_T = B(T, L)$, $U'_T = B'(T, L)$, $\sim U_T = B(T, \sim L)$ ja $\sim U'_T = B'(T, \sim L)$. Kun on osoitettu, että U_T on universaalinen luokalle $\Sigma_T^- \mathcal{X}$, niin U'_T , $\sim U_T$ ja $\sim U'_T$ ovat luokkien $\Sigma_T^- \mathcal{X}$, $\Pi_T^- \mathcal{X}$ ja $\Pi_T'^- \mathcal{X}$ universaaliset relaatiot.

Väite. U_T on universaalinen luokalle $\Sigma_T^- \mathcal{X}$.

Tod. Olkoon L_1 puun T Σ -laputus joukolla \mathcal{X} . Valitaan funktio $g \in \mathcal{N}_1$ niin, että $L(b) = U_b(\cdot, g)$ kaikilla $b \in [T]$. Tällainen g voidaan valita, sillä ordinaalit $\sigma(b \hat{\langle \alpha \rangle})$, $\alpha \in \omega_1$, $b \in [T]$, ovat eri alkioita. Tällöin $B(T, L_1) = U_T(\cdot, g)$. \square

Ei-determinoituvuuden takia Borel*-joukkojen hierarkiaa ei saa tavanomaisesti lemmän 2.5 avulla. Saadaan vain seuraava heikompi tulos.

Korollaari 3.5 *Kaikilla $T \in \mathcal{T}$ pätee $\Sigma_T \neq \Pi'_T$ ja $\Sigma'_T \neq \Pi_T$.*

TODISTUS. Koska $\neg \Sigma_T = \Pi'_T$ ja $\neg \Pi_T = \Sigma'_T$, niin väitös seuraa lemmasta 2.5. \square

Lemma 3.6 *i) Jos $T \leq T'$, niin $\Sigma_T \subseteq \Sigma_{wT'}$ ja $\Sigma'_T \subseteq \Sigma'_{wT'}$.*

ii) Jos $T \ll T'$, niin $\Sigma_T \subseteq \Pi_{wT'}$ ja $\Sigma'_T \subseteq \Pi'_{wT'}$.

TODISTUS. Oletetaan, että Borel*-joukon määritelmässä on käytetty laputusta, joka toteuttaa ehdon $L(b) \in \Delta_1^0$.

i. Olkoon $F : T \rightarrow wT'$ lemmän 2.16 antama kuvaus. Olkoon L puun T Σ -laputus joukolla \mathcal{X} . Määritellään puun wT' Σ -laputus L' , jolle (T, L) ja (wT', L') ovat ekvivalentit. Kun $b \in [T]$, niin olkoon $L'(b') = L(b)$ kaikilla sellaisilla $b' \in [wT']$, joilla $b' \geq F(b)$. Kun $t' \notin F(T)$, $t \in \text{Tr}[T]$ ja $t' \in \text{succ}(F(t))$, niin asetetaan kaikille $b' \in wT'$, joille $b' \geq t'$

$$L'(b') = \begin{cases} \mathcal{X}, & \text{kun } t \text{ parillinen} \\ ?, & \text{kun } t \text{ pariton.} \end{cases}$$

Nyt jos pelaajalla \exists on voittostrategia τ pelissä $G(f, T, L)$, niin \exists :n voittostrategia pelissä $G(f, wT', L')$ on pysyä puussa $F(T)$ ja siirtää $F(t)$, kun t on strategian τ antama \exists :n siirto. Jos \forall siirtää sivuun puusta $F(T)$, niin \forall häviää. Sen jälkeen, kun on pelattu $F(b)$:n ohi, pelaajat voivat siirtää mielivaltaisesti. Siis \exists voittaa pelin $G(f, wT', L')$.

Olkoon τ pelaajan \exists voittostrategia pelissä $G(f, wT', L')$. Oletetaan, että pelissä $G(f, T, L)$ on päästy solmuun t ja on \exists :n vuoro siirtää. Nyt $\tau(F(t)) \in F(T)$, koska muuten \exists häviää. Tällöin valitaan \exists :n siirroksi t' , jolle $F(t') = \tau(F(t))$. Näin saadaan määriteltyä \exists :n voittostrategia peliin $G(f, T, L)$.

Samalla tavalla voidaan menetellä pelaajan \forall kohdalla.

ii. Lemman 2.17 nojalla $T \ll T' \iff \sigma T \leq T'$. Olkoon L puun T Σ -laputus joukolla \mathcal{X} . Määritellään puun σT Π -laputus L' , jolle (T, L) ja $(\sigma T, L')$ ovat ekvivalentit. Koska $\sigma T \leq wT$, niin kohdan i nojalla tästä seuraa väitös. Olkoon $L'(\langle t^- \xi \rangle_{\xi \leq \ell(t)}) = L(t)$ ja $L'(\langle b^- \xi \rangle_{\xi < \ell(b)}) = L(b)$, kun $t \in T$ ja $b \in [T]$. Olkoon muuten L' Π -laputus. Tällöin (T, L) ja $(\sigma T, L')$ ovat ekvivalentit, sillä puun σT solmuissa $\langle t^- \xi \rangle_{\xi < \ell(t)}$, $\ell(t)$ raja, pelaajalla \forall ei ole kuin yksi vaihtoehto siirtää, nimittäin $\langle t^- \xi \rangle_{\xi \leq \ell(t)}$. \square

Korollaari 3.7

$$\Sigma_T \subseteq \Delta_{\mu T} \text{ ja } \Sigma'_T \subseteq \Delta'_{\mu T}$$

TODISTUS. Väite seuraa edellisestä lemmasta ja lemmasta 2.17. \square

Lemma 3.8 *Jos $A_\xi \in \Sigma_{T_\xi}$, $\xi < \omega_1$, niin $\bigcup_{\xi < \omega_1} A_\xi \in \Sigma_{T'}$, $\bigcap_{\xi < \omega_1} A_\xi \in \Sigma_{T''}$, missä $T' = \sqcup_{\xi < \omega_1} T_\xi$ ja $T'' = \{(0, \xi)^\wedge s \mid s \in T_\xi, \xi < \omega_1\} \cup \{(0)\} \cup \{\langle \rangle\}$.*

Erityisesti $\bigcup_{\omega_1} \Sigma_T \subseteq \Sigma_{wT}$, $\bigcap_{\omega_1} \Sigma_T \subseteq \Sigma_{1+w(1+T)}$ ja $\bigcap_{\omega_1} \Sigma_T \subseteq \Pi_{wT}$.

TODISTUS. Olkoon $A = \cup_{\xi < \omega_1} A_\xi$, missä $A_\xi = B(T_\xi, L_\xi) \in \Sigma_{T_\xi}$. Tällöin $A = B(T', L)$, missä $L((b, \xi)) = L_\xi(b)$. Toisaalta $\cap A_\xi = B(T'', L)$, missä $L(\langle 0, \xi \rangle^b) = L_\xi(b)$, kun $b \in [T_\xi]$, ja L on muuten Σ -laputus. Viimeisen väitteen todistamiseksi olkoot $A_\xi = B(T, L_\xi)$, missä L_ξ on Σ -laputus. Tällöin $\cap A_\xi = B(wT, L)$, missä $L((b, \xi)) = L_\xi(b)$, kun $b \in [T_\xi]$, ja muuten L on Π -laputus. \square

Jos T on leveä (katso määritelmä 2.15), niin $\Sigma_T^{(\cdot)}$ on suljettu operaation \cup_{ω_1} suhteen. Koska $\mu T^\alpha = T^{\alpha+1}$, edellisestä lemmasta seuraa induktiolla, että $\Sigma_\alpha^0 \subseteq \Sigma_{T^\alpha}$ ja $\Pi_\alpha^0 \subseteq \Pi_{T^\alpha}$.

Korollaari 3.9 $\Sigma_{T^\gamma} = \Sigma_\alpha^0$ ja $\Pi_{T^\gamma} = \Pi_\gamma^0$ kaikilla $\omega \leq \gamma < \omega_2$ ja $\Sigma_{T^n} = \Sigma_{n+1}^0$ ja $\Pi_{T^n} = \Pi_{n+1}^0$ kaikilla $n < \omega$. Erityisesti $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{B}^d$.

TODISTUS. Merkitään todistuksen ajaksi avoimia joukkoja symbolilla Σ_0^0 ja $\Pi_0^0 = \neg \Sigma_0^0$. Todistetaan induktiolla γ :n suhteen. Koska $T^0 = \{\langle \rangle\}$, niin $\Sigma_{T^0} = \Sigma_0^0$ ja $\Pi_{T^0} = \Pi_0^0$. Oletetaan, että $A \in \Sigma_{T^{\gamma+1}}$, $A = B(T^{\gamma+1}, L)$. Merkitään $A_\xi = B(T^\gamma, L_\xi)$, missä $L_\xi(b) = L(\langle (\gamma, \xi) \rangle^b)$. Induktiooletuksen nojalla $A_\xi \in \Pi_\gamma$. Tällöin $A = \cup A_\xi$, joten $A \in \Sigma_{\gamma+1}^0$. Kun $A \in \Sigma_{T^\gamma}$, $\xi < \omega_1$ ja $\delta < \gamma$, niin merkitään $A_{(\xi, \delta)} = B(T^\delta, L_{(\xi, \delta)}) \in \Pi_{T^\delta}$, missä $L_{(\xi, \delta)}(b) = L(\langle (\xi, \delta) \rangle^b)$. Koska induktiooletuksen nojalla $A_{(\xi, \delta)} \in \Pi_\delta^0$ ja $A = \cup_{\xi, \delta} A_{(\xi, \delta)}$, niin $A \in \Sigma_\gamma^0$. \square

Borel*-hierarkian tasolle T , jossa T on refleksiivinen, pätee vahvoja sulkeumaominaisuuksia.

Lemma 3.10 Kun T on refleksiivinen, niin $\cap_{\omega_1} \Sigma_T \subseteq \Sigma_{wT}$.

TODISTUS. Lemmojen 3.8, 3.6 ja 2.21 nojalla

$$\cap_{\omega_1} \Sigma_T \subseteq \Sigma_{1+w(1+T)} \subseteq \Sigma_{wT}.$$

\square

Edellisen lemmän nojalla siis esimerkiksi $\Sigma_{\omega_1^{<\omega}}$ on suljettu operaatioiden \cup_{ω_1} ja \cap_{ω_1} suhteen.

Borel*-joukko voidaan ilmaista pelikvanttorin G^{ω_1} avulla:

Lause 3.11 $\mathbf{B}^* \subseteq G^{\omega_1} \Sigma_1^0$.

TODISTUS. Olkoon $B = B(T, L)$ Borel*-joukko, missä L on Σ -laputus. Olkoon

$$\begin{aligned} M_{\sigma(s)} &= L(s), & \text{jos } s \text{ on lehti } T\text{:ssä} \\ M_\alpha &= ?, & \text{muuten} \end{aligned} .$$

Tällöin $P = \{(f, g) \in \mathcal{N}_1^2 \mid f \in \cup_{\xi < \omega_1} M_{\sigma(g^\xi)}\}$ on avoin: Olkoon $(f, g) \in P$ ja olkoon $\xi < \omega_1$ sellainen, että $f \in M_{\sigma(g^\xi)}$. Valitaan $\gamma = \max\{\xi, \text{rad}(M_{\sigma(g^\xi)})\} + 1$. Tällöin $N((f, g), \gamma) \subseteq P$.

Väite. $B = G^{\omega_1} gP(f, g)$.

Tod. Olkoon $\tau \exists$:n voittostrategia pelissä $G(f, T, L)$ s.o. $f \in B$. Määritellään \exists :n voittostrategia ρ pelissä $G^{\omega_1} gP(f, g)$. Olkoon $t = \langle \alpha_\xi, b_\xi \rangle_{\xi < \gamma}$ pelin aikaisempien siirtojen jono. Jos $t \in T$, niin olkoon $\tau(t) = t^\wedge \langle \alpha_\gamma \rangle$. Asetetaan tällöin $\rho(t) = \alpha_\gamma$. Kun $t \notin T$, niin olkoon $\rho(t) = 0$. Tämä on \exists voittostrategia.

Olkoon kääntäen $\rho \exists$ voittostrategia pelissa $G^{\omega_1}gP(f, g)$. Kun $t \in T$ ja on \exists :n vuoro siirtää, niin olkoon

$$\tau(t) = t \hat{\langle} \rho(t) \rangle.$$

Tällöin τ on pelaajan \exists voittostrategia pelissä $G(f, T, L)$. \square

Esitetään operaatio, joka on eräänlainen yhdisteen ja leikkauksen yleistys. Olkoon T $\omega_2\omega_1$ -puu ja L kuvaus $\text{Tr}[T] \rightarrow \{\cup, \cap\}$. Olkoot $B_b \subseteq \mathcal{X}$, $b \in [T]$, joukkoja. Olkoon $L : T \cup [T] \rightarrow \{\forall, \exists\} \cup \{B_b \mid b \in [T]\}$, $L(t) = \exists$, kun t parillinen, $L(t) = \forall$, kun t pariton, ja $L(b) = B_b$, kun $b \in [T]$. Tällöin

$$d_T B_b$$

on joukko $\{f \in \mathcal{X} \mid \text{pelaaja } \exists \text{ voittaa pelin } (f, T, L)\}$.

Bairen avaruuden Borel-joukkojen määritelmän vastine avaruuksiin \mathcal{X} on seuraava.

Lause 3.12 \mathcal{B}^* on pienin luokka, joka sisältää avoimet ja suljetut joukot ja on suljettu operaatioiden $d_T, T \in \mathcal{T}$, suhteen.

TODISTUS. Merkitään kyseistä luokkaa symbolilla $\mathbf{B}_{\mathcal{T}}$. Kun $A = B(T, L) \in \mathcal{B}^*$, niin $A = d_T L(b) \in \mathbf{B}_{\mathcal{T}}$. Osoitetaan, että $\bigcup_{T \in \mathcal{T}} (d_T(\Sigma_1^0 \cup \Pi_1^0)) = \mathbf{B}_{\mathcal{T}}$. Olkoon $A = d_T B_b$, missä $B_b = d_{T_b} B_{b'}^b$ ja $B_{b'}^b \in \Sigma_1^0 \cup \Pi_1^0$, kun $b' \in [T_b]$. Tällöin $A = B(T', L')$, missä $t' \in T'$, jos ja vain jos joko $t' \in T$ tai $t' = b \hat{\langle} s$, jollakin $b \in [T]$ ja jollakin $s \in T_b$. Lisäksi $L'(t) = L(t)$, kun $t \in T$ ja $L'(b \hat{\langle} s) = L_b(s)$, kun $s \in T_b$. Jos $f \in A$, niin olkoon $\tau \exists$:n voittostrategia pelissä (f, T, L) ja olkoon τ_b pelaajan \exists voittostrategia pelissä $G(f, T_b, L_b)$, mikäli $f \in B(T_b, L_b)$. Yhdistämällä strategiat τ ja $\langle \tau_b \rangle$ saadaan \exists :n voittostrategia peliin $G(f, T, L)$. Jos τ on \exists :n voittostrategia pelissä $G(f, T', L')$, niin rajoittamalla τ puuhun T nähdään, että $f \in A$. Siis $A \in \bigcup_{T \in \mathcal{T}} (d_T(\Sigma_1^0 \cup \Pi_1^0))$. \square

3.2 Joitakin Borel*-joukkoja

Olkoon $f \in \mathcal{C}_1$. Merkitään

$$\begin{aligned} R_f &= \{(\alpha, \beta) \mid f(\sigma(\alpha, \beta)) = 0\} \text{ ja} \\ WF &= \{f \in \mathcal{C}_1 \mid R_f \text{ on hyvinperustettu relaatio}\} \end{aligned}$$

Klassisessa deskriptiivisessä joukko-opissa osoitetaan, että vastaava Bairen avaruuden joukko $WF = \{s \in \omega^\omega \mid R_s \text{ on hyvinperustettu}\}$ on Π_1^1 muttei Borel. Avaruuksissa \mathcal{X} on WF hierarkiassa hyvin alhaalla. Itse asiassa $WF \in \Pi_2^0 \subseteq \mathbf{B}$, sillä laskeva ketju voidaan koodata yhdellä ordinaalilla funktion σ avulla:

$$WF = \bigcap_{\alpha < \omega_1} \{f \mid [s = \sigma^{-1}(\alpha) \wedge \ell(s) \geq \omega] \Rightarrow \exists n < \omega [f(s(n+1), s(n)) \neq 0]\}.$$

Joukko $A \subseteq \omega_1$ on *cub*, jos A on suljettu ja rajoittamaton eli

- i) jos $\langle \alpha_n \rangle$ on kasvava jono joukon A alkioita, niin $\sup_{n < \omega} \alpha_n \in A$
- ii) kaikilla $\beta < \omega_1$ on olemassa $\alpha \in A$, jolle $\alpha > \beta$.

Joukko $A \subseteq \omega_1$ on *stationaarinen*, jos $A \cap C \neq \emptyset$ kaikilla cub-joukoilla C . Kun C_1 ja C_2 ovat cub-joukkoja, niin $C_1 \cap C_2$ on cub. Selvästi $C_1 \cap C_2$ on suljettu. Se on myös rajoittamaton, sillä jos $\beta < \omega_1$, niin on olemassa tätä suurempi $\alpha_1 \in C_1$, tätä suurempi $\beta_1 \in C_2$, tätä suurempi $\alpha_2 \in C_1$ ja niin edelleen; koska C_1 ja C_2 ovat suljettuja, niin $\beta < \sup \alpha_n = \sup \beta_n \in C_1 \cap C_2$. Kun $A \subseteq \omega_1$, niin olkoon $\chi_A \in \mathcal{C}_1$ sellainen, että $\chi_A(\xi) = 1 \iff \xi \in A$.

Määritelmä 3.13 Asetetaan

$$\begin{aligned} \mathit{CUB} &= \{\chi_A \in \mathcal{C}_1 \mid A \text{ sisältää cub-joukon}\} \\ \mathit{STAT} &= \{\chi_A \in \mathcal{C}_1 \mid A \text{ on stationaarinen}\}. \end{aligned}$$

Kun τ on funktio $\omega_1^{<\omega} \rightarrow \omega_1$, niin sanotaan, että ordinaali α on *suljettu funktion τ suhteen*, jos kaikilla s pätee

$$s \in \alpha^{<\omega} \Rightarrow \tau(s) < \alpha.$$

Lemma 3.14 Kun τ on funktio $\omega_1^{<\omega_1} \rightarrow \omega_1$, niin

$$C = \{\alpha \mid \alpha \text{ suljettu } \tau \text{ suhteen}\}.$$

on cub-joukko.

TODISTUS. Olkoot $\alpha_n \in C$, kun $n \in \omega$. Tällöin $\alpha = \sup \alpha_n \in C$, mikä nähdään seuraavasti. Jos $s \in \alpha^{<\omega}$, niin $s \in \alpha_n^{<\omega}$, jollakin $n < \omega$. Koska α_n on suljettu funktion τ suhteen, niin $\tau(s) < \alpha_n < \alpha$. Siis joukko C on suljettu. Osoitetaan, että joukko C on rajoittamaton. Jos $\alpha \in C$, niin olkoon $\beta_0 = \alpha + 1$. Määritellään induktiolla $\beta_{n+1} = \beta_n \cup \sup\{\tau(s) \mid s \in \beta_n^{<\omega}\}$. Ordinaali β_{n+1} on pienempi kuin ω_1 , koska joukko, josta supremum lasketaan, on numeroituva. Nyt $\beta = \bigcup_{n < \omega} \beta_n \in C$ ja $\beta > \alpha$. \square

Lause 3.15 $\mathit{CUB} \in \Delta_{\omega_1^{<\omega}}$ ja $\mathit{STAT} \in \Delta'_{\omega_1^{<\omega}}$.

TODISTUS. Olkoon

$$T = \{\langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle \mid \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n\}.$$

Merkitään $\bar{\alpha} = \langle \alpha_0, \alpha_1, \dots \rangle \in \omega_1^\omega$. Tälle puulle asetaan laputus

$$L(\bar{\alpha}) = \{f \in \mathcal{C}_1 \mid f(\sup_{n < \omega} \alpha_n) = 1\}.$$

Joukko $L(\bar{\alpha})$ on suljettu ja avoin. Olkoon L muuten Σ - tai Π -laputus. Tällöin $\mathit{CUB} = B(T, L)$, mikä nähdään seuraavasti:

Olkoon $\tau : \omega_1^{<\omega} \rightarrow \omega_1$ \exists :n voittostrategia pelissä $G(f, T, L)$. Joukko A , jolla $f = \chi_A$, sisältää cub-joukon $C = \{\alpha \mid \alpha \text{ suljettu } \tau\text{:n suhteen}\}$: Jos $\alpha \in C$, niin valitaan kasvava jono $\langle \alpha_n \rangle_{n \in \omega}$, jolle $\alpha = \sup_{n \in \omega} \alpha_n$. Pelataan peli, jossa \exists noudattaa voittostrategiaansa.

$$\begin{array}{ccccccc} \forall & & \langle \alpha_0 \rangle & & \langle \alpha_0, \beta_0, \alpha_{k_1} \rangle & & \dots \\ \exists & \langle \rangle & \langle \alpha_0, \beta_0 \rangle & & \langle \alpha_0, \beta_0, \alpha_{k_1}, \beta_1 \rangle & & \dots \end{array}$$

Yllä k_n on pienin k , jolle $\alpha_k > \beta_{k-1}$. Oletuksen nojalla tällainen k on olemassa. Koska \exists noudattaa voittostrategiaansa, niin $f(\alpha) = 1$ eli $\alpha \in A$, missä $\alpha = \sup \alpha_n = \sup \beta_n$.

Kun $f = \chi_A \in \mathcal{CUB}$, niin olkoon $C \subseteq A$ cubjoukko. Pelaajan \exists voittostrategia pelissä $G(f, T, L)$ on seuraava. Kun puussa T on edetty solmuun t ja on \exists :n vuoro siirtää, niin \exists valitsee sellaisen alkion $\alpha \in C$, että $\alpha > \max t$, ja siirtää $t \hat{\langle} \alpha$. Kun $b \in T$ on näin syntynyt puun oksa, niin koska C on cub, $\sup t \in C \subseteq A$. Siis \exists voittaa.

Joukko A on stationaarinen, jos $\mathcal{C}_{1r} A$ ei sisällä cub-joukkoa, joten $STAT = B'(T, L)$. \square

Konjektuuri on se, että voidaan todistaa väite $\mathcal{CUB} \notin \mathbf{B}$. Toistaiseksi voidaan todistaa vain:

Lause 3.16 \mathcal{CUB} ei ole Σ_2^0 eikä Π_2^0 .

TODISTUS. Koska jokainen joukko $U(f, \alpha)$ sisältää sekä \mathcal{CUB} :n että $\mathcal{C}_{1r} \mathcal{CUB}$:n alkioita, nähdään, että \mathcal{CUB} ei ole avoin eikä suljettu. Olkoot A_α , $\alpha < \omega_1$, suljettuja ja $\cup A_\alpha \subseteq \mathcal{CUB}$. Oletetaan lisäksi, että $A_\alpha \subseteq A_\beta$, kun $\alpha < \beta$. Konstruoidaan induktiolla jono (f_α) joukon $\mathcal{C}_{1r} \mathcal{CUB}$ alkioita ja samalla kasvava jono ordinaaleja $\langle \alpha_\xi \rangle$, joille pätee

$$U(f_\xi, \alpha_\xi) \subseteq \mathcal{C}_{1r} A_\xi \text{ ja } \lim_{\xi \rightarrow \omega_1} f_\xi \in \mathcal{CUBr} \bigcup_{\xi < \omega_1} A_\xi.$$

Olkoon f_0 nollafunktio. Se ei ole \mathcal{CUB} :ssa eikä siten A_0 :ssa, joten on olemassa säde α_0 , jolle $U(f_0, \alpha_0) \subseteq \mathcal{C}_{1r} A_0$. Oletetaan, että ylläolevat ehdot täyttävät $f_\xi, \alpha_\xi, \xi \leq \beta$ on määritelty. Olkoon $f_{\beta+1} = f_\beta \notin \mathcal{CUB}$. Koska $f_{\beta+1} \notin A_{\beta+1}$, niin valitaan sellainen $\alpha_{\beta+1} > \alpha_\beta$, että $U(f_{\beta+1}, \alpha_{\beta+1}) \subseteq \mathcal{C}_{1r} A_{\beta+1}$. Oletetaan sitten, että $\beta = \cup \beta$ ja $f_\xi, \alpha_\xi, \xi < \beta$ on määritelty. Olkoon f_β sellainen, että

$$f_\beta(\cup_{\xi < \beta} \alpha_\xi) = 1 \tag{1}$$

ja $f_\beta(\delta) = \max_{\xi < \beta} f_\xi(\delta)$, kun $\delta \neq \cup_{\xi < \beta} \alpha_\xi$. Tällöin $f_\beta \notin \mathcal{CUB}$, koska $f(\xi) = 0$, kun $\xi > \cup_{\xi < \beta} \alpha_\xi$. Valitaan sellainen $\alpha_\beta > \cup_{\xi < \beta} \alpha_\xi$, että $U(f_\beta, \alpha_\beta) \subseteq A_\beta$. Nyt $f = \lim_{\xi < \omega_1} f_\xi \in \mathcal{CUBr} \cup_{\alpha < \omega_1} A_\alpha$, sillä $f \in \cap_{\xi < \omega_1} U(f_\xi, \alpha_\xi)$ ja jos $f(\alpha_n) = 1$, kun $n < \omega$, niin $f(\cup_{n < \omega} \alpha_n) = 1$ ehdon 1 nojalla. Siis $\mathcal{CUB} \notin \Sigma_2^0$.

Samanlainen päättely osoittaa, että joukko \mathcal{CUB} ei ole myöskään Π_2^0 . Olkoot A_α , $\alpha < \omega_1$ avoimia ja $\mathcal{CUB} \subseteq A_\alpha$. Oletetaan lisäksi, että $A_\beta \subseteq A_\alpha$, kun $\alpha < \beta$. Konstruoidaan induktiolla jono (f_α) joukon \mathcal{CUB} alkioita ja samalla kasvava jono ordinaaleja $\langle \alpha_\xi \rangle$, joille pätee

$$U(f_\xi, \alpha_\xi) \subseteq A_\xi \text{ ja } \lim_{\xi \rightarrow \omega_1} f_\xi \in \bigcap_{\xi < \omega_1} A_\xi \text{r } \mathcal{CUB}.$$

Olkoon $f_0(\xi) = 1$, $\xi < \omega_1$. Koska $f \in \mathcal{CUB} \subseteq A_0$, niin on olemassa säde α_0 , jolle $U(f_0, \alpha_0) \subseteq A_0$. Oletetaan, että ylläolevat ehdot täyttävät $f_\xi, \alpha_\xi, \xi \leq \beta$ on määritelty. Olkoon $f_{\beta+1} = f_\beta \in \mathcal{CUB}$. Koska $f_{\beta+1} \in A_{\beta+1}$, niin valitaan sellainen $\alpha_{\beta+1} > \alpha_\beta$, että $U(f_{\beta+1}, \alpha_{\beta+1}) \subseteq A_{\beta+1}$. Oletetaan sitten, että $\beta = \cup \beta$ ja $f_\xi, \alpha_\xi, \xi < \beta$ on määritelty. Olkoon f_β sellainen, että

$$f_\beta(\cup_{\xi < \beta} \alpha_\xi) = 0 \tag{2}$$

ja $f_\beta(\delta) = \min_{\xi < \beta} f_\xi(\delta)$, kun $\delta \neq \cup_{\xi < \beta} \alpha_\xi$. Tällöin $f_\beta \in \mathcal{CUB}$, koska $f(\xi) = 1$, kun $\xi > \cup_{\xi < \beta} \alpha_\xi$. Valitaan sellainen $\alpha_\beta > \cup_{\xi < \beta} \alpha_\xi$, että $U(f_\beta, \alpha_\beta) \subseteq A_\beta$. Nyt $f = \lim_{\xi < \omega_1} f_\xi \in \cup_{\alpha < \omega_1} A_\alpha$ on \mathcal{CUB} , sillä $f \in \cap_{\xi < \omega_1} U(f_\xi, \alpha_\xi)$ ja jos $f(\alpha_n) = 1$, kun $n < \omega$, niin $f(\cup_{n < \omega} \alpha_n) = 0$ ehdon 2 nojalla. \square

4 Vaughtin joukot

4.1 Vaughtin joukon määritelmä

Tässä luvussa tutkitaan Vaughtin joukkoja. Ne ovat tason $T = \omega_1^{<\omega}$ Borel*-joukkoja, joiden määrittelevä peli on determinoitu. Tässä luvussa käytetään kontinuumihypoteesiä vain siihen, että Σ_1^0 on parametrisoitu. Vaughtin joukkojen avulla todistetaan, että on olemassa Borel*-joukkoja, jotka eivät ole Borel.

Merkitään $\text{Even} = \cup_{n < \omega} \omega_1^{2n}$. Joukon Even alkioita $\langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n \rangle$ merkitään symbolilla $\bar{\alpha}$. Kun $s \in \omega_1^\omega$, $s = \langle \alpha_1, \beta_1, \dots \rangle$, merkitään myös $s = \bar{\alpha}$. Asiayhteydestä selviää, onko kyse äärettömästä vai äärellisestä jonosta.

Määritelmä 4.1 Olkoon Γ pisteluokka. Joukko $A \subseteq \mathcal{X}$ on pisteluokassa $G_o^\omega(\Gamma)$, jos sillä on esitys

$$\begin{aligned} f \in A &\iff \exists \alpha_1 \forall \beta_1 \exists \alpha_2 \forall \beta_2 \dots (f \in \cup_{n < \omega} S_{\langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_n \rangle}) \\ &\iff G^\omega \bar{\alpha} P(f, \bar{\alpha}) \end{aligned}$$

missä $P = \{(f, \bar{\alpha}) \in \mathcal{X} \times \omega_1^\omega \mid f \in \cup_{n \in \omega} S_{\bar{\alpha} \cdot 2n}\}$ ja joukot $S_{\langle \alpha_1, \dots, \beta_n \rangle} \subseteq \mathcal{X}$ ovat luokassa Γ . Merkitään tällöin lyhyesti $A = G_o^\omega(\langle S_{\bar{\alpha}} \rangle_{\bar{\alpha} \in \text{Even}}) = G_o^\omega(\langle S_{\bar{\alpha}} \rangle)$ ja $G_o^\omega(f, \langle S_{\bar{\alpha}} \rangle) = G^\omega(f, P)$. Duaalisesti määritellään, että joukko B on pisteluokassa $G_c^\omega(\Gamma)$, jos joukolla B on esitys

$$\begin{aligned} f \in B &\iff \forall \alpha_1 \exists \beta_1 \forall \alpha_2 \exists \beta_2 \dots (f \in \cap_{n \in \omega} S_{\langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_n \rangle}) \\ &\iff \check{G}^\omega \bar{\alpha} Q(f, \bar{\alpha}) \end{aligned}$$

missä $Q = \{(f, \bar{\alpha}) \in \mathcal{X} \times \omega_1^\omega \mid f \in \cap_{n \in \omega} S_{\bar{\alpha} \cdot 2n}\}$ ja joukot $S_{\langle \alpha_1, \dots, \beta_n \rangle}$ ovat luokassa Γ . Vastaavasti määritellään $B = A = G_c^\omega(\langle S_{\bar{\alpha}} \rangle)$ ja $G_c^\omega(f, \langle S_{\bar{\alpha}} \rangle) = G^\omega(f, Q)$

Määritelmä 4.2 Määritellään induktiolla luokat $G_o^\omega(\gamma)$ ja $G_c^\omega(\gamma)$, $\gamma < \omega_2$:

$$\begin{aligned} G_o^\omega(0) &= \Sigma_1^0, & G_c^\omega(0) &= \Pi_1^0 \\ G_o^\omega(\gamma) &= G_o^\omega(\cup_{\beta < \gamma} G_c^\omega(\beta)), & G_c^\omega(\gamma) &= G_c^\omega(\cup_{\beta < \gamma} G_o^\omega(\beta)) \end{aligned}$$

Jos $A \in G_o^\omega(\gamma)$, niin sanotaan, että A on tason γ avoin Vaughtin joukko. Vastaavasti jos $A \in G_c^\omega(\gamma)$, niin A on tason γ suljettu Vaughtin joukko.

Lemma 4.3 Kaikilla luokilla Γ $\neg G_o^\omega(\Gamma) = G_c^\omega(\neg\Gamma)$. Erityisesti $\neg G_c^\omega(\gamma) = G_o^\omega(\gamma)$ kaikilla $\gamma < \omega_2$.

TODISTUS. Olkoon $A = G_o^\omega(\langle S_{\bar{\alpha}} \rangle)$, missä $S_{\bar{\alpha}} \in \Gamma$. Osoitetaan, että peli $G_o^\omega(f, \langle S_{\bar{\alpha}} \rangle)$ on determinoitu kaikilla $f \in \mathcal{X}$. Oletetaan, että pelaajalla \exists ei ole voittostrategiaa pelissä $G_o^\omega(f, \langle S_{\bar{\alpha}} \rangle)$. Määritellään pelaajalle \forall voittostrategia. Kaikilla \exists :n valinnoilla α_1 on olemassa \forall :n siirto β_1 siten, että $\neg[\exists \alpha_2 \forall \beta_2 \dots (f \in \cup_{n < \omega} S_{\langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_n \rangle})]$. Olipa sen jälkeen pelaajan \exists siirto α_2 mikä tahansa, pelaajalla \forall on siis olemassa

siirto β_2 siten, että $\neg[\exists\alpha_3\forall\beta_3\dots(f \in \bigcup_{n<\omega} S_{\langle\alpha_1,\beta_1,\dots,\beta_n\rangle})]$. Näin jatkaen saadaan pelaajalle \forall strategia. Se on voittostrategia, koska jos näin pelatun erän $\bar{\alpha} = \langle\alpha_1,\beta_1,\dots\rangle$ jälkeen $f \in \bigcup_{n<\omega} S_{\bar{\alpha}-2n}$, niin on olemassa $n < \omega$, jolle $f \in S_{\langle\alpha_1,\beta_1,\dots,\beta_n\rangle}$. Tällöin päisisikin $\exists\alpha_{n+1}\forall\beta_{n+1}\dots(f \in \bigcup_{n<\omega} S_{\langle\alpha_1,\beta_1,\dots,\beta_n\rangle})$, mikä on ristiriita. Siis $f \notin \bigcup_{n<\omega} S_{\bar{\alpha}-2n}$. (Tämä lemmän todistus on itse asiassa sama kuin Galen–Stewartin lause.) \square

Luokka $G_o^\omega(\gamma)$ on suljettu operaation G_o^ω suhteen, minkä osoittaa seuraava lemma.

Lemma 4.4 $G_o^\omega(G_o^\omega(\Gamma)) = G_o^\omega(\Gamma)$

TODISTUS. Olkoon joukolla A esitys $f \in A \iff$

$$\exists\alpha_1\forall\beta_1\dots(f \in \bigcup_n S_{\langle\alpha_1,\dots,\beta_n\rangle}), \quad (3)$$

missä joukoilla $S_{\langle\alpha_1,\dots,\beta_n\rangle}$ on esitys $f \in S_{\langle\alpha_1,\dots,\beta_n\rangle} \iff$

$$\exists\gamma_1\forall\delta_1\dots(f \in \bigcup_m S'_{\langle\alpha_1,\dots,\beta_n,\gamma_1,\dots,\delta_m\rangle}) \quad (4)$$

missä $S'_{\langle\alpha_1,\dots,\delta_m\rangle} \in \Gamma$. Kun α on ordinaali, niin merkitään $\alpha' = 2\alpha$ ja $\alpha'' = 2\alpha + 1$.
Olkoon

$$S''_{\langle\alpha'_1,\beta_1,\dots,\alpha'_n,\beta_n,\gamma''_1,\delta_1,\dots,\gamma''_n,\delta_n\rangle} = S'_{\langle\alpha_1,\beta_1,\dots,\alpha_n,\beta_n,\gamma_1,\delta_1,\dots,\gamma_n,\delta_n\rangle}$$

ja muuten $S''_{\langle\alpha_1,\dots,\delta_n\rangle} = ?$.

Väite. $f \in A$, jos ja vain jos

$$\exists\alpha_1\forall\beta_1\dots(f \in \bigcup_n S''_{\langle\alpha_1,\dots,\beta_n\rangle}). \quad (5)$$

Tod. Jos $f \in A$, niin olkoon τ pelaajan \exists voittostrategia pelissä (3). Olkoon $\tau_{\alpha_1,\dots,\beta_n}$ pelaajan \exists voittostrategia pelissä (4), mikäli jossakin pelissä, missä \exists noudattaa strategiaa τ , päädytään kysymykseen $f \in S_{\langle\alpha_1,\dots,\beta_n\rangle}$. Pelaajan \exists voittostrategia pelissä (5) on pelata $\tau(\alpha_1, \dots, \beta_k)'$, missä $\alpha'_i, \beta_i, i \leq k$ ovat pelissä aikaisemmin pelatut siirrot. Tätä strategiaa \exists noudattaa siihen saakka kunnes $f \in S_{\langle\alpha_1,\dots,\beta_n\rangle}$. Sen jälkeen \exists pelaa

$$\tau_{\alpha_1,\dots,\beta_n}(\gamma_1, \delta_1, \dots, \gamma_n, \delta_n)''$$

missä γ''_i, δ_i ovat pelissä aikaisemmin ja β_n :n jälkeen pelatut siirrot. Näin pelaten \exists pääsee kysymykseen

$$f \in \bigcup_m S''_{\langle\alpha'_1,\beta_1,\dots,\alpha'_n,\beta_n,\gamma''_1,\delta_1,\dots,\gamma''_m,\delta_m\rangle}$$

mikä pätee, sillä $S''_{\langle\alpha'_1,\dots,\gamma''_1,\dots\rangle} = S'_{\langle\alpha_1,\dots,\gamma_1,\dots\rangle}$.

Merkitään $\alpha'/2 = \alpha$ ja $(\alpha'' - 1)/2 = \alpha$. Jos nyt \exists :llä on voittostrategia τ pelissä (5), niin \exists voittostrategia pelissä (3) on pelata $\tau(\alpha_1, \dots, \beta_n)/2$, missä $\alpha_i/2, \beta_i, i \leq n$ ovat aikaisemmat siirrot pelissä (3). Tällöin \exists pääsee tilanteeseen, jossa $f \in S_{\langle\alpha_1/2,\dots,\beta_n\rangle}$, koska \exists :n voittostrategia pelissä (4) on pelata $(\tau(\alpha_1, \dots, \beta_n, \gamma_1, \delta_1, \dots, \gamma_m) - 1)/2$, missä $(\gamma_i - 1)/2, \delta_i, i \leq m$, ovat pelin (4) aikaisemmat siirrot. \square

Lemma 4.5 *Luokat $G_o^\omega(\gamma)$ ja $G_c^\omega(\gamma)$ sisältävät avoimet ja suljetut joukot ja ovat suljettuja jatkuvan sijoituksen sekä operaatioiden \cap_{ω_1} ja \cup_{ω_1} suhteen kaikilla $1 \leq \gamma < \omega_2$. Erityisesti $B \subseteq G_o^\omega(1) \cap G_c^\omega(1)$.*

TODISTUS. Olkoon $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ jatkuva ja $A = G_o^\omega(\langle S_{\bar{\alpha}} \rangle)$, missä $S_{\bar{\alpha}} \in G_c^\omega(\alpha)^-\mathcal{Y}$. Oletetaan, että $F^{-1}[S_{\bar{\alpha}}] \in G_c^\omega(\gamma)^-\mathcal{Y}$. Tällöin $F^{-1}[A] = G_o^\omega(\langle F^{-1}S_{\bar{\alpha}} \rangle)$. Induktiolla siis saadaan, että $G_c^\omega(\gamma)$ ja $G_o^\omega(\gamma)$ ovat suljettuja jatkuvan sijoituksen suhteen.

$G_o^\omega(\gamma)$ on suljettu ω_1 -leikkauksen ja -yhdisteen suhteen: Olkoot A_ξ , $\xi < \omega_1$, $G_o^\omega(\gamma)$ -joukkoja, joilla on esitys $A_\xi = G_o^\omega(\langle S_{\bar{\alpha}}^\xi \rangle)$. Tällöin, kun merkitään $S_{\langle \xi, \delta, \alpha_1, \dots, \beta_n \rangle} = S_{\langle \alpha_1, \dots, \beta_n \rangle}^\xi$, niin

$$f \in \bigcup_{\xi < \omega_1} A_\xi \iff \exists \xi \forall \delta \exists \alpha_1 \forall \beta_1 \dots (f \in \bigcup_n S_{\langle \xi, \delta, \alpha_1, \dots, \beta_n \rangle}),$$

joten $\bigcup A_\xi \in G_o^\omega(\gamma)$. Jos merkitään $S_{\langle \delta, \xi, \alpha_1, \dots, \beta_n \rangle} = S_{\langle \alpha_1, \dots, \beta_n \rangle}^\xi$, niin

$$f \in \bigcap_{\xi < \omega_1} A_\xi \iff \exists \delta \forall \xi \exists \alpha_1 \forall \beta_1 \dots (f \in \bigcup_n S_{\langle \xi, \delta, \alpha_1, \dots, \beta_n \rangle}),$$

joten $\bigcap A_\xi \in G_o^\omega(\gamma)$.

Olkoon A suljettu. Olkoon $S_{\bar{\alpha}} = A$ kaikilla $\bar{\alpha} \in \cup_{n < \omega} \omega_1^{< 2n}$. Tällöin $A = G_o^\omega(\langle S_{\bar{\alpha}} \rangle) \in G_c^\omega(1)$. Toisaalta A voidaan esittää muodossa $\bigcap A_\xi$ joillakin avoimilla joukoilla A_ξ . Ylläolevan nojalla $A = \bigcap A_\xi \in G_o^\omega(1)$. Induktiolla saadaan siten, että $A \in G_o^\omega(\gamma) \cap G_c^\omega(\gamma)$ kaikilla $\gamma < \omega_2$. \square

Luokat $G_o^\omega(\alpha)$ ja $G_c^\omega(\alpha)$ sisältyvät Borel*-joukkoihin, mutta alhaiselle tasolle ja tietynlaisella laputuksella.

Lause 4.6 *Olkoon $T = \omega_1^{< \omega}$. Kaikilla $\gamma < \omega_2$*

- i) $G_o^\omega(\gamma) \subseteq \Sigma_T$ ja $G_c^\omega(\gamma) \subseteq \Pi_T$
- ii) $G_o^\omega(\gamma) \cup G_c^\omega(\gamma) \subseteq \mathcal{B}^d$.

TODISTUS. Todistetaan lause induktiolla γ :n suhteen. Arvolla $\gamma = 0$ väite on selvä. Olkoon sitten joukoilla S_s , $s \in \omega_1^{2n}$, esitys $S_s = B(T, L_s)$. Tällöin jos

$$f \in A \iff \exists \alpha_1 \forall \beta_1 \dots (f \in \bigcup_n S_{\langle \alpha_1, \dots, \beta_n \rangle}),$$

niin $A = B(T, L)$, missä

$$L(b) = \bigcup_n L_{\langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n \rangle}(\gamma_1, \delta_1, \dots),$$

kun $b = \langle \alpha'_1, \beta_1, \dots, \alpha'_n, \beta_n, \gamma''_1, \delta_1, \dots \rangle$ ja $L_s(b) = ?$ muuten. Peli $G(f, T, L)$ on determinoitu, lemmän 4.3 nojalla. \square

Lemma 4.7 *Kaikilla $\gamma < \omega_2$ luokat $G_o^\omega(\gamma)$ ja $G_c^\omega(\gamma)$ ovat parametrisoituja.*

TODISTUS. Todistetaan lemma induktiolla γ :n suhteen. Todistusta varten tarvitaan pari määritelmää. Kun $g \in \mathcal{N}_1$, niin olkoot $g_{\bar{\alpha}}, \bar{\alpha} \in \bigcup_{n < \omega} \omega_1^{2n}$, funktioita, jotka on määritelty ehdolla

$$g_{\bar{\alpha}}(\xi) = g(\sigma(\xi, \bar{\alpha})) \text{ kaikilla } \xi < \omega_1.$$

Kun B on Vaughtin joukko, niin olkoon $d(B)$ pienin ordinaali β , jolle $B \in G_c^\omega(\beta)$.

Tapaus $\gamma = 0$. Lemma 3.4 todistaa parametrisonnin luokille $G_o^\omega(0)$ ja $G_c^\omega(0)$.

Tapaus $\gamma > 0$. Oletetaan, että väite on todistettu luokille $G_c^\omega(\beta)$, $\beta < \gamma$. Olkoon $G : \omega_1 \rightarrow \gamma$ funktio, joka on vakiokuvaus $\xi \mapsto \beta$, kun $\gamma = \beta + 1$, ja $\bigcup_{\xi < \omega_1} G(\xi) = \gamma$, kun $\gamma = \cup \gamma$. Valitaan $S_{\langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n \rangle}^U \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}_1$ universaaliseksi luokalle

$$G_c^\omega(G(\sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_n))) \text{ } \mathcal{X}.$$

Määritellään U_o^γ ehdolla

$$(f, g) \in U_o^\gamma \iff \exists \alpha_1 \forall \beta_1 \exists \alpha_2 \forall \beta_2 \dots ((f, g_{\bar{\alpha}}) \in \bigcup_{n < \omega} S_{\langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_n \rangle}^U). \quad (6)$$

Väite. U_o^γ on universaalinen luokalle $G_o^\omega(\gamma)$.

Tod. Koska kuvaus $g \mapsto g_{\bar{\alpha}}$ on jatkuva, niin U_o^α on luokassa $G_o^\omega(\gamma)$. Olkoon $B = G_o^\omega(\langle S_{\bar{\alpha}}^B \rangle) \in G_o^\omega(\gamma)$. Määritellään puu $T \subseteq \omega_1^{<\omega}$, $g \in \mathcal{N}_1$ ja tasot sekä järjestyksen säilyttävä injektio $F : \omega_1^{<\omega} \rightarrow T$, joille pätee

$$S_{\bar{\alpha}}^U(\cdot, g_{\bar{\alpha}}) = \begin{cases} S_s^B, & \text{kun } \bar{\alpha} = F(\hat{s} \langle \alpha, \beta \rangle) \\ ?, & \text{muuten.} \end{cases} \quad (7)$$

Olkoon $\pi : \omega_1 \times \omega_1 \rightarrow \omega_1$ injektio. Määritellään F seuraavasti: Olkoon $F(\langle \rangle) = \langle \rangle$. Oletetaan $F(s) = \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n \rangle$. Asetetaan

$$F(\hat{s} \langle \alpha \rangle) = F(s) \hat{\langle} \pi(\alpha', \alpha) \rangle,$$

missä α' on pienin α' , jolle $G(\sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \pi(\alpha', \alpha))) \geq d(S_s^B)$. Lisäksi $F(\hat{s} \langle \alpha, \beta \rangle) = F(\hat{s} \langle \alpha \rangle) \hat{\langle} \beta \rangle$. Olkoon $T = F(\omega_1^{<\omega})$. Nyt on mahdollista valita ehdon (7) täyttävä g .

Osoitetaan $B = U_o^\gamma(\cdot, g)$. Olkoon $f \in \mathcal{X}$, $G_1 = G_o^\omega(f, \langle S_{\bar{\alpha}}^U(\cdot, g_{\bar{\alpha}}) \rangle)$ ja $G_2 = G_o^\omega(f, \langle S_{\bar{\alpha}}^B \rangle)$.

Jos $f \notin B$, niin olkoon ρ pelaajan \forall voittostrategia pelissä G_2 . Jos \exists pelaa pelissä G_1 niin, ettei aikaisempien siirtojen jono ole puussa T , niin \exists häviää varmasti. Muussa tapauksessa pelaajan \forall voittostrategia saadaan seuraavasti: Kun pelissä G_1 on siirretty strategian mukaisesti jono $F(s)$, missä $s = \langle \alpha_1, \dots, \beta_n, \alpha_{n+1} \rangle$, niin \forall siirtää $\beta_{n+1} = \tau(\langle \alpha_1, \dots, \beta_n, \alpha_{n+1} \rangle)$. Tällöin ehdon (7) nojalla

$$f \notin S_{\langle \alpha_1, \dots, \beta_n \rangle}^B = S_{F(\langle \alpha_1, \dots, \beta_n, \alpha_{n+1}, \beta_{n+1} \rangle)}^U.$$

Siis \forall voittaa.

Jos $f \notin U_o^\gamma(\cdot, g)$, niin olkoon $\tau \forall$:n voittostrategia pelissä G_1 . Määritellään \forall :n voittostrategia peliin G_2 . Oletetaan, että pelissä G_2 on siirretty strategian mukaisesti $\langle \alpha_1, \dots, \beta_n \rangle$. Kun \exists siirtää α_{n+1} , niin \forall katsoo \forall :n siirtoa

$$\tau(F(\langle \alpha_1, \dots, \beta_n, \alpha_{n+1} \rangle)) = \beta_{n+1}$$

pelissä G_1 ja siirtää β_{n+1} myös pelissä G_2 . Tällöin $f \notin S_{\langle \alpha_1, \dots, \beta_n \rangle}^B = S_{F(\langle \alpha_1, \dots, \beta_{n+1} \rangle)}^U$.

□

Tämän lemmän seurauksena saadaan lemموjen 2.5 ja 4.3 nojalla:

Lause 4.8 Luokat $G_c^\omega(\gamma)$ ja $G_o^\omega(\gamma)$, $\gamma < \omega_2$, muodostavat aidon hierarkian eli on olemassa $G_o^\omega(\gamma)$ -joukko, joka ei ole $G_c^\omega(\gamma)$ ja on olemassa $G_c^\omega(\gamma)$ -joukko, joka ei ole $G_o^\omega(\gamma)$. Erityisesti on olemassa Borel*-joukot B_γ , $\gamma < \omega_2$, jotka eivät ole B.

$$\begin{array}{ccccccc} G_o(0) & & G_o(1) & & G_o(\gamma) & & \\ \neq & \subseteq & \neq & \cdots \subseteq & \neq & \subseteq & \cdots \\ G_c(0) & & G_c(1) & & G_c(\gamma) & & \end{array}$$

4.2 Approksimaatiot

Määritellään Vaughtin joukkojen approksimaatiot Vaughtin pelikaavojen approksimoinnin tapaan.

Olkoon $\mathbf{D} = \{S_{\bar{\alpha}} \mid \bar{\alpha} \in \text{Even}\}$ perhe avaruuden \mathcal{X} osajoukkoja. Olkoon A joukko, jolla on esitys $A \Leftrightarrow \forall \alpha_1 \exists \beta_1 \dots (f \in \bigcap_{n < \omega} S_{\langle \alpha_1, \dots, \beta_n \rangle})$. Joukon A **D**-*approksimaatiot* ovat seuraavat. Kun $s = \langle \alpha_1, \dots, \beta_n \rangle$, niin olkoot

$$\begin{aligned} A^0(s) &= \bigcap_{n < \omega} S_{\langle \alpha_1, \dots, \beta_n \rangle} \\ A^{\delta+1}(s) &= \forall \alpha_{n+1} \exists \beta_{n+1} A^\delta(s^\wedge \langle \alpha_{n+1}, \alpha_{n+1} \rangle) \\ A^\delta(s) &= \bigcap_{\xi < \delta} A^\xi(s), \text{ kun } \delta = \cup \delta. \end{aligned}$$

Merkitään $A^\delta = A^\delta(\langle \rangle)$. Approksimaatioille pätevät seuraavat seikat.

Lemma 4.9 i) $A^\alpha(s) \subseteq A^\beta(s)$, kun $\beta < \alpha$.

ii) Kaikilla $\delta < \omega_2$ $A \subseteq A^\delta$.

iii) $A^{\omega_2} = A$.

TODISTUS. i. Todistetaan induktiolla δ :n suhteen, että kaikilla $s = \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n \rangle$ pätee $A^{\delta+1}(s) \subseteq A^\delta(s)$.

Tapaus $\delta = 0$. Jos $f \in A^1(s)$, niin $\forall \alpha_{n+1} \exists \beta_{n+1} (f \in \bigcap_{k \leq n+1} S_{s^\wedge \langle \alpha_{n+1}, \beta_{n+1} \rangle - 2k})$, mistä seuraa $f \in \bigcap_{k \leq n} S_{\langle \alpha_1, \dots, \beta_k \rangle} = A^0(s)$.

Tapaus $\delta = \beta + 1$. Jos $f \in A^{\delta+1}(s)$, niin $\forall \alpha_{n+1} \exists \beta_{n+1} (f \in A^{\beta+1}(s^\wedge \langle \alpha, \beta \rangle))$. Induktiooletuksen mukaan $\forall \alpha_{n+1} \exists \beta_{n+1} (f \in A^\beta(s^\wedge \langle \alpha, \beta \rangle))$, joten $f \in A^{\beta+1}(s) = A^\delta(s)$.

Tapaus $\delta = \cup \delta$. Kun $f \in A^{\delta+1}(s)$, niin $\forall \alpha \exists \beta (f \in A^\delta(s^\wedge \langle \alpha, \beta \rangle))$, joten kaikilla $\xi < \delta$ $\forall \alpha \exists \beta (f \in A^\xi(s^\wedge \langle \alpha, \beta \rangle))$. Siis kaikilla $\xi < \delta$ $f \in A^{\xi+1}(s)$, joten $f \in A^\delta(s)$.

ii. Todistetaan induktiolla δ :n suhteen yleisempi väite, että kaikilla $\delta < \omega_2$ ja $s = \langle \alpha_1, \dots, \beta_n \rangle$, $n < \omega$,

$$\left(\forall \alpha_{n+1} \exists \beta_{n+1} \dots [f \in \bigcap_{k < \omega} S_{(s^\wedge \bar{\alpha}) - 2k}] \Rightarrow f \in A^\delta(s) \right),$$

missä $\bar{\alpha} = \langle \alpha_{n+1}, \beta_{n+1}, \dots \rangle$. Lemman väite saadaan arvolla $n = 0$.

Tapaus $\delta = 0$. Olkoon s kuten yllä ja oletetaan

$$\forall \alpha_{n+1} \exists \beta_{n+1} \left(\forall \alpha_{n+2} \exists \beta_{n+2} \dots (f \in \bigcap_{n < \omega} S_{(s^\wedge \bar{\alpha}) - 2k}) \right). \quad (8)$$

Tällöin $f \in \bigcap_{m \leq n} S_{s^\wedge - 2m} = A^0(s)$.

Tapaus $\delta = \beta + 1$. Oletetaan (8). Tällöin soveltamalla induktio-oletusta sulkulausekkeeseen saadaan

$$\forall \alpha_{n+1} \exists \beta_{n+1} (f \in A^\beta(s^{\langle \alpha_{n+1}, \beta_{n+1} \rangle})),$$

mikä määritelmän mukaan tarkoittaa $f \in A^{\beta+1}(s)$.

Tapaus $\delta = \cup \delta$. Oletetaan (8). Soveltamalla induktio-oletusta sulkulausekkeeseen saadaan kaikilla $\xi < \delta \forall \alpha_{n+1} \exists \beta_{n+1} (f \in A^\xi(s^{\langle \alpha_{n+1}, \beta_{n+1} \rangle}))$, eli $f \in A^{\xi+1}(s)$. Siis $f \in A^\delta(s)$.

iii. Todistetaan ensin apuväite, että kaikilla $s = \langle \alpha_1, \dots, \beta_n \rangle$

$$f \in \bigcap_{\delta < \omega_2} A^\delta(s) \Rightarrow \forall \alpha_{n+1} \exists \beta_{n+1} (f \in \bigcap_{\delta < \omega_2} A^\delta(s^{\langle \alpha_{n+1}, \beta_{n+1} \rangle})). \quad (9)$$

Tehdään vasta oletus, että

$$\exists \alpha_{n+1} \forall \beta_{n+1} \left(f \in \bigcup_{\delta < \omega_2} \neg A^\delta(s^{\langle \alpha_{n+1}, \beta_{n+1} \rangle}) \right).$$

Kun α_{n+1} on sellainen, että ylläoleva ehto on voimassa, niin olkoon $\delta_{\langle \alpha_{n+1}, \beta_{n+1} \rangle}$ sellainen δ , että $f \in \neg A^\delta(s^{\langle \alpha_{n+1}, \beta_{n+1} \rangle})$. Olkoon δ_0 näiden ordinaalien $\delta_{\langle \alpha_{n+1}, \beta_{n+1} \rangle}$ supremum. Nyt $\delta_0 < \omega_2$, koska ordinaaleja $\delta_{\langle \alpha_{n+1}, \beta_{n+1} \rangle}$ on korkeintaan ω_1 kappaletta. Kohdan i nojalla $\neg A^\delta(s^{\langle \alpha, \beta \rangle}) \subseteq \neg A^{\delta_0}(s^{\langle \alpha, \beta \rangle})$ kaikilla $\delta < \delta_0$. Siis saadaan, että $\exists \alpha_{n+1} \forall \beta_{n+1} (f \in \neg A^{\delta_0}(s^{\langle \alpha_{n+1}, \beta_{n+1} \rangle}))$ eli $f \notin A^{\delta_0+1}(s)$, mikä on ristiriita.

Olkoon sitten $f \in \bigcap_{\delta < \omega_2} A^\delta$. Määritellään pelaajan \exists strategia τ peliin, joka osoittaa, että $f \in A$. Oletetaan, että $\tau^- \bigcup_{k < n} \omega_1^{2k+1}$ on määritelty. Kun $s \in \omega_1^{2n}$, niin valitaan ehdon (9) nojalla kullekin α_{n+1} sellainen β_{n+1} , että $f \in \bigcap_{\delta < \omega_2} A^\delta(s^{\langle \alpha_{n+1}, \beta_{n+1} \rangle})$, mikäli $f \in \bigcap_{\delta < \omega_2} A^\delta(s)$, ja muuten olkoon β_{n+1} mielivaltainen. Asetetaan $\tau(s^{\langle \alpha_{n+1} \rangle}) = \beta_{n+1}$. Osoitetaan, että τ on \exists :n voittostrategia. Olkoon $\bar{\alpha} = \langle \alpha_1, \beta_1, \dots \rangle$ pelin kulku, jossa on noudatettu strategiaa τ . Koska $f \in A^0$, niin $f \in S_\emptyset$. Ehdon (9) nojalla saadaan

$$f \in \bigcap_{\delta < \omega_2} A^\delta(\bar{\alpha} \smallfrown 2k) \Rightarrow f \in \bigcap_{\delta < \omega_2} A^\delta(\bar{\alpha} \smallfrown 2k + 2),$$

joten kaikilla k $f \in A^0(\bar{\alpha} \smallfrown 2k) = \bigcap_{n \leq k} S_{\bar{\alpha} \smallfrown n}$. \square

Korollari 4.10 *Jos A on tason 1 suljettu Vaughtin joukko, niin A voidaan esittää leikkauksena*

$$\bigcap_{\xi < \omega_2} A^\xi$$

missä joukot A^ξ ovat Borel-joukkoja.

TODISTUS. Olkoon $\mathbf{D} = \{S_{\bar{\alpha}}\}$ on perhe avoimia joukkoja ja $A = G_c^\omega(\mathbf{D})$. Induktiolla on helppo nähdä, että joukon A \mathbf{D} -approksimaatio on Borel-joukko. \square

Avoimien Vaughtin joukkojen approksimaatiot saadaan suljettujen Vaughtin joukkojen approksimaatioiden duaaleina. Siis jokainen tason 1 avoin Vaughtin joukko A voidaan esittää yhdisteenä $A = \bigcup_{\xi < \omega_2} A_\xi$, missä joukot A_ξ ovat Borel-joukkoja.

4.3 Esihyvinjärjestys avoimille Vaughtin joukoille

Tässä luvussa todistetaan säännöllisyystuloksia luokille $G_o^\omega(1)$ ja $G_c^\omega(1)$. Kalustona käytetään normeja ja pelikvanttorille G^ω kehitettyä teoriaa Moschovakin kirjasta [11].

Olkoon $\leq \subseteq \mathcal{X}^2$. Relaation \leq *aito osa*, $<$, on relaatio $f < g \iff f \leq g \wedge f \neq g$. Relaatio \leq on *esihyvinjärjestys* joukolla $A \subseteq \mathcal{X}$, jos \leq on refleksiivinen, transitiivinen, yhtenäinen eli kaikilla $f, g \in A$ $f \leq g$ tai $g \leq f$ ja hyvinperustettu eli ei ole olemassa jonoa $f_0, f_1, \dots \in A$, jolle

$$f_0 > f_1 > \dots$$

Siis esihyvinjärjestys poikkeaa hyvinjärjestyksestä vain siinä, ettei vaadita antisymmetrisyyttä. Havaitaan, että puu $(T, <_T)$ on hyvinperustettu määritelmän 2.18 mielessä, mikäli relaatio $t \leq s \iff s <_T t$ on hyvinperustettu ylläolevassa mielessä.

Normi joukolla A on kuvaus $\varphi : A \rightarrow \text{ON}$. Normi φ on *säännöllinen*, jos φ on surjektio jollekin ordinaalille. Liitetään normiin φ relaatio \leq^φ joukolla A asettamalla kaikille $f, g \in A$:

$$f \leq^\varphi g \iff \varphi(f) \leq \varphi(g).$$

Tällöin \leq^φ on esihyvinjärjestys joukolla A . Kääntäen jos \leq on esihyvinjärjestys joukolla A , niin asettamalla kaikille $f \in A$

$$\varphi(f) = \sup\{\varphi(g) + 1 \mid g \in A \wedge g < f\}$$

saadaan säännöllinen normi joukolla A .

Määritelmä 4.11 Olkoot Γ ja Γ' pisteluokkia.

- i) Ominaisuus *Reduction*(Γ, Γ') on voimassa, jos jokaisella \mathcal{X} ja jokaisella $A, B \in \Gamma^- \mathcal{X}$, on olemassa $A', B' \in \Gamma'^- \mathcal{X}$, joille pätee

$$A' \subseteq A, B' \subseteq B, A' \cup B' = A \cup B \text{ ja } A' \cap B' = ?.$$

Sanotaan tällöin, että pari A', B' *reduoi* parin A, B . *Reduction*(Γ) tarkoittaa ominaisuutta *Reduction*(Γ, Γ).

- ii) Ominaisuus *Separation*(Γ, Γ') on voimassa, jos jokaisella \mathcal{X} ja jokaisella piste-
vierailla $A, B \in \Gamma^- \mathcal{X}$ on olemassa $C \in \Gamma'^- \mathcal{X}$, jolle pätee

$$A \subseteq C \text{ ja } C \cap B = ?.$$

Tällöin joukko C *separoi* A :n ja B :n. *Separation*(Γ) tarkoittaa ominaisuutta *Separation*($\Gamma, \Gamma \cap \neg\Gamma$).

- iii) Kun $A \subseteq \mathcal{X}$, niin kuvaus $\varphi : A \rightarrow \text{ON}$ on Γ -normi, jos relaatiot \leq_φ ja $<_\varphi$:

$$\begin{aligned} f \leq_\varphi g &\iff A(f) \wedge [\neg A(g) \vee \varphi(f) \leq \varphi(g)] \\ f <_\varphi g &\iff A(f) \wedge [\neg A(g) \vee \varphi(f) < \varphi(g)] \end{aligned}$$

ovat luokassa $\Gamma^- \mathcal{X}^2$.

- iv) Ominaisuus $\text{Prewellordering}(\Gamma, \Gamma')$ on voimassa, jos jokaiselle \mathcal{X} ja jokaiselle $A \in \Gamma^- \mathcal{X}$ on olemassa Γ' -normi φ . Ominaisuus $\text{Prewellordering}(\Gamma)$ tarkoittaa ominaisuutta $\text{Prewellordering}(\Gamma, \Gamma)$.

Seuraavat lemmat osoittavat määritelmän 4.11 ominaisuuksien suhteet.

Lause 4.12 *Jos Γ on sopiva ja $\text{Prewellordering}(\Gamma)$, niin $\text{Reduction}(\Gamma)$*

TODISTUS. Olkoot $A, B \in \Gamma^- \mathcal{X}$. Olkoon $C(f, \alpha) \iff [A(f) \wedge \alpha = 0] \vee [B(f) \wedge \alpha = 1]$. Koska Γ on sopiva, niin $C \in \Gamma$. Olkoon φ C :n Γ -normi. Asetetaan

$$\begin{aligned} f \in A' &\iff (f, 0) \leq_{\varphi} (f, 1) \\ f \in B' &\iff (f, 1) <_{\varphi} (f, 0) \end{aligned}$$

Nyt $A', B' \in \Gamma$ ja pari A', B' separoi parin A, B : Nimittäin jos $f \in A \cap B$, niin $(f, 0), (f, 1) \in C$, joten jos $(f, 1) <_{\varphi} (f, 0)$, niin $f \in B'$, muuten $f \in A'$. Jos taas esimerkiksi $f \in A \setminus B$, niin $(f, 0) \in C$ ja $(f, 1) \notin C$, joten $(f, 0) \leq_{\varphi} (f, 1)$. Jos $f \notin A \cup B$, niin $(f, 0), (f, 1) \notin C$, joten $f \notin A' \cup B'$. \square

Lemma 4.13 *Jos $\text{Reduction}(\Gamma)$, niin $\text{Separation}(\neg\Gamma)$.*

TODISTUS. Olkoot $A, B \in \neg\Gamma^- \mathcal{X}$ erillisiä. Kun pari $A', B' \in \neg\Gamma$ redusoi parin $\mathcal{X} \text{r } A, \mathcal{X} \text{r } B$, niin koska $A' \cup B' = (\mathcal{X} \text{r } A) \cup (\mathcal{X} \text{r } B) = \mathcal{X}$, $A' \subseteq \mathcal{X} \text{r } A$ ja $B' \subseteq \mathcal{X} \text{r } B$, pätee $A' = \mathcal{X} \text{r } B'$, $A \subseteq A'$ ja $A' \cap B = ?$. Tämä tarkoittaa sitä, että $A' \in \Delta$ ja A' separoi parin A, B . \square

Lemma 4.14 *Jos Γ on sopiva ja $\text{Reduction}(\Gamma)$, niin $\neg\text{Separation}(\Gamma)$.*

TODISTUS. Tehdään vastaoletus, että $\text{Separation}(\Gamma, \Delta)$ on voimassa. Olkoon $U(f, g) \subseteq \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_1$ universaalinen luokalle $\Gamma^- \mathcal{N}_1$. Olkoon $G : f \mapsto (f^0, f^1)$ jatkuva bijektio $\mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_1$. Määritellään

$$A(f) \iff U(f, f^0) \text{ ja } B(f) \iff U(f, f^1).$$

Koska Γ on sopiva, niin $A, B \in \Gamma$. Redusoikoon pari $A', B' \in \Gamma$ parin A, B . Separoikoon $C \in \Delta$ parin A', B' . Valitaan sellaiset $g_0, g_1 \in \mathcal{N}_1$, joille

$$C = U(\cdot, g_0) \text{ ja } \mathcal{X} \text{r } C = U(\cdot, g_1).$$

Olkoon $h = G^{-1}(g_1, g_0)$. Tästä seuraa ristiriita, sillä jos $h \in C$, niin $U(h, h^0)$ eli $U(h, g_1)$ eli $h \notin C$ ja toisaalta jos $h \notin C$, niin $U(h, h^1)$ eli $U(h, g_0)$ eli $h \in C$. \square

Lemma 4.15 *Olkoon Γ sopiva. Oletetaan, että kaikilla \mathcal{X} ja kaikilla $P \in \Gamma^- (\mathcal{X} \times \omega_1^{\omega})$ pelit $G^{\omega}(f, P)$ ovat determinoituja. Jos P :llä on Γ -normi, niin $G^{\omega} sP(f, s)$:llä on $G^{\omega}(\Gamma)$ -normi.*

TODISTUS. Tämä on Moschovakin [11] *The Norm Transfer lemma* 6D3 s. 325. Lemman 6D3:n todistus soveltuu, vaikka siinä pelien siirrot ovat luonnollisia lukuja ordinaalien asemesta.

Olkoon $Q(f) \iff$

$$\forall \alpha_0 \exists \alpha_1 \forall \alpha_2 \dots (P(f, \alpha_0, \alpha_2, \dots)). \quad (10)$$

Olkoon φ Γ -normi joukolla P . Määritellään kaikille $f, g \in \mathcal{X}$ peli $H(f, g)$ seuraavan kaavion mukaisesti

$$\begin{array}{l|cccc} \text{I} & \alpha_0 & \beta_1 & \alpha_2 & \cdots \\ \text{II} & & \beta_0 & \alpha_1 & \cdots \end{array}$$

Olkoon $\bar{\alpha} = \langle \alpha_0, \alpha_1, \dots \rangle$ ja $\bar{\beta} = \langle \beta_0, \beta_1, \dots \rangle$. Pelaaja II voittaa, jos $(f, \bar{\alpha}) \leq_\varphi (g, \bar{\beta})$. Tällöin siis pelaaja I voittaa, jos $\neg P(f, \bar{\alpha}) \vee (g, \bar{\beta}) <_\varphi (f, \bar{\alpha})$. Asetetaan

$$f \leq^* g \iff \text{II voittaa } H(f, g)\text{:n.}$$

Koska Γ on suljettu jatkuvan sijoituksen suhteen, on relaatio \leq^* luokassa $\mathcal{G}^\omega(\Gamma)$.

Seuraavat lemmat osoittavat, että on olemassa normi ψ , jolle $\leq^* = \leq_\psi$.

Lemma 1. Relaatio \leq^* on transitiivinen.

Tod. Oletetaan, että $f \leq^* g$ ja $g \leq^* h$. Olkoot τ_1 ja τ_2 II:n voittostrategiat peleissä $H(f, g)$ ja $H(g, h)$. Pelaajan II voittostrategia τ_3 pelissä $H(f, h)$ saadaan seuraavasti. Pelissä $H(f, g)$ siirretään ordinaaleja α_i ja β_i . Pelissä $H(g, h)$ siirretään ordinaaleja β_i ja γ_i . Olkoot $\alpha_{2n}, \gamma_{2n+1}$ I:n siirrot pelissä $H(f, h)$. Siirrot β_i ovat tarvittavia apusiirtoja. Seuraavat yhtälöt määrittelevät induktiolla pelaajan II strategian peliin $H(f, h)$.

$$\begin{aligned} \beta_{2n} &= \tau_1(\langle \alpha_{2i}, \beta_{2i}, \beta_{2i+1}, \alpha_{2i+1} \rangle_{i < n}, \alpha_{2n}) \\ \gamma_{2n} &= \tau_2(\langle \beta_{2i}, \gamma_{2i}, \gamma_{2i+1}, \beta_{2i+1} \rangle_{i < n}, \beta_{2n}) \\ \beta_{2n+1} &= \tau_2(\langle \beta_{2i}, \gamma_{2i}, \gamma_{2i+1}, \beta_{2i+1} \rangle_{i < n}, \beta_{2n}, \gamma_{2n}, \gamma_{2n+1}) \\ \alpha_{2n+1} &= \tau_1(\langle \alpha_{2i}, \beta_{2i}, \beta_{2i+1}, \alpha_{2i+1} \rangle_{i < n}, \alpha_{2n}, \beta_{2n}, \beta_{2n+1}) \end{aligned}$$

Tämä strategia on pelaajan II voittostrategia, koska pelin lopussa on muodostettu jonot $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ ja $\bar{\gamma}$, joille

$$(f, \bar{\alpha}) \leq_\varphi (g, \bar{\beta}) \text{ ja } (g, \bar{\beta}) \leq_\varphi (h, \bar{\gamma}).$$

Lemma 2. Ei olemassa sellaista jonoa f_0, f_1, f_2, \dots , että $Q(f_0)$ ja kaikilla $i < \omega$ I voittaa pelit $H(f_i, f_{i+1})$.

Tod. Tehdään vastaoletus. Olkoon $\tau \exists$:n voittostrategia pelissä 10 funktiolle f_0 ja τ_i I:n voittostrategia pelissä $H(f_i, f_{i+1})$, $i < \omega$. Pelissä $H(f_i, f_{i+1})$ siirretään alkioita α_j^i ja α_j^{i+1} . Yhtälöt

$$\begin{aligned} \alpha_{2n}^i &= \tau_i(\langle \alpha_{2j}^i, \alpha_{2j}^{i+1}, \alpha_{2j+1}^{i+1}, \alpha_{2j+1}^i \rangle_{j < 2n}) \\ \alpha_{2n+1}^0 &= \tau(\langle \alpha_j^0 \rangle_{j < 2n+1}) \\ \alpha_{2n+1}^{i+1} &= \tau_i(\langle \alpha_{2j}^i, \alpha_{2j}^{i+1}, \alpha_{2j+1}^{i+1}, \alpha_{2j+1}^i \rangle, \alpha_{2n}^i, \alpha_{2n}^{i+1}) \end{aligned}$$

määräävät induktiolla jonot $\bar{\alpha}^i$. Koska on noudatettu strategiaa τ , niin pätee $P(f_0, \bar{\alpha}^0)$. Toisaalta koska on käytetty strategioita τ_i , niin I voittaa pelit $H(f_i, f_{i+1})$, joten pätee $\neg[(f_i, \bar{\alpha}^i) \leq_\varphi (f_{i+1}, \bar{\alpha}^{i+1})]$ ja $P(f_i, \bar{\alpha}^i)$ kaikilla $i < \omega$. Siten saadaan

$$\varphi(f_0, \bar{\alpha}_0) > \varphi(f_1, \bar{\alpha}_1) > \varphi(f_2, \bar{\alpha}_2) > \dots$$

mikä on ristiriita.

Lemma 3. Relaaation \leq^* rajoittuma joukkoon Q on esihyvinjärjestys.

Tod. Lemma 1 todistaa, että \leq^* on transitiivinen. Jos $f, g \in Q$ ja ei päde $f \leq^* g$, niin I voittaa pelin $H(f, g)$. Jos myös I voittaisi pelin $H(g, f)$, niin jono f, g, f, g, \dots olisi ristiriidassa lemmän 2 kanssa. Koska peli $H(g, f)$ on determinoitu, niin $g \leq^* f$. Kun $f \in Q$, niin $f \leq^* f$, koska muuten jono f, f, \dots olisi ristiriidassa lemmän 2 kanssa.

Olkoon ψ relaatioon \leq^* liittyvä säännöllinen normi joukolla Q eli

$$\psi(f) \leq \psi(g) \iff f \leq^* g, \text{ kun } f, g \in Q$$

Lemma 4. Kaikilla $f, g \in \mathcal{X}$

$$f \leq^* g \iff f \leq_\psi g$$

Tod. Oletetaan ensin $f \leq_\psi g$, joten erityisesti $f \in Q$. Jos myös $g \in Q$, niin $f \leq^* g$, koska \leq_ψ ja \leq^* yhtyvät määritelmänsä nojalla. Olkoon $g \notin Q$. Tällöin pelissä 10 \exists :llä on voittostrategia τ_1 funktiolle f ja \forall :lla voittostrategia τ_2 funktiolle g . Tällöin pelissä $H(f, g)$, kun pelaaja II valitsee siirrot α_{2i+1} käyttäen strategiaa τ_1 ja siirrot β_{2i} käyttäen strategiaa τ_2 , niin $P(f, \bar{\alpha})$ ja $\neg P(g, \bar{\beta})$. Siis pelaajalla II on voittaa pelin $H(f, g)$ eli $f \leq^* g$.

Kääntäen oletetaan, että $f \leq^* g$. Tällöin pelaajalla II on voittostrategia τ pelissä $H(f, g)$. Rajoittamalla peli $H(f, g)$ siirtoihin α_i osoittaa τ , että $f \in Q$. Jos $g \in Q$, niin ψ :n määritelmän nojalla $f \leq_\psi g$. Jos $g \notin Q$, niin $f \leq_\psi g$.

Todistetaan, että myös $<_\psi$ on luokassa $G^\omega(\Gamma)$. Olkoon $H'(f, g)$ peli

$$\begin{array}{c|cccc} \text{I} & \beta_0 & \alpha_1 & \beta_2 & \cdots \\ \text{II} & & \alpha_0 & \beta_1 & \cdots, \end{array}$$

missä pelaaja I voittaa, jos $(f, \bar{\alpha}) <_\varphi (g, \bar{\beta})$. Määritelmänsä mukaan relaatio

$$(f, g) \in R \iff \text{pelaaja I voittaa } H'(f, g)\text{:n}$$

on luokassa $G^\omega(\Gamma)$, joten riittää osoittaa:

Lemma 5. Kaikilla f, g

$$f <_\psi g \iff \text{I voittaa pelin } H'(f, g)$$

Tod. Oletetaan ensin $f <_\psi g$ ja $f \in Q$, mutta $g \notin Q$. Tällöin I voittaa $H'(f, g)$:n helposti valitsemalla siirrot niin, että lopussa $P(f, \bar{\alpha})$ ja $\neg P(g, \bar{\beta})$.

Jos $f <_\psi g$ ja $f, g \in Q$, niin lemmän 4 nojalla $\neg(g \leq^* f)$, joten I voittaa pelin $H(f, g)$ strategialla τ_1 . Oletetaan, että vastoin väitettä II voittaisi pelin $H'(f, g)$ strategialla τ_2 . Olkoon ρ strategia, joka osoittaa, että $g \in Q$. Määritellään näiden strategioiden avulla jonot $\bar{\beta}^i$, $i \in \omega$, $\bar{\alpha}^i$, $i > 0$, seuraavien yhtälöiden avulla:

$$\begin{aligned} \beta_{2n}^k &= \tau_1(\langle \beta_i^k, \alpha_i^{k+1}, \alpha_{i+1}^{k+1}, \beta_{i+1}^k \rangle_{i < 2n}) \\ \alpha_{2n}^{k+1} &= \tau_2(\langle \beta_{2i}^{k+1}, \alpha_{2i}^{k+1}, \alpha_{2i+1}^{k+1}, \beta_{2i+1}^{k+1} \rangle_{i < 2n}, \beta_{2n}^{k+1}) \\ \alpha_{2n+1}^{k+1} &= \tau_1(\langle \beta_{2i}^k, \alpha_{2i}^{k+1}, \alpha_{2i+1}^{k+1}, \beta_{2i+1}^k \rangle_{i < 2n}, \beta_{2n}^k, \alpha_{2n}^{k+1}) \\ \beta_{2n+1}^{k+1} &= \tau_2(\langle \beta_{2i}^{k+1}, \alpha_{2i}^{k+1}, \alpha_{2i+1}^{k+1}, \beta_{2i+1}^{k+1} \rangle_{i < 2n}, \beta_{2n}^{k+1}, \alpha_{2n}^{k+1}, \alpha_{2n+1}^{k+1}) \\ \beta_{2n+1}^0 &= \rho(\langle \beta_i^0 \rangle_{i < 2n+1}) \end{aligned}$$

Tällöin seuraavat ovat voimassa

- $P(g, \bar{\beta}^0)$, koska on noudatettu strategiaa ρ .
- $\neg(g, \bar{\beta}^0) \leq_{\varphi} (f, \bar{\alpha}^1)$ ja siten $(f, \bar{\alpha}^1) <_{\varphi} (g, \bar{\beta}^0)$, koska on noudatettu strategiaa τ_1 .
- $\neg(f, \bar{\alpha}^1) <_{\varphi} (g, \bar{\beta}^1)$ ja siten $(g, \bar{\beta}^1) \leq_{\varphi} (f, \bar{\alpha}^1)$, koska on noudatettu strategiaa τ_2 .
- Ja niin edelleen.

Täten saadaan

$$\varphi(g, \bar{\beta}^0) > \varphi(f, \bar{\alpha}^1) \geq \varphi(g, \bar{\beta}^1) > \varphi(f, \bar{\alpha}^2) \geq \dots$$

mikä on ristiriita.

Oletetaan lopuksi, että I voittaa pelin $H'(f, g)$, mutta $\neg(f <_{\psi} g)$. Katsomalla pelin $H'(f, g)$ siirtoja α_i osoittaa I:n voittostrategia, että $f \in Q$. Tällöin siis pätee $g \leq_{\varphi} f$, joten II voittaa pelin $H(g, f)$. Olkoon τ pelaajan I voittostrategia pelissä $H'(g, f)$ ja ρ pelaajan II voittostrategia pelissä $H(g, f)$. Määritellään näiden strategioiden avulla jonot $\bar{\alpha}$ ja $\bar{\beta}$ seuraavasti

$$\begin{aligned} \beta_{2n} &= \tau(\langle \beta_{2i}, \alpha_{2i}, \alpha_{2i+1}, \beta_{2i+1} \rangle_{i < 2n}) \\ \alpha_{2n} &= \rho(\langle \beta_{2i}, \alpha_{2i}, \alpha_{2i+1}, \beta_{2i+1} \rangle_{i < 2n}, \beta_{2n}) \\ \alpha_{2n+1} &= \tau(\langle \beta_{2i}, \alpha_{2i}, \alpha_{2i+1}, \beta_{2i+1} \rangle_{i < 2n}, \beta_{2n}, \alpha_{2n}) \\ \beta_{2n+1} &= \rho(\langle \beta_{2i}, \alpha_{2i}, \alpha_{2i+1}, \beta_{2i+1} \rangle_{i < 2n}, \beta_{2n}, \alpha_{2n}, \alpha_{2n+1}) \end{aligned}$$

Tällöin

$$(f, \bar{\alpha}) <_{\varphi} (g, \bar{\beta}) \wedge (g, \bar{\beta}) \leq_{\varphi} (f, \bar{\alpha})$$

mikä on ristiriita. \square

Kun Γ on pisteluokka, niin olkoon $\Gamma^{*-} \mathcal{X} \times \omega_1^{\omega}$ sellaisten joukkojen $P \subseteq \mathcal{X} \times \omega_1^{\omega}$ luokka, että on olemassa joukot $S_{\bar{\alpha}} \subseteq \Gamma^{-} \mathcal{X}$ niin, että

$$P(f, \bar{\alpha}) \iff f \in \bigcup_{n < \omega} S_{\bar{\alpha} \cdot 2n}.$$

Tällöin kaikilla \mathcal{X} ja kaikilla $P \in \Gamma^{*-} \mathcal{X} \times \omega_1^{\omega}$ on peli $G^{\omega}(f, P)$ determinoitu. Lisäksi $G_o^{\omega}(\Gamma) = G^{\omega}(\Gamma^*)$.

Kun Φ on operaattori luokalla Γ , niin sanotaan, että luokka Γ' on Γ :n Φ -kanta, jos

- jos $A \in \Gamma'$, niin $\neg A \in \Gamma'$
- Jos $A \in \Gamma$, niin on olemassa joukot $A_{\xi} \in \Gamma'$, joille $A = \Phi(\langle A_{\xi} \rangle)$.

Esimerkki 4.16 i) Δ_1^0 on \cup_{ω_1} -kanta Σ_1^0 :lle

ii) Δ_1^0 on G_o^{ω} -kanta $G_o^{\omega}(1)$:lle. Tämä seuraa lemmojen 4.4 ja 4.5 avulla

$$\Pi_1^0 = G_c^{\omega}(0) \subseteq G_o^{\omega}(\Delta_1^0) \text{ ja } G_o^{\omega}(1) \subseteq G_o^{\omega}(G_o^{\omega}(\Delta_1^0)) = G_o^{\omega}(\Delta_1^0)$$

Lause 4.17 i) Prewellordering($G_o^{\omega}(1)$).

ii) Reduction($G_o^{\omega}(1)$).

iii) Separation($G_c^\omega(1)$).

TODISTUS. Olkoon A $G_o^\omega(1)$ -joukko. A voidaan esittää muodossa

$$A = G_o^\omega(\langle S_{\langle \alpha_1, \dots, \beta_n \rangle} \rangle),$$

missä joukot $S_{\bar{\alpha}}$ ovat avoimia kantajoukkoja. Osoitetaan, että joukolle $P: (f, \bar{\alpha}) \in P \iff f \in \bigcup_{n < \omega} S_{\langle \alpha_1, \dots, \beta_n \rangle}$ voidaan määrittellä $(\Pi_1^0)^*$ -normi. Olkoon

$$\varphi(f, \bar{\alpha}) = \min \{n \mid f \in S_{\langle \alpha_1, \dots, \beta_n \rangle}\}$$

Relaatioille \leq_φ ja $<_\varphi$ saadaan yhtäpitävät ehdot

$$\begin{aligned} (f_0, \bar{\alpha}^0) \leq_\varphi (f_1, \bar{\alpha}^1) &\iff \bigcup_{n < \omega} [f_0 \in S_{\langle \alpha_1^0, \dots, \beta_n^0 \rangle} \wedge f_1 \notin \bigcap_{m \leq n} S_{\langle \alpha_1^1, \dots, \beta_m^1 \rangle}] \\ (f_0, \bar{\alpha}^0) <_\varphi (f_1, \bar{\alpha}^1) &\iff \bigcup_{n < \omega} [f_0 \in S_{\langle \alpha_1^0, \dots, \beta_n^0 \rangle} \wedge f_1 \notin \bigcap_{m < n} S_{\langle \alpha_1^1, \dots, \beta_m^1 \rangle}]. \end{aligned}$$

jotka ovat luokassa $(\Pi_1^0)^*$, koska $S_{\bar{\alpha}} \in \Delta_1^0$. Siis φ on $(\Pi_1^0)^*$ -normi joukolla P . Lemman 4.15 nojalla joukolla $G^\omega(P)$ on $G^\omega((\Pi_1^0)^*)$ -normi eli A :lla on $G_o^\omega(1)$ -normi.

Lemmat 4.12 ja 4.13 todistavat sen jälkeen kohdat ii ja iii. \square

5 Projektiiviset joukot

Tässä luvussa tarkastellaan avaruuksien \mathcal{X} analyttisten ja koanalyttisten joukkojen teoriaa ja näiden joukkojen suhdetta Borel*-joukkoihin.

Joukko $A \subseteq \mathcal{X}$ on *analyttinen* eli Σ_1^1 , jos on olemassa suljettu $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}_1$, jolle $A = \exists \mathcal{N}_1 P = \exists P$ eli

$$f \in A \iff \exists g \in \mathcal{N}_1 ((f, g) \in P).$$

Joukko on *koanalyttinen* eli Π_1^1 , jos se on analyttisen joukon komplementti. Induktiivisesti asetetaan $\Sigma_{n+1}^1 = \exists \Pi_n^1$ ja $\Pi_n^1 = \neg \Sigma_n^1$. Lisäksi merkitään $\Delta_n^1 = \Sigma_n^1 \cap \Pi_n^1$. Kutsutaan perheen $\bigcup_{n < \omega} \Sigma_n^1$ joukkoja *projektiivisiksi*.

Olkoon $\mathcal{T}(\mathcal{X}) = \{T \subseteq \text{Seq}_{\mathcal{X}} \mid \forall \alpha \forall s [s \in T \Rightarrow s^- \alpha \in T]\}$. Kun $T \in \mathcal{T}(\mathcal{X})$, niin olkoon

$$[T] = \{f \in \mathcal{X} \mid f = \cup \bar{b}, \bar{b} \text{ } \omega_1\text{-oksa } T\text{:ssä}\}.$$

Lemma 5.1 *Joukko $A \subseteq \mathcal{X}$ on suljettu jos ja vain jos $A = [T]$, jollakin $T \in \mathcal{T}(\mathcal{X})$.*

TODISTUS. Jos A on suljettu, niin olkoon $T = \{\bar{f}(\alpha) \mid f \in A, \alpha < \omega_1\}$. Tällöin selvästi $A \subseteq [T]$. Kun $f \in [T]$, niin on olemassa alkio $f_\xi \in A$ niin, että $\lim_{\xi \rightarrow \omega_1} f_\xi = f$. Koska A on suljettu, niin $f \in A$.

Kääntäen $[T]$ on suljettu, sillä jos $f \notin [T]$, niin on olemassa $\xi < \omega$, jolle $f^- \xi \notin T$, joten $U(f, \xi) \subseteq \mathcal{X} \setminus [T]$. \square

Kun $T \subseteq \text{Seq}(\mathcal{X} \times \omega_1^{\omega_1})$, niin joukko $\wp[T] = \{f \in \mathcal{X} \mid \exists g [(f, g) \in T]\}$ on analyttinen. Jokainen analyttinen joukko voidaan esittää tässä muodossa.

Lause 5.2 *i) Luokat Σ_1^1 ja Π_1^1 ovat suljettu jatkuvan sijoituksen suhteen.*

ii) Kun oletetaan CH, niin luokat Σ_1^1 ja Π_1^1 ovat parametrisoituja.

iii) Luokka Σ_1^1 on suljettu operaatioiden \exists , \cup_{ω_1} ja \cap_{ω_1} suhteen. Luokka Π_1^1 on suljettu operaatioiden \forall , \cup_{ω_1} ja \cap_{ω_1} suhteen.

iv) $\exists\mathbf{B} = \Sigma_1^1$ ja $\forall\mathbf{B} \subseteq \Pi_1^1$.

TODISTUS. Riittää todistaa väitteet luokalle Σ_1^1 .

i. Olkoon $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ jatkuva ja $A \in \Sigma_1^1\text{-}\mathcal{Y}$. Tällöin on olemassa suljettu $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}_1$, jolle $f \in A \iff \exists g P(f, g)$. Tällöin $F^{-1}(A) = \exists g F^{-1}[P(f, g)] \in \Sigma_1^1$, koska $F^{-1}[P(f, g)]$ on suljettu.

ii. Olkoon $U_c \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}_1^2$ universaalinen luokalle $\Pi_1^0\text{-}\mathcal{X} \times \mathcal{N}_1$. Tällöin relaatio U ,

$$U(f, g) \iff \exists h[(f, h, g) \in U_c].$$

on universaalinen luokalle $\Sigma_1^1\text{-}\mathcal{X}$: Jos $A \subseteq \mathcal{X}$ on Σ_1^1 , niin A on muotoa $\exists P(f, h)$ jollakin suljetulla $P(f, h) \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}_1$. Tällöin jollakin $g \in \mathcal{N}_1$ $P = \{(f, h) \mid U_c(f, h, g)\}$. Siis $A = U(\cdot, g)$. Joukon U komplementti on universaalinen luokalle $\Pi_1^1\text{-}\mathcal{X}$.

iii. Olkoon $g \mapsto \langle g^\xi \rangle_{\xi < \omega_1}$ kuvaus $\mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_1^{\omega_1}$, joka on määritelty ehdolla $g^\xi(\delta) = g(\sigma(\xi, \delta))$. Olkoon nyt $A = \exists f \exists g P(\cdot, f, g)$, missä P on suljettu. Tällöin $A = \exists h P(\cdot, h^0, h^1)$. Koska relaatio $P(f, h^0, h^1)$ on suljettu, niin A on analyttinen. Osoitetaan, että Σ_1^1 on suljettu operaatioiden \cup_{ω_1} ja \cap_{ω_1} suhteen. Olkoot $A_\xi = \{f \mid \exists g((f, g) \in P_\xi)\}$. Tällöin

$$\begin{aligned} f \in \cup_{\xi < \omega_1} A_\xi &\iff \exists \xi \exists g[(f, g) \in P_\xi] \\ &\iff \exists g \exists h[(f, g) \in P_{h(0)}] \\ &\iff \exists g[(f, g^0) \in P_{g^1(0)}] \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} f \in \cap_{\xi < \omega_1} A_\xi &\iff \forall \xi \exists g[(f, g) \in P_\xi] \\ &\iff \exists g \forall \xi[(f, g^\xi) \in P_\xi] \\ &\iff \exists g[(f, g) \in \cap_{\xi < \omega_1} \{(f, g) \mid (f, g^\xi) \in P_\xi\}] \end{aligned}$$

iv. Selvästi jokainen suljettu joukko on analyttinen. Edellisen kohdan nojalla $\mathbf{B} \subseteq \Sigma_1^1$, joten $\exists\mathbf{B} \subseteq \exists\Sigma_1^1 = \Sigma_1^1$. \square

Lemman 2.5 nojalla saadaan:

Korollaari 5.3 *On olemassa Σ_1^1 -joukko, joka ei ole Π_1^1 , ja Π_1^1 -joukko, joka ei ole Σ_1^1 .*

Lemma 5.4 $\mathcal{B}^* \subseteq \Sigma_1^1$ ja $\mathcal{B}' \subseteq \Pi_1^1$.

TODISTUS. Kun A on Borel*-joukko $B(T, L)$, niin piste f on joukossa A , jos ja vain jos pelaajalla \exists on voittostrategia pelissä $G(f, T, L)$. Tämä ilmaistuna symbolimuodossa on seuraava

$$f \in A \iff \exists g \in \mathcal{N}_1 \forall s \in \omega_1^{<\omega_1} (\tau_g * s \in \text{Tr}[T] \vee \exists \alpha [\tau_g * s^- \alpha \in [T] \wedge f \in L(\tau_g * s^- \alpha)])$$

Relaatio

$$P(f, g) \iff \forall s \in \omega_1^{<\omega_1} (\tau_g * s \in T \vee \exists \alpha [\tau_g * s^- \alpha \in [T] \wedge f \in L(\tau_g * s^- \alpha)])$$

on Borel, koska relaatiot $(g, s) \in P_1 \iff \tau_g * s \in T$, $(g, s, \alpha) \in P_2 \iff (\tau_g * s^- \alpha \in [T])$ ja $(f, g, s, \alpha) \iff (f \in L(\tau_g * s^- \alpha))$ ovat avoimia tai suljettuja. Siten lemmän 5.2 nojalla joukko A on Σ_1^1 . Koska $\mathcal{B}' = \neg\mathcal{B}^*$, niin $\mathcal{B}' \subseteq \Pi_1^1$. \square

Edellisestä lemmasta seuraa, että $\exists \mathcal{B}^* \subseteq \Sigma_1^1$.

Seuraavan lauseen ovat todistaneet Väänänen [10] ja Tuuri [14]. Seuraava muotoilu on kuitenkin Hellan.

Lause 5.5 *Olkoot $A \subseteq \mathcal{X}$ ja $B \subseteq \mathcal{X}$ pistevieraita Σ_1^1 -joukkoja. Tällöin on olemassa Borel*-joukko C , jolle pätee*

$$A \subseteq C \text{ ja } B \subseteq \sim C,$$

missä $\sim C$ on joukon C duaali.

TODISTUS. Olkoot $A = \wp[T]$ ja $B = \wp[S]$ joillakin $T, S \in \mathcal{T}(\mathcal{X} \times \mathcal{N}_1)$. Tällöin ei ole olemassa kolmikkoa $(f, g, h) \in \mathcal{X} \times \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_1$, jolle $(f, g) \in [T]$ ja $(f, h) \in [S]$. Siis puussa

$$U = \{(s, t, u) \mid (s, t) \in T \text{ ja } (s, u) \in S\}$$

ei ole ω_1 -oksa. Olkoon

$$U' = \{(s, t, u) \mid (s, t, u) \notin U \wedge \forall \beta < \ell(s)[(s, t, u)^{-\beta} \in U]\}.$$

Merkitään $U^* = U \cup U'$. Tällöin $[U^*] = U'$. Asetetaan kullekin $b = (s, t, u) \in U'$

$$L(b) = \begin{cases} N_{\sigma(s)}, & \text{jos } (s, t) \in T \\ ?, & \text{jos } (s, t) \notin T. \end{cases}$$

Puuhun U^* liittyvä Borel*-peli $G(f, U^*, L)$ on

$$\begin{array}{ccccccc} \exists & s_0, t_0 & \dots & s_\alpha, t_\alpha & \dots & & \\ \forall & & u_0 & \dots & & u_\alpha & \dots \end{array}$$

missä kummankin pelaajan on valittava siirrossa $\alpha + 1$ niin, että $s_{\alpha+1} \in \text{succ}(s_\alpha)$, $t_{\alpha+1} \in \text{succ}(t_\alpha)$, $u_{\alpha+1} \in \text{succ}(u_\alpha)$, ja $(s_{\alpha+1}, t_{\alpha+1}, u_{\alpha+1}) \in U^*$. Rajalla pelaajien on valittava edellisten siirtojen supremum. (Ylläoleva peli pelataan itse asiassa pitkin puuta $U^\dagger = \{((s, t), u) \mid (s, t) \in T \wedge [(s, u) \in S \vee \exists \xi (s, u \hat{\langle} \xi \rangle) \in S]\}$, missä

$$((s \hat{\langle} d \rangle, t \hat{\langle} \beta \rangle), u \hat{\langle} \gamma \rangle) > ((s \hat{\langle} d \rangle, t \hat{\langle} \beta \rangle), u) > ((s, t), u),$$

ovat peräkkäiset alkiot, mikäli ovat puussa U^\dagger . Todistuksen yksinkertaistamiseksi sallitaan kuitenkin ylläoleva määritelmä.) Peli päättyy, kun on saatu aikaan $b = (s, t, u) \in U'$. Pelaaja \exists voittaa, jos tällöin $f \in L(b)$, muutoin pelaaja \forall voittaa. Olkoon $C = B(U^*, L)$

Väite. $A \subseteq C$. Olkoon $f \in A$. Valitaan sellainen g , että $(g, f) \in [T]$. Pelaajan \exists strategia pelissä $G(f, U^*, L)$ on valita aina $s_\alpha = f^- \alpha$ ja $t_\alpha = g^- \alpha$. Kun peli päättyy, niin $f \in N_{\sigma(s)}$. Siis $f \in C$.

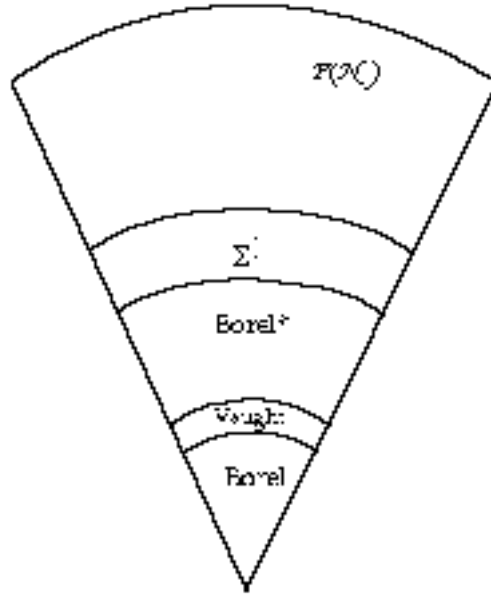
Väite. $B \subseteq \sim C$. Olkoon $f \in B$. Valitaan sellainen h , että $(h, f) \in [S]$. Pelaajan \forall strategia pelissä $G(f, U^*, L)$ on valita siirrossa α siirrokseen $u_\alpha = h^- \alpha$. Olkoon $b = (s, t, u) \in U'$ pelin lopputulos. Jos $f \in L(b)$, on oltava $L(b) = N_{\sigma(s)}$ eli $s = f^- \alpha$. Tällöin kuitenkin $(s, t) \in T$ ja $(s, u) \in S$, jolloin $(s, t, u) \in U$, mikä on ristiriita. Siis tämä on voittostrategia pelaajalle \forall . \square

Korollaari 5.6 $\Delta_1^1 = \mathcal{B}^d = \mathcal{B}^n$.

TODISTUS. Kun $A \in \mathcal{B}^d$, niin lemmän 5.4 nojalla $A \in \Delta_1^1$. Toisaalta on selvää, että $A \in \mathcal{B}^n$.

Jos A ja $\mathcal{X}r A$ ovat Σ_1^1 , niin edellisen lauseen nojalla on olemassa Borel*-joukko C , jolle $A \subseteq C$ ja $\mathcal{X}r A \subseteq \sim C$. Siis $A = C$ ja $\mathcal{X}r A = \sim C$. Siis $A \in \mathcal{B}^d$.

Jos $A = B(T, L)$ ja $\mathcal{X}r A = B(T', L')$, niin lemmän 5.4 nojalla A ja $\mathcal{X}r A$ ovat Σ_1^1 -joukkoja, joten edellisen lauseen nojalla $A \in \mathcal{B}^d$. \square



6 Avoimia ongelmia

Pätevätkö tai millä lisäoletuksilla pätevät seuraavat ongelmat?

Avoin ongelma 6.1 Jos T ja T' ovat ei-hyvinperustettuja, niin $T \ll T' \Rightarrow \Sigma_{wT} \subseteq \Sigma_{wT'}$.

Vaughtin joukkoihin liittyy seuraavat ongelmat.

Avoin ongelma 6.2 Separation($G_c^\omega(1), B$).

Myönteinen vastaus edelliseen antaa myönteisen vastauksen myös seuraavaan.

Avoin ongelma 6.3 $G_o^\omega(1) \cap G_c^\omega(1) = B$.

Mekler ja Väänänen ovat todistaneet [10], että joukko CUB on Δ_1^1 , jos ja vain on olemassa Canary-puu, joten on konsistenttia, että CUB ei ole Borel. Joukkoon CUB liittyvät kysymykset

Avoin ongelma 6.4 $CUB \notin G_o^\omega(1) \cap G_c^\omega(1)$.

Avoin ongelma 6.5 $CUB \notin B$.

Tähän ongelmaan on saatu edistystä, sillä äskettäin Jouko Väänänen on saanut todistettua, että $CUB \notin \Sigma_3^0 \cup \Pi_3^0$.

Lähteet

- [1] D. Blackwell, *Borel Sets via Games*, The Annals of Probability 1981, Volume 9, No 2, 321–322.
- [2] D. Guaspari, *Trees, Norms and Scales*, in: Mathias ed., *Surveys of Set Theory*, Cambridge University Press, Cambridge–New York, 1983, 135–161.
- [3] Huuskonen Taneli: *Notions of similarity for \aleph_1 -sized models*, 1989, lisentiaates thesis.
- [4] Hyttinen Tapani: *Games and infinitary languages*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. Diss., vol 64 (1987).
- [5] Tapani Hyttinen and Jouko Väänänen: *On Scott and Karp Trees of uncountable models*, Journal of Symbolic Logic, Volume 55, Number 3, Sept 1990, 897–908.
- [6] Phokion Kolaitis: *The Game Quantifier*, in Model Theoretic Logics, eds. Barwise Feferman, Springer-Verlag 1987.
- [7] Makkai: *Admissible sets and infinitary logic*, in: J. Barwise, ed., *Handbook of mathematical logic* (North-Holland, 1977) 233–281.
- [8] D.A. Martin: *Measurable cardinals and analytic games*, 1970, Fund. math. 66, 287–291.
- [9] D.A. Martin: *Borel determinacy*, 1975, Annals of math. 102, 363–371.
- [10] Alan Mekler and Jouko Väänänen: *Trees and Π_1^1 subsets of $\omega_1^{\omega_1}$* , to appear.
- [11] Yiannis Moschovakis: *Descriptive set theory*, Studies in logic, Volume 100, North-Holland 1980.
- [12] Yiannis Moschovakis: *Elementary Induction on Abstract Structures*, Studies in Logic, Volume 77, North-Holland 1974.
- [13] Juha Oikkonen ja Jouko Väänänen: *Game-theoretic inductive definability*, to appear.
- [14] Heikki Tuuri: *Infinitary languages and Ehrenfeucht–Fraïssé games*, dissertation, Helsinki, 1990.
- [15] Jouko Väänänen: *A Cantor-Bendixson Theorem for the space $\omega_1^{\omega_1}$* , to appear in Fundamenta Mathematicae.