Matematiikan tukikurssi

Kurssikerta 8

1 Väliarvolause

Oletetaan, että funktio f on jatkuva jollain reaalilukuvälillä $[a, b]$ ja derivoituva avoimella välillä (a, b). Funktion muutos tällä välillä on luonnollisesti $f(b) - f(a)$. Keskimääräinen muutos tällä välillä on siis

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Väliarvolause kertoo meille seuraavaa: välillä (a, b) on olemassa luku c, jossa funktion derivaatta $f'(c)$ kertaa välin pituus $b - a$ on yhtä kuin funktion muutos tällä välillä. Eli on olemassa $c \in (a, b)$, jolla

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \iff \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Eli jossain välin (a, b) pisteessä funktion muutosnopeus on yhtä suuri kuin funktion keskimääräinen muutosnopeus koko välillä. Kyseisen pisteen voi myös ratkaista, jos haluaa.

Esimerkki 1.1 (Väliarvon löytäminen) Etsi piste c jossa $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, kun $f(x) = x^2$.

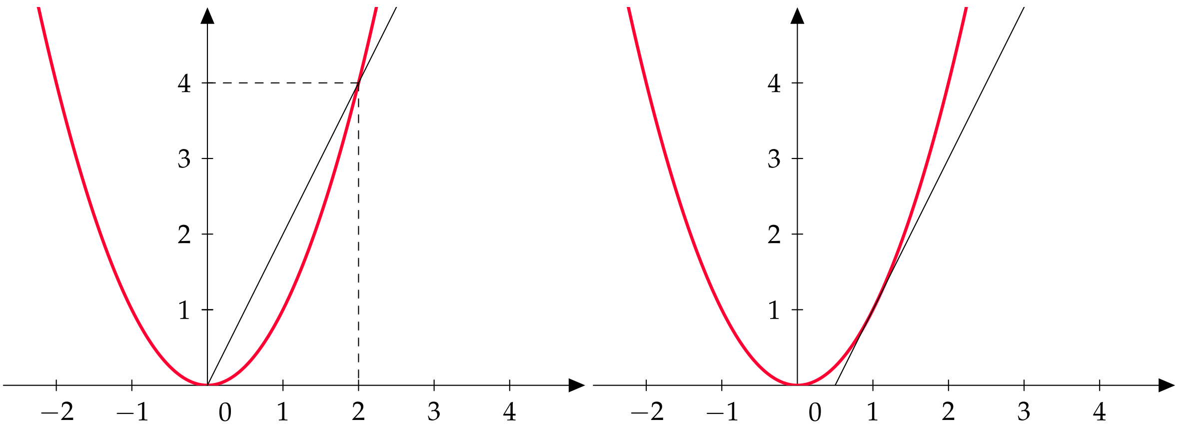
Ratkaisu. Funktion derivaatta on $2x$. Haluttu piste c löytyy ratkaisemalla yhtälö

$$\frac{b^2 - a^2}{b - a} = 2c$$

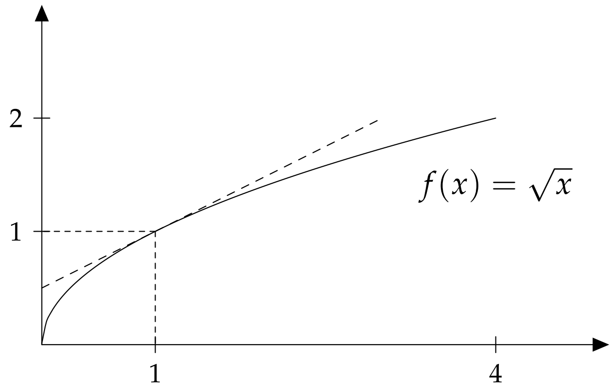
Tästä saadaan $c = (a + b)/2$. Eli funktio x^2 kasvaa jokaisen välin keskipisteessä yhtä nopeaa kuin keskimäärin tällä välillä. Esimerkiksi välillä $(0, 2)$ tämä funktio kasvaa yhteensä $f(2) - f(0) = 4$, eli keskimäärin $4/2 = 2$.

Tämän välin keskipisteessä $x = 1$ funktion f derivaatta on juurikin tämä 2:

Graafisesti tulkittuna väliarvolause kertoo, että jos funktion f välin (a, b) päätepisteet $(a, f(a))$ ja $(b, f(b))$ yhdistää suoralla viivalla, niin jossain välin (a, b) pisteessä tämän suoran kulmakerroin on yhtä kuin funktion f derivaatta. Toisin sanottu väliarvolause kertoo, että tätä suoraa voi siirtää siten, että siitä tulee funktion tangenttisuora jossain välin (a, b) pisteessä:



Esimerkki 1.2 (Väliarvolause) Alla on kuvattu funktio $f(x) = \sqrt{x}$ välillä $(0, 4)$. Tämän funktion keskimääräinen muutos tällä välillä on $1/2$. Toisaalta väliarvolauseen nojalla tiedämme, että tämän dunktion derivaatta on tällä välillä jossain pisteessä $1/2$. Tämä piste on $x = 1$:



Väliarvolauseella voi arvioida funktion muutosta tietyllä välillä. Sillä voi antaa rajat funktion mahdolliselle muutokselle tietyllä välillä, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

Esimerkki 1.3 (Väliarvolauseen soveltaminen) Funktion derivaatalle pätee $1 \leq f'(x) \leq 2$ kaikissa pisteissä x. Lisäksi tiedetään, että $f(5) = 1$. Kuinka suuri tai pieni voi $f(10)$ olla?

Ratkaisu. Väliarvolauseen mukaan jollekin $c \in (5, 10)$ pätee

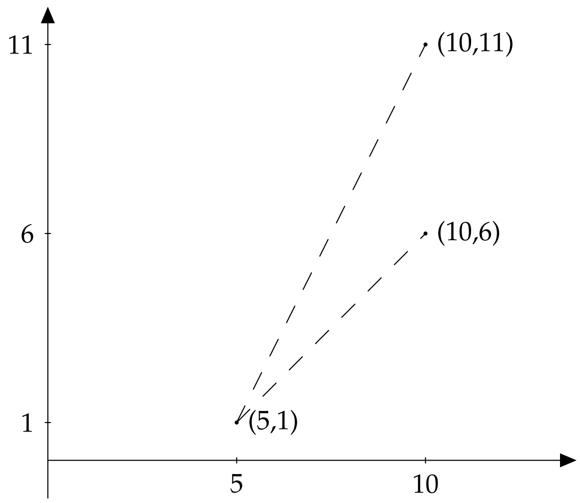
$$\begin{aligned} f(10) - f(5) &= f'(c)(10-5) \quad \text{eli} \\ f(10) &= f(5) + f'(c)(10-5) \\ &= f(5) + 5f'(c) \\ &= 1 + 5f'(c) \end{aligned}$$

Nyt koska funktion derivaatta on rajoitettu, niin myös luku $f(10)$ on rajoitettu:

$$\begin{aligned} &1 \leq f'(x) \leq 2 && \Rightarrow \\ &5 \leq 5f'(x) \leq 10 && \Rightarrow \\ &6 \leq 1 + 5f'(x) \leq 11 && \Rightarrow \\ &6 \leq f(10) \leq 11 \end{aligned}$$

Täten $f(10)$ voi olla korkeintaan 11 ja se on vähintään 6.

Alla olevassa kuvassa nämä rajat näkyvät katkoviivoina. Näistä ylempi katkoviiva antaa ylärajan funktion muutokselle, kun taas alempi katkoviiva antaa alarajan tälle muutokselle:



2 Funktion monotonisuus

Derivoituva funktio f on aidosti kasvava, jos sen derivaatta on positiivinen eli jos $f'(x) > 0$. Funktio on aidosti vähenevä jos sen derivaatta on negatiivinen eli $f'(x) < 0$. Tämä tulos on jo lukiosta tuttu ja kohtalaisen helppo perustella: esimerkiksi jos funktio on kasvava eli $f(x) > f(x_0)$ kun $x > x_0$, niin voimme katsoa derivaatan määritelmää:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Tämä on selvästi positiivinen, sillä osamäärän nimittäjä ja osoittaja ovat joko kumpikin positiivia tai kumpikin negatiivisia. Kasvavan funktion derivaatta on siis positiivinen. Vastaavalla tavalla voi todeta, että vähenevän funktion derivaatta on negatiivinen.

Huomaa että kasvava/vähenevä funktio on eri asia kuin *aidosti* kasvava/vähenevä funktio:

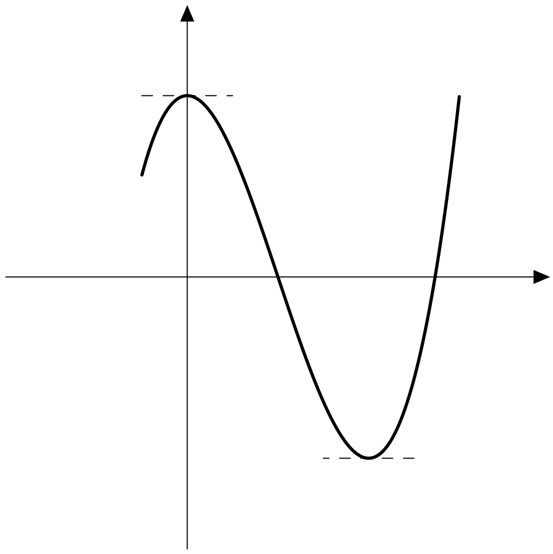
1. Derivoituva funktio f on kasvava, jos sen derivaatta on ei-negatiivinen eli $f'(x) \geq 0$

2. Derivoituva funktio f on aidosti kasvava, jos sen derivaatta on positiivinen eli $f'(x) > 0$

Vähenevä ja aidosti vähenevä funktio määritellään vastaavalla tavalla. Täten esimerkiksi vakiofunktio on kasvava ja vähenevä, muttei aidosti kasvava eikä aidosti vähenevä. Tämä johtuu siitä, että vakiofunktion derivaatta on nolla.

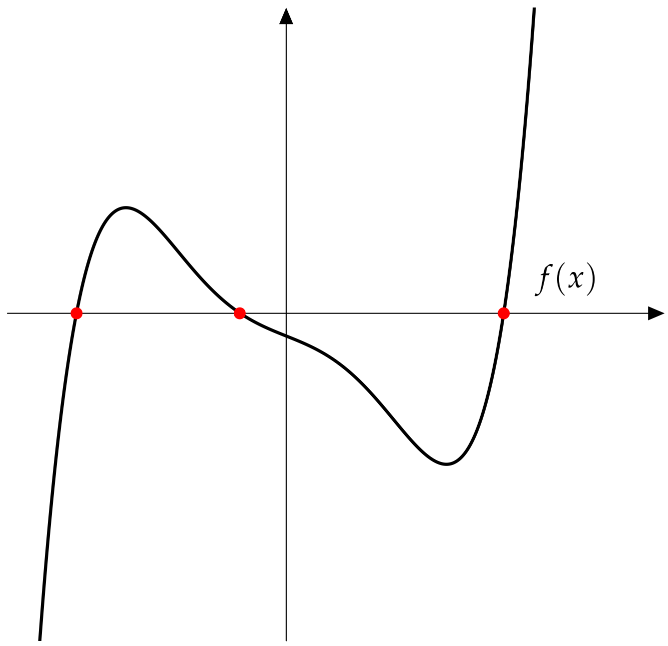
Funktio on jollakin välillä **monotoninen**, jos se on tällä välillä kasvava tai vähenevä. Funktio on **aidosti monotoninen**, jos se on koko tällä välillä aidosti kasvava tai aidosti vähenevä.

Derivaatan hieman vähemmän tunnettu sovellus on *tietyn funktion nollakohtien lukumäärän löytäminen*. Tämä tekniikka perustuu siihen, että jos funktiolla on kaksi perättäistä derivaatan nollakohtaa, x_0 ja x_1, niin funktio on näiden välissä monotoninen eli joko kasvava tai vähenevä. Täten itse funktio voi välillä (x_0, x_1) leikata x-akselin korkeintaan kerran:

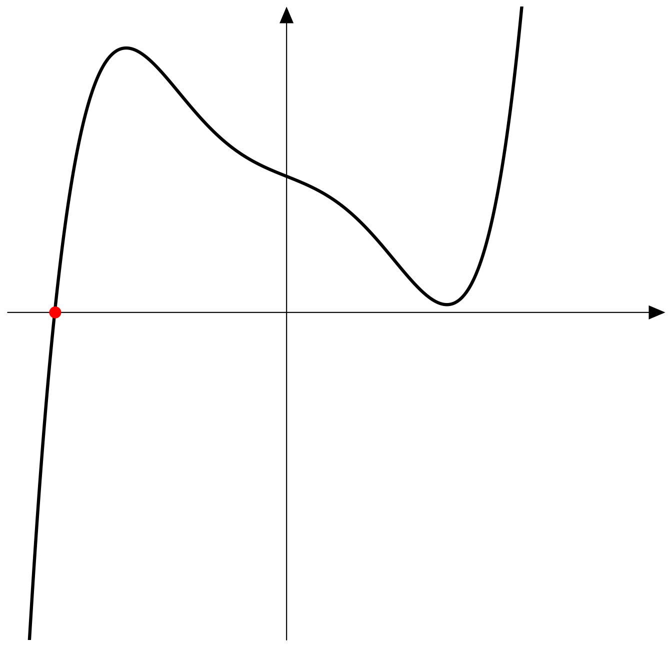


Täten jos funktion derivaatalla on jollakin välillä n nollakohtaa, niin itse funktiolla on tällä välillä enintään $n + 1$ nollakohtaa.

Esimerkiksi alla olevan funktion $f(x)$ derivaatalla on kaksi nollakohtaa. Tästä seuraa että tällä funktiolla on tällä välillä *enintään* 3 nollakohtaa, ja tällä funktiolla myös on juurikin 3 nollakohtaa:



Alla olevalla funktiolla on samalla välillä myös kaksi derivaatan nollakohtaa, joten tälläkin funktiolla on enintään 3 nollakohtaa tällä välillä. Sillä on kuitenkin ainoastaan yksi nollakohta tällä välillä:



Toisin sanottuna siitä että derivaatalla on jollakin välillä vaikkapa 4 nollakohtaa voidaan päätellä sen, että itse funktiolla on 5,4,3,2,1 tai 0 nollakohtaa tällä välillä. Käytännössä funktion nollakohtien todellinen määrä on tarkastettava katsomalla funktion arvoja derivaatan nollakohdissa.

Esimerkki 2.1 (Funktion nollakohtien löytäminen) Etsitään funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ nollakohtien määrä. Funktion derivaatta on $3x^2 - 6x$, jonka nollakohdat ovat $x_1 = 0$ ja $x_2 = 2$. Täten funktiolla $f(x)$ on enintään 3 nollakohtaa. Tarkistetaan jokainen tapaus erikseen:

1. Välillä $(-\infty, 0)$ funktiolla on nollakohta, sillä $f(0) = 2 > 0$ ja funktio menee miinus äärettömään kun x vähenee rajatta.

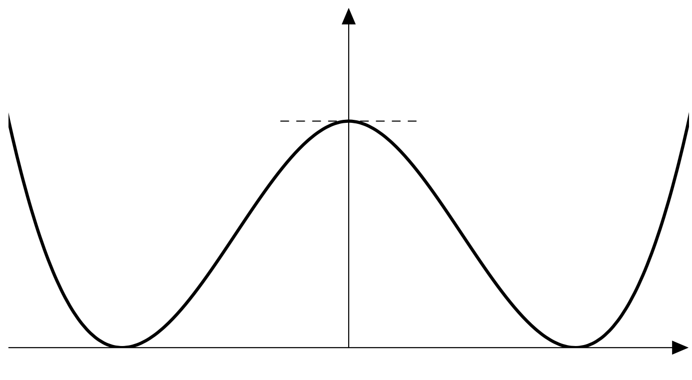
2. Välillä $(0, 2)$ funktiolla on nollakohta, sillä $f(0) = 2 > 0$ ja $f(2) = -2 < 0$.

3. Välillä $(2, \infty)$ funktiolla on nollakohta, sillä $f(2) = -2 < 0$ ja funktio menee äärettömään kun x kasvaa rajatta. Täten funktiolla on kolme nollakohtaa.

3 Lokaalit ja globaalit ääriarvot

Funktiolla $f(x)$ on **lokaali maksimi** pisteessä x_0, jos on olemassa pisteen x_0 ympäristö siten, että $f(x_0)$ on suurempi tai yhtä suuri kuin mikään muu arvo $f(x)$ tässä ympäristössä. Eli jos $f(x_0) \geq f(x)$ pätee kaikille pisteille x, jotka kuuluvat pisteen x_0 ympäristöön.

Jos funktio f on derivoituva, niin sen lokaalissa ääriarvopisteessä pätee $f'(x_0) = 0$:



Yllä olevassa kuvassa funktiolla on lokaali maksimi pisteessä $x_0 = 0$ ja, kuten näkyy, $f'(0) = 0$. Tällä funktiolla on kuvassa myös kaksi lokaalia minimiä.

Derivoituvan funktion lokaalit ääriarvot on käytännössä helppo löytää derivoimalla funktio ja asettamalla derivaatan nollaksi. Huomaa kuitenkin, että tieto $f'(x_0) = 0$ ei takaa, että pisteessä x_0 olisi lokaali ääriarvo. Esimerkiksi funktiolle $f(x) = x^3$ pätee origossa $f'(0) = 0$, mutta tämä funktio ei saavuta tässä pisteessä lokaalia ääriarvoa. Seuraavassa kappaleessa esitetään tapa varmistaa onko kyseessä todella lokaali ääriarvo.

Globaalien ääriarvojen löytäminen on hieman työläämpää, joskaan ei erityisen vaikeata. Välillä $[a, b]$ määritellyn funktion $f(x)$ globaalit ääriarvot löytyvät joko derivaatan nollakohdista, välin päätepisteistä tai pisteistä, joissa funktio ei ole derivoituva. Alla esimerkki jokaisesta tapauksesta:

1. Funktion $f(x) = x^2$ globaali minimi löytyy derivaatan $f'(x) = 2x$ nollakohdasta $x = 0$. Tällä funktiolla ei ole globaalia maksimia.
2. Välille $[0, 1]$ rajatun funktion $g(x) = x$ globaali minimi ja globaali maksimi löytyvät päätepisteistä: $g(0) = 0$ on minimi ja $g(1) = 1$ maksimi.
3. Funktion $h(x) = |x|$ globaali minimi löytyy pisteestä $x = 0$, jossa tämä funktio ei ole derivoituva.

Huomaa, että pisteet joissa funktio ei ole derivoituva sisältävät myös epäjatkuvuuspisteet. Tämä johtuu siitä, että jos funktio on tietyssä pistessä epäjatkuva, niin se on tässä pisteessä myös ei-derivoituva.