Matematiikan tukikurssi

Hannu Kivimäki

Sisältö

Osa I
Ensimmäinen välikoe

1 Integrointi

Integrointi on derivoinnin käänteistoimitus: jos funktion $F(x)$ derivaatta on $f(x)$, niin funktion $f(x)$ integraali on $F(x)$. Täten, koska esimerkiksi funktion $x^2 + e^{2x}$ derivaatta on $2x + 2e^{2x}$, niin tämän funktion $2x + 2e^{2x}$ integraali on $x^2 + e^{2x}$. Tätä merkitään seuraavasti:

$$\int 2x + 2e^{2x} \mathrm{d}x = x^2 + e^{2x}.$$

Tässä $\int (\cdot) \mathrm{d}x$ tarkoittaa yksinkertaisesti että lauseke $(\cdot)$ integroidaan. Se on yhtenäinen merkintä, jonka osat "$\int$" ja "$\mathrm{d}x$" eivät tarkoita yksinään varsinaisesti mitään, joskin "$\mathrm{d}x$" kertoo, että integrointi suoritetaan x:n suhteen. Vastaavasti $\int (\cdot) dy$ tarkoittaa integrointia y:n suhteen.

Vastaavasti huomataan esimerkiksi, että

$$\int x^5 \mathrm{d}x = \frac{1}{6} x^6,$$

koska $\frac{d}{dx} \frac{1}{6} x^6 = x^5$. Integrointi on siis helppoa, jos osaat arvata, minkä funktion derivaatta tietty funktio on. Tavallaan siis osaat jo integroida, jos osaat derivoida.

Integraalifunktio ei kuitenkaan ole yksikäsitteinen: myös funktio $1/6x^6 + 10$ on funktion x^5 integraalifunktio, koska funktion $1/6x^6 + 10$ derivaatta on x^5. Itse asiassa jos $F(x)$ on funktion $f(x)$ integraalifunktio eli $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$, niin myös funktio $F(x) + C$ on funktion $f(x)$ integraalifunktio millä tahansa vakion C arvolla, koska

$$\frac{d}{dx} (F(x) + C) = f(x) + 0 = f(x).$$

Esimerkki 1.1. Funktion $4x^2$ kaikki integraalifunktiot ovat muotoa $\frac{4}{3} x^3 + C$, koska $\frac{d}{dx} \left(\frac{4}{3} x^3 + C \right) = 4x^2$.

Koska integrointi on derivoinnin käänteistoimitus, niin jokaista derivoimissääntöä vastaa käänteinen integroimissääntö. Otetaan näistä esimerkkejä.

Esimerkki 1.2. Potenssifunktion x^n derivaatta on nx^{n-1}. Täten

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C.$$

Eli koska potenssin derivoimissääntö kertoo, että *potenssi tulee eteen kertoimeksi ja potenssi vähenee yhdellä*, kertoo vastaava integrointisääntö että *potenssi kasvaa yhdellä ja tämän yhdellä kasvaneen potenssin käänteisluku tulee eteen kertoimeksi*. Tästä seuraa esimerkiksi, että

$$\int x^{325} \mathrm{d}x = \frac{1}{326}x^{326} + C.$$

Esimerkki 1.3. Tunnetusti logaritmin $\ln x$ derivaatta on $1/x$. Täten

$$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln x + C,$$

kun $x > 0$.

Tähän mennessä käsitellyt integroinnit ovat olleet käytännössä melko suoraviivaisia. Hankalampia tehtäviä ovat usein derivoinnin ketjusääntöön perustuvat integroinnit. Derivoinnin ketjusääntöhän kertoo, että yhdistetyn funktion $f(g(x))$ derivaatta on $f'(g(x))g'(x)$. Eli "ulkofunktion derivaatta (arvolla sisäfunktio $g(x)$) kertaa sisäfunktion derivaatta". Täten tämä sääntö kertoo meille esimerkiksi, että

$$Dx(x^2 + 6x)^{20} = 20(x^2 + 6x)^{19}(2x + 6).$$

Täten luonnollisesti

$$\int 20(x^2 + 6x)^{19}(2x + 6)\mathrm{d}x = (x^2 + 6x)^{20} + C,$$

eli käytännössä tässäkään integroimissäännössä ei ole mitään uutta: se kertoo ainoastaan että

$$\int f'(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = f(g(x)) + C.$$

Käytännössä vaikeaa on huomata, että lauseke
$20(x^2 + 6x)^{19}(2x + 6)$ on muotoa $f'(g(x))g'(x)$.

Esimerkki 1.4.

$$\int (3x^2 + 2)e^{x^3 + 2x + 5} \mathrm{d}x = e^{x^3 + 2x + 5} + C.$$

Matemaattisen analyysin kurssilta muistuu mieleen myös, että logaritmin derivoimissääntöä ja ketjusääntöä voi yhdistää derivoitaessa funktion $f(x)$ logaritmia:

$$Dx \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Tässä pitää muistaa, että logaritmi on määritelty ainoastaan, kun $f(x) > 0$. Toisaalta jos $f(x) < 0$, niin silloin puolestaan $\ln(-f(x))$ on määritelty (koska tällöin $-f(x) > 0$) ja

$$Dx \ln(-f(x)) = \frac{-f'(x)}{-f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Täten funktion $\frac{f'(x)}{f(x)}$ integrointi tuottaa tuloksen $\ln f(x) + C$, jos $f(x)$ on positiivinen, ja tuloksen $\ln(-f(x)) + C$, jos $f(x)$ on negatiivinen. Nämä kaksi tapausta voi yhdistää kätevästi kirjoittamalla, että

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x = \ln |f(x)| + C,$$

jossa $f(x)$ voi olla negatiivinen tai positiivinen, kunhan $f(x) \neq 0$.

Koska esimerkiksi

$$Dx \ln(x^2 + 5x + 1) = \frac{2x + 5}{x^2 + 5x + 1},$$

niin vastaava integrointi kertoo täten, että

$$\int \left(\frac{2x + 5}{x^2 + 5x + 1} \right) \mathrm{d}x = \ln |x^2 + 5x + 1| + C.$$

Eli jos tunnistat integroitavan funktion olevan muotoa $\frac{f'(x)}{f(x)}$, niin integrointitehtävän vastaus on yksinkertaisesti $\ln |f(x)| + C$.

Esimerkki 1.5. Integroidaan nyt funktio

$$\frac{12x^2 + 4}{x^3 + x}.$$

Tämä ei itse asiassa ole muotoa $f'(x)/f(x)$, mutta sen huomataan olevan muotoa $4f'(x)/f(x)$. Koska integrointi on lineaarinen operaatio[1], tämän lausekkeen integrointi voidaan suorittaa helposti siirtämällä kerroin 4 eteen:

[1] Tämä tarkoittaa, että $\int (af(x) + bg(x))\mathrm{d}x = a \int f(x)\mathrm{d}x + b \int g(x)\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{12x^2+4}{x^3+x}\mathrm{d}x = 4\int \frac{3x^2+1}{x^3+x}\mathrm{d}x$$
$$= 4\ln|x^3+x|.$$

Tässä vaaditaan täydellisyyden vuoksi vielä ehto $x^3 + x \neq 0$.

Huomaa, että integraalifunktio $F(x)$ on aina derivoituva, koska määritelmän mukaan $F'(x) = f(x)$. Analyysin peruskurssilla osoitettiin, että derivoituva funktio on aina jatkuva. Tästä seuraa, että integraalifunktio on aina jatkuva. Tästä tuloksesta on apua, kun haetaan paloittain määriteltyjen funktioiden integraaleja, kuten alla olevassa tehtävässä:

Esimerkki 1.6. Etsitään funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ kun } x \geq 0 \\ x, \text{ kun } x < 0 \end{cases}$$

integraalifunktio. Aluksi integroidaan funktio paloittain: funktion x^2 integraalifunktiot ovat muotoa $\frac{1}{3}x^3 + C_1$ ja funktion x integraalifunktiot ovat muotoa $\frac{1}{2}x^2 + C_2$. Täten funkion $f(x)$ integraalifunktiot $F(x)$ ovat muotoa

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + C_1, \text{ kun } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + C_2, \text{ kun } x < 0. \end{cases}$$

Tämän integraalifunktion pitää kuitenkin olla jatkuva, koska integraalifunktiot ovat aina jatkuvia. Tämä rajoittaa vakioiden C_1 ja C_2 arvoja. Jotta tuo integraalifunktio olisi jatkuva, on oltava että pisteessä $x = 0$ nuo kaksi palasta yhtyvät, eli

$$\frac{1}{3}x^3 + C_1 = \frac{1}{2}x^2 + C_2, \text{ kun } x = 0.$$

Tästä seuraa, että on oltava $C_1 = C_2$. Täten halutut integraalifunktiot voidaan ilmaista muodossa:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + C, \text{ kun } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + C, \text{ kun } x < 0. \end{cases}$$

Tässäkin esimerkissä tuloksena oli siis *joukko* integraalifunktioita: yksi integraalifunktio jokaista vakion C arvoa kohden. Käytännössä saadaan vain yksi ratkaisu, jos rajoitetaan funktion arvoa tietyssä pisteessä. Jos yllä olevassa esimerkissä vaadittaisiin vaikkapa, että $F(3) = 0$, niin silloin $\frac{1}{3}3^3 + C = 0$ eli $C = -9$. Tällöin saataisiin yksikäsitteinen integraalifunktio:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - 9, & \text{kun } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}x^2 - 9, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Tämä ehto $F(3) = 0$ on esimerkki **alkuarvosta**, joita tullaan tapaamaan lisää esimerkiksi differentiaaliyhtälöiden yhteydessä.

2 Osittaisintegrointi

Matemaattisen analyysin peruskurssilla derivoitiin funktioita, jotka olivat kahden funktion tuloja: esimerkiksi funktio $(2x^2 + 3x + 1)(e^x + 4x)$ on funktioiden $2x^2 + 3x + 1$ ja $e^x + 4x$ tulo. Tällainen funktio derivoitiin **tulosäännöllä**, joka menee seuraavasti:

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \tag{2.1}$$

Tällä kaavalla voidaan laskea esimerkiksi yllä olevan funktion derivaatta:

$$\frac{d}{dx}\Big((2x^2 + 3x + 1)(e^x + 4x)\Big) = (4x+3)(e^x+4x) + (2x^2+3x+1)(e^x+4).$$

Derivoinnin tulosääntö eli yhtälö (2.1) voidaan luonnollisesti integroida kummaltakin puolelta:

$$\int \frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) \mathrm{d}x = \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

Koska integrointi ja derivointi ovat toistensa käänteistoimituksia, yllä olevan yhtälön vasemmalla puolella nämä kaksi toimitusta kumoavat toisensa ja koko yhtälö saadaan seuraavaan muotoon:

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

Tästä yhtälöstä voidaan nyt vähentää kummaltakin puolelta termi

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

jolloin saadaan **osittaisintegroinnin kaava**:

$$\boxed{\int f(x)g'(x) = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x.} \tag{2.2}$$

Eli: haluamme integroida funktion $f(x)g'(x)$. Jos tämä integrointi ei onnistu suoraan (esimerkiksi kappaleessa 1 esitetyllä tavalla), voidaan kokeilla osittaisintegrointia. Tällöin lasketaan ensin funktion $f(x)$ derivaatta $f'(x)$ ja funktion $g'(x)$ integraali $g(x)$. Lopuksi lasketaan integraali

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

minkä jälkeen haluttu integraali saadaan kaavasta (2.2).

Esimerkki 2.1. Lasketaan integraali

$$\int xe^x \mathrm{d}x$$

käyttämällä osittaisintegrointia. Ensinnä luonnollisesti laskettavan integraalin on oltava muotoa

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

Esimerkin lauseke on tätä muotoa, kun $xe^x = f(x)g'(x)$. Käytännössä saamme aina valita, kumpi osista x ja e^x on $f(x)$ ja kumpi on $g'(x)$. Tämä tehtävä ratkeaa ainoastaan, jos valitsemme nämä seuraavasti:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ g'(x) &= e^x. \end{aligned}$$

Seuraava vaihe osittaisintegroinnissa on aina laskea funktiot $f'(x)$ ja $g(x)$. Nämä on tällä kertaa helppo laskea:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \\ g(x) &= e^x. \end{aligned}$$

Tällöin termi $f(x)g(x)$ on yhtä kuin xe^x. Tämän tehtävään sovellettuna osittaisintegroinnin kaava kertoo siis seuraavaa:

$$\begin{aligned} \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \\ \int xe^x dx &= xe^x - \int 1 \cdot e^x \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Koska tuo viimeinen termi

$$\int 1 \cdot e^x \mathrm{d}x$$

on yhtä kuin e^x, on tehtävän ratkaisu seuraava:

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x.$$

Tämä on vielä hyvä varmistaa derivoimalla yllä olevan yhtälön oikea puoli (käytetään derivoinnin tulosääntöä):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(xe^x - e^x) &= 1 \cdot e^x + xe^x - e^x \\ &= xe^x. \end{aligned}$$

Eli tehtävän tulos pätee.

Tässä esimerkissä huomasimme osittaisintegroinnin päävaiheet:

1. Valitaan kumpi integroitavan lausekkeen osista on $f(x)$ ja kumpi on $g'(x)$.
2. Lasketaan $f'(x)$ ja $g(x)$.
3. Lasketaan integraali $\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x$
4. Käytetään osittaisintegroinnin kaavaa.

Tämä oli yksinkertainen osittaisintegrointitehtävä ja kaikki nämä vaiheet sujuivat vaivatta. Seuraavassa esimerkissä kohta 3 ei toimi suoraan, vaan osittaisintegrointia joudutaan soveltamaan useaan kertaan.

Esimerkki 2.2. Lasketaan seuraavaksi integraali

$$\int x^2 e^x \mathrm{d}x.$$

Valitaan funktiot seuraavasti: $f(x) = x^2$ ja $g'(x) = e^x$, jolloin $f'(x) = 2x$ ja $g(x) = e^x$. Tällöin saadaan osittaisintegroinnin kaavaa käyttäen:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx.$$

Tässä integraali

$$\int 2xe^x dx$$

ei ole laskettavissa suoraan, mutta sekin voidaan laskea osittaisintegroinnilla, mikä oikeastaan tehtiinkin jo (vakiota 2 vaille) edellisessä esimerkissä:

$$\begin{aligned}\int 2xe^x dx &= 2\int xe^x dx\\ &= 2(xe^x - e^x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int x^2e^x dx &= x^2e^x - \int 2xe^x dx\\ &= x^2e^x - 2(xe^x - e^x)\mathrm{d}x\\ &= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x dx.\end{aligned}$$

Tämän esimerkin opetus on siis, että joskus osittaisintegrointia pitää soveltaa useamman kerran samassa tehtävässä. Seuraava esimerkki puolestaan kertoo, että joskus osittaisintegrointi vaatii hieman luovuutta funktioiden $f(x)$ ja $g'(x)$ valinnassa.

Esimerkki 2.3. Lasketaan integraali

$$\int \ln x\mathrm{d}x.$$

Tässä funktiot $f(x)$ ja $g'(x)$ tuntuvat aluksi mahdottomilta muodostaa, koska integraalin sisässä näyttää olevan vain yksi funktio: $\ln x$. Pienellä luovuudella huomaamme kuitenkin että tämäkin lauseke voidaan esittää kahden funktion tulona: muodossa

$$\int 1 \cdot \ln x\mathrm{d}x,$$

jolloin voidaan valita $f(x) = \ln x$ ja $g'(x) = 1$. Nyt $f(x)g(x) = x\ln x$ ja

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\cdot x \,\mathrm{d}x = x,$$

jolloin

$$\int \ln x\mathrm{d}x = x\ln x - x.$$

Alla olevassa esimerkissä esiintyy kolmas tapaus, joka kohdataan usein osittaisintegroitaessa: integrointi ei varsinaisesti tuota tulosta, mutta lopulta saadaan lauseke, josta integraali saadaan pääteltyä.

Esimerkki 2.4. Integroidaan nyt osittaisintegroinnilla

$$\int e^{2x} \sin x \mathrm{d}x.$$

Valitaan $f(x) = e^{2x}$ ja $g'(x) = \sin x$. Täten $f'(x) = 2e^{2x}$ ja $g(x) = -\cos x$ (koska kosiinifunktion derivaatta on $-\sin x$), joten

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \sin x \mathrm{d}x &= -e^{2x} \cos x - \int 2e^{2x}(-\cos x) \\ &= -e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x \end{aligned}$$

Sovelletaan nyt osittaisintegrointia toiseen kertaan: nyt tuohon jälkimmäisen integraaliin

$$\int e^{2x} \cos x.$$

Valitaan tässä $f(x) = e^{2x}$ ja $g'(x) = \cos x$. Täten $f'(x) = 2e^{2x}$ ja $g(x) = \sin x$ ja yllä oleva lauseke saadaan seuraavaan muotoon:

$$\begin{aligned} -e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x \mathrm{d}x &= -e^{2x} \cos x + 2 \left(e^{2x} \sin x - \int \sin x (2e^{2x} \mathrm{d}x) \right) \\ &= -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - 4 \int \sin x e^{2x} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Nyt huomataan, että tähän asti saatu tulos kertoo itse asiassa seuraavaa:

$$\int e^{2x} \sin x \mathrm{d}x = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - 4 \int \sin x e^{2x} \mathrm{d}x$$

Tässä integraali yhtälön vasemmalla puolella on sama kuin yhtälön oikean puolen viimeinen termi, joten ne voidaan siirtää samalle puolelle. Tämän jälkeen integraali ratkeaa helposti:

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \sin x \mathrm{d}x &= -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - 4 \int \sin x e^{2x} \mathrm{d}x \\ 5 \int e^{2x} \sin x \mathrm{d}x &= -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x \\ \int e^{2x} \sin x \mathrm{d}x &= \frac{1}{5} \left(-e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x \right) \end{aligned}$$

Tiivisteenä: osittaisintegrointi on derivoinnin tulosäännön käänteistoimitus[2]. Sitä kannattaa soveltaa silloin, kun

$$\int f(x) g'(x) \mathrm{d}x$$

[2] Jos et muista tentissä osittaisintegroinnin kaavaa ulkoa, riittää että muistat tulon derivoimissäännön, jolloin voit johtaa osittaisintegraalin kaavan tästä.

on vaikea laskea, mutta

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

on helppo laskea. Kuten aina integroitaessa, voi osittaisintegroinninkin tuloksen tarkistaa derivoimalla saatu lauseke.

3 Osamurtohajotelma

Usein integroitavana on rationaalifunktio eli funktio, joka on muotoa

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

jossa $P(x)$ ja $Q(x)$ ovat polynomeja. Tällainen rationaalifunktio on esimerkiksi

$$\frac{x^5 + 3x + 1}{x^3 + 2x^2}.$$

Tässä kannattaa kiinnittää aluksi huomiota polynomien asteisiin: yllä osoittajan aste on 5 ja nimittäjän aste on 3. **Polynomin aste** on siis sen korkeimman potenssin aste. Rationaalifunktioiden integraaleja laskettaessa on oleellista huomata ensiksi, onko osoittajan aste suurempi kuin nimittäjän aste. Yllä osoittajan aste on suurempi, kun taas funktion

$$\frac{x^2 + 4x}{x^7 + 5x^2 + 2}$$

nimittäjän aste (eli 7) on suurempi kuin osoittajan aste (eli 2). Se onko osoittajan vai nimittäjän aste suurempi ratkaisee miten näitä integraaleja kannattaa laskea.

Aluksi käsittelemme tapauksen, jossa nimittäjän asteluku on suurempi. Esimerkki tällaisesta funktiosta on

$$\frac{1}{(x-4)(x-2)},$$

jonka nimittäjän asteluku on kaksi, minkä voi nähdä laskemalla nimittäjän lausekkeen auki. Tätä funktiota on kuitenkin mahdotonta integroida suoraan. Oleellista tällaisessa tapauksessa on tutkia nimittäjän nollakohtia. Yllä olevalla funktiolla on kaksi *erillistä* nollakohtaa: $x_1 = 4$ ja $x_2 = 2$.

Tällaisessa tapauksessa tuolle funktiolle voi tehdä seuraavanlaisen **osamurtohajotelman**:

$$\frac{1}{(x-4)(x-2)} = \frac{A_1}{x-4} + \frac{A_2}{x-2}.$$

Tässä A_1 ja A_2 ovat vakioita, jotka pitää ratkaista. Käytännössä nämä ratkaistaan valitsemalla ne siten, että yllä olevan yhtälön vasen ja oikea puoli ovat samoja:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-4)(x-2)} &= \frac{A_1}{x-4} + \frac{A_2}{x-2} \\
&= \frac{(x-2)A_1}{(x-2)(x-4)} + \frac{(x-4)A_2}{(x-4)(x-2)} \\
&= \frac{(x-2)A_1 + (x-4)A_2}{(x-4)(x-2)} \\
&= \frac{A_1x - 2A_1 + A_2x - 4A_2}{(x-4)(x-2)}.
\end{aligned}$$

Tästä voidaan nyt ratkaista A_1 ja A_2: täytyy päteä, että

$$\frac{1}{(x-4)(x-2)} = \frac{A_1x - 2A_1 + A_2x - 4A_2}{(x-4)(x-2)}$$

eli että $1 = A_1x - 2A_1 + A_2x - 4A_2$. Koska tällä vasemmalla puolella on pelkkä luku 1, eikä yhtään x:ää sisältävää termiä, niin on oltava että $A_1x + A_2x = 0$ eli $A_1 + A_2 = 0$. Toinen ehto, joka saadaan on $-2A_1 - 4A_2 = 1$. Kun nämä kaksi ehtoa yhdistetään, saadaan ensimmäisestä ehdosta, että $A_1 = -A_2$, jonka voi sijoittaa toiseen ehtoon ja ratkaista $2A_2 - 4A_2 = 1$ eli $A_2 = -1/2$, jolloin $A_1 = 1/2$. Täten tuo tehtävän rationaalifunktio voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-4)(x-2)} &= \frac{A_1}{x-4} + \frac{A_2}{x-2} \\
&= \frac{1/2}{x-4} - \frac{1/2}{x-2}.
\end{aligned}$$

Nyt tämä oikea puoli on integroitavissa:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1/2}{x-4} - \frac{1/2}{x-2}\mathrm{d}x &= 1/2\int \frac{1}{x-4}\mathrm{d}x - 1/2\int \frac{1}{x-2}\mathrm{d}x \\
&= 1/2\ln|x-4| - 1/2\ln|x-2| + C.
\end{aligned}$$

Täten tehtävän ratkaisu on
$$\int \frac{1}{(x-4)(x-2)} \mathrm{d}x = 1/2 \ln|x-4| - 1/2 \ln|x-2| + C.$$
Yleisesti ottaen kun integroitavana on rationaalifunktio $f(x) = P(x)/Q(x)$, jonka nimittäjän Q aste on suurempi kuin sen osoittajan P aste *ja* jonka nimittäjällä on erilliset nollakohdat $(Q(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n))$ niin integraali saadaan ratkaistua jakamalla tehtävän funktio ensin osamurtoihin:
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-x_n}$$
ja ratkaisemalla tästä vakiot $A_1, \ldots, A_n$. Tästä saadaan lopulta integroimalla ratkaisuksi
$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{d}x = A_1 \ln|x-x_1| + A_2 \ln|x-x_2| + \cdots + A_n \ln|x-x_n| + C$$
Esimerkki 3.1. Halutaan laskea integraali
$$\int \frac{1}{x^2-x} \mathrm{d}x.$$
Nyt pitää aloittaa jakamalla nimittäjä tekijöihin, jolloin näemme sen nollakohdat:
$$\frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x(x-1)}.$$
Eli nimittäjän nollakohdat ovat selvästi 0 ja 1. Täten osamurtohajotelma on muotoa
$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1}.$$
Tästä voidaan ratkaista kertoimet A_1 ja A_2 vanhaan malliin:
$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x-1)} &= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} \\ &= \frac{A_1(x-1)}{x(x-1)} + \frac{A_2 x}{x(x-1)} \\ &= \frac{A_1 x - A_1 + A_2 x}{x(x-1)}.\end{aligned}$$
Jälleen ratkaistaan termit A_1 ja A_2 asettamalla $1 = A_1 x - A_1 + A_2 x$. Tästä seuraa heti, että $A_1 = -1$. Tästä taas seuraa, että $A_2 = 1$. Täten
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x-1)} \mathrm{d}x &= \int \frac{-1}{x} \mathrm{d}x + \int \frac{1}{x-1} \mathrm{d}x \\ &= -\ln|x| \mathrm{d}x + \ln|x-1| + C.\end{aligned}$$

Toinen osamurtotapaus, jota käsittelemme, on tapaus jossa osoittajan asteluku on suurempi kuin nimittäjän asteluku. Tällainen funktio on esimerkiksi

$$\frac{x^4}{x^2 - 3x + 2}.$$

Tällainen polynomi pitää aluksi muokata eri muotoon esimerkiksi jakokulmassa. Alla tämä muokkaus kuitenkin suoritetaan hieman eri tavalla. Ideana on esittää osoittaja x^4 muodossa "nimittäjä kertaa jokin luku plus jokin luku". Eli yleisesti ottaen haluamme esittää rationaalifunktion $P(x)/Q(x)$ muodossa

$$\frac{a(x)Q(x) + b(x)}{Q(x)} = a(x) + \frac{b(x)}{Q(x)},$$

jossa $a(x)$ ja $b(x)$ ovat polynomeja ja $P(x) = a(x)Q(x) + b(x)$. Ideana on, että osamäärä $\frac{b(x)}{Q(x)}$ olisi muodossa, jossa nimittäjän asteluku olisi suurempi kuin osoittajan asteluku.

Funktion

$$\frac{x^4}{x^2 - 3x + 2}$$

tapauksessa haluamme siis lisätä osoittajaan nimittäjän $x^2 - 3x + 2$ kerrottuna jollakin polynomilla. Koska osoittajassa on termi x^4, niin kerrotaan tämä nimittäjä termillä x^2, jolloin näiden tulossa esiintyy termi x^4:

$$\begin{aligned}\frac{x^4}{x^2 - 3x + 2} &= \frac{x^2(x^2 - 3x + 2) + (3x^3 - 2x^2)}{x^2 - 3x + 2}\\ &= x^2 + \frac{3x^3 - 2x^2}{x^2 - 3x + 2}.\end{aligned}$$

Tuossa jälkimmäinen termi $3x^3 - 2x^2$ valittiin siten, että pätee yhtäsuuruus $x^4 = x^2(x^2 - 3x + 2) + (3x^3 - 2x^2)$. Tämän jälkeen osoittajan tekijät jaettiin erikseen nimittäjällä. Saadussa funktiossa on kuitenkin edelleen tekijä $(3x^3 - 2x^2)/(x^2 - 3x + 2)$, jossa osoittajan aste ylittää nimittäjän asteen. Sovelletaan tähänkin samaa tekniikkaa: esitetään sen osoittaja nimittäjän kertoimen ja jäännöstermin avulla:

$$\begin{aligned}\frac{3x^3 - 2x^2}{x^2 - 3x + 2} &= \frac{3x(x^2 - 3x + 2) + (9x^2 - 6x)}{x^2 - 3x + 2}\\ &= 3x + \frac{9x^2 - 6x}{x^2 - 3x + 2}.\end{aligned}$$

Tässä valittiin jälleen nimittäjään kerroin $3x$ siten että osoittajan suurin termi $3x^3$ saataisiin nimittäjän ja termin $3x$ kertoimena. Termi $(9x^2 - 6x)$ valittiin siten, että pätisi $3x^3 - 2x^2 = 3x(x^2 - 3x + 2) + (9x^2 - 6x)$.

Nyt olemme saaneet alkuperäisen funktion muotoon

$$\frac{x^4}{x^2 - 3x + 2} = x^2 + 3x + \frac{9x^2 - 6x}{x^2 - 3x + 2}.$$

Muokataan vielä tämä viimeinen termi samalla taktiikalla kuntoon. Esitetään se muodossa

$$\begin{aligned}\frac{9x^2 - 6x}{x^2 - 3x + 2} &= \frac{9(x^2 - 3x + 2) + (21x - 18)}{x^2 - 3x + 2}\\ &= 9 + \frac{21x - 18}{x^2 - 3x + 2}\end{aligned}$$

Täten olemme saaneet muokattua alkuperäisen funktion muotoon

$$\frac{x^4}{x^2 - 3x + 2} = x^2 + 3x + 9 + \frac{21x - 18}{x^2 - 3x + 2}.$$

Tämän viimeinen termi ei ole vieläkään integroitavissa, mutta ainakin se on tuttua tyyppiä, jossa nimittäjän asteluku ylittää osoittajan asteluvun. Lisäksi sen nimittäjä voidaan esittää tulomuodossa: $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$, joten lauseke voidaan esittää osamurtoina:

$$\frac{21x - 18}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x - 2}.$$

Tästä voidaan ratkaista vanhaan tapaan $A_1 = -3$ ja $A_2 = 24$. Täten alkuperäinen funktio saadaan integroitua seuraavasti:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{x^2 - 3x + 2}\mathrm{d}x &= \int x^2 + 3x + 9 - \frac{3}{x - 1} + \frac{24}{x - 2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x - 3\ln|x - 1| + 24\ln|x - 2| + C.\end{aligned}$$

4 Lisää osamurtoja

Tutkitaan jälleen rationaalifunktion $P(x)/Q(x)$ integrointia. Aiemmin käsittelimme tapauksen, jossa nimittäjä voidaan esittää muodossa $Q(x) =$

$a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$. Tässä siis nimittäjällä on n kappaletta nollakohtia: nollakohdat ovat $x_1, x_2, \ldots, x_n$, jotka olivat kaikki keskenään erisuuria eli $x_i \neq x_j$ kun $i \neq j$. Tällainen yhtälö saatiin integroitua esittämällä se muodossa

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-x_n}$$

ja integroimalla tämän lausekkeen oikea puoli. Tässä siis rationaalifunktio jaettiin **osamurtoihin**.

Nyt jatketaan osamurtojen käsittelyä, mutta enää ei oleteta että nimittäjän voi esittää muodossa $Q(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$, jossa nollakohdat ovat erisuuria. Voi olla esimerkiksi, että integroitava rationaalifunktio on

$$\frac{1}{(x-3)^2} = \frac{1}{(x-3)(x-3)}, \tag{4.3}$$

jolloin nimittäjällä $(x-3)^2$ on kaksi kertaa toistuva nollakohta $x_1 = 3$. Samoin funktiolla

$$\frac{1}{(x-10)(x-1)^8}$$

on 8-kertainen nollakohta $x_1 = 1$, minkä lisäksi sillä on selvästi nollakohta $x_2 = 10$. Tällainen **useampikertainen nimittäjän nollakohta** voidaan myös ratkaista osamurtohajotelmalla, mutta se vaatii *erilaista* osamurtohajotelmaa.

Ensinnä pitää huomata, että yllä yhtälö (4.3) on helppo integroida, sillä

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-3)^2}\mathrm{d}x &= \int (x-3)^{-2}\mathrm{d}x \\ &= -(x-3)^{-1} + C \\ &= -\frac{1}{x-3} + C.\end{aligned}$$

Jaetaan nyt yhtälö

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)^2}$$

osamurtoihin seuraavasti:

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-3} + \frac{A_3}{(x-3)^2}.$$

Nyt siis kahteen kertaan toistuva nollakohta 3 aiheuttaa sen, että termi $x-3$ esiintyy osamurtohajotelmassa sekä ensimmäisessä että toisessa potenssissa. Nyt yllä olevasta yhtälöstä voidaan ratkaista tuttuun malliin kertoimet A_1,A_2 ja A_3:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)(x-3)^2} &= \frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x-3}+\frac{A_3}{(x-3)^2}\\ &= \frac{A_1(x-3)^2}{(x-1)(x-3)^2}+\frac{A_2(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}+\frac{A_3(x-1)}{(x-1)(x-3)^2}\\ &= \frac{A_1(x^2-6x+9)}{(x-1)(x-3)^2}+\frac{A_2(x^2-4x+3)}{(x-1)(x-3)^2}+\frac{A_3(x-1)}{(x-1)(x-3)^2}.\end{aligned}$$

Tästä yhtälöstä voidaan ratkaista kertoimet A_1, A_2 ja A_3 asettamalla osoittajat yhtä suuriksi:

$$1 = A_1(x^2-6x+9)+A_2(x^2-4x+3)+A_3(x-1).$$

Tämän yhtälön vasemmalla puolella ei esiinny termejä, jossa olisi kertoimena x^2 tai x. Täten on oltava esimerkiksi, että $A_1x^2+A_2x^2=0 \iff A_1+A_2=0$. Vastaavalla päättelyllä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} A_1+A_2&=0\\ -6A_1-4A_2+A_3&=0\\ 9A_1+3A_2-A_3&=1\end{aligned}$$

Tästä saadaan ratkaistua kertoimet

$$\begin{aligned} A_1&=1/4\\ A_2&=-1/4\\ A_3&=1/2.\end{aligned}$$

Täten integrointi voidaan suorittaa seuraavasti:

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(x-1)(x-3)^2}\mathrm{d}x &= \int\frac{1/4}{x-1}\mathrm{d}x+\int\frac{-1/4}{x-3}\mathrm{d}x+\int\frac{1/2}{(x-3)^2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x-3|-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-3}\right)+C.\end{aligned}$$

Yllä olevalla tekniikalla voidaan ratkaista myös lauseke, jossa toistuvia nollakohtia on enemmän kuin kaksi. Esimerkiksi yhtälö

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)^3}$$

jaetaan osamurtoihin seuraavasti:

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)^3} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-3} + \frac{A_3}{(x-3)^2} + \frac{A_4}{(x-3)^3}.$$

Yleisesti ottaen siis rationaalifunktio, jonka nimittäjässä on k-kertainen juuri, voidaan jakaa osamurtoihin seuraavasti:

$$\frac{P(x)}{a(x-x_1)(x-x_2)^k} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \frac{A_3}{(x-x_2)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-x_2)^k}.$$

Osamurtohajotelmista on nyt on käsitelty tapaukset, joissa rationaalifunktion $P(x)/Q(x)$ nimittäjä voidaan esittää nollakohtiensa tulona eli muodossa $a(x-x_1)\cdots(x-x_n)$. Kuitenkin esimerkiksi funktion

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}$$

nimittäjän tekijällä x^2+1 ei ole yhtään nollakohtaa, koska $x^2+1 > 0$ kaikilla x. Tällöin osamurtohajotelma saa seuraavan muodon:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1},$$

jossa A, B ja C ovat reaalilukuja. Tällä kertaa nollakohdattoman termin x^2+1 osamurtoon tulee termi, joka on muotoa $Bx+C$. Tämän jälkeen lasku sujuu samaan tapaan kuin aikaisemminkin.

Esimerkki 4.1. Integroidaan rationaalifunktio

$$\frac{x}{x^3-2x^2+x-2}.$$

Ensinnä huomataan kokeilemalla, että nimittäjän yksi nollakohta on $x_1 = 2$. Täten nimittäjä voidaan esittää termin $(x-2)$ ja jonkin toisen termin tulona. Huomataan, että itse asiassa nimittäjä voidaan jakaa tekijöihin seuraavasti: $x^3-2x^2+x-2 = (x-2)(x^2+1)$. Täten integroitavana on funktio

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+1)}.$$

Tässä tekijällä x^2+1 ei ole yhtään nollakohtaa. Täten osamurtohajotelma on seuraava:

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Tästä ratkaistaan seuraavaksi kertoimet A, B ja C:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{(x-2)(x^2+1)} &= \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\
&= \frac{A(x^2+1)}{(x-2)(x^2+1)} + \frac{(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+1)} \\
&= \frac{Ax^2+A}{(x-2)(x^2+1)} + \frac{Bx^2-2Bx+Cx-2C}{(x-2)(x^2+1)}.
\end{aligned}$$

Asetetaan jälleen samankertoimiset termit yhtä suuriksi, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
A &= 2/5 \\
B &= -2/5 \\
C &= 1/5
\end{aligned}$$

Täten integrointi voidaan suorittaa seuraavalla hajotelmalla:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{(x-2)(x^2+1)} \mathrm{d}x &= \int \frac{2/5}{x-2} \mathrm{d}x + \int \frac{-2/5x+1/5}{x^2+1} \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{5} \int \frac{1}{x-2} \mathrm{d}x - \frac{1}{5} \int \frac{2x}{x^2+1} \mathrm{d}x + \frac{1}{5} \int \frac{1}{x^2+1} \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{5} \ln|x-2| - \frac{1}{5} \ln|x^2+1| + \frac{1}{5} \arctan x + C.
\end{aligned}$$

Tässä toisella rivillä jaettiin tekijä $(-2/5x+1/5)/(x^2+1)$ kahteen osaan, joista toiseen käytettiin tulosta, jonka mukaan funktion $1/(1+x^2)$ integraali on $\arctan x$.

Nyt olemme käsitelleet kaikki osamurtotapaukset. Rationaalifunktio $P(x)/Q(x)$ integroidaan siis seuraavasti:

1. Jos rationaalifunktio on muotoa $F'(x)/F(x)$ se voidaan integroida suoraan: sen integraali on $\ln|F(x)| + C$. Samoin jos rationaalifunktio on muotoa $1/(x-x_n)^k$, se voidaan integroida suoraan. Kolmas suoraan integroitava lauseke on $1/(1+x^2)$.

2. Jos rationaalifunktio ei ole jompaa kumpaa näistä muodoista, se palautetaan näihin muotoihin osamurtohajotelman avulla. Tästä on useita tapauksia:

   (a) Jos osoittajan aste on suurempi tai yhtä suuri kuin nimittäjän aste, se muokataan esimerkiksi jakokulman avulla muotoon, jossa nimittäjän aste ylittää osoittajan asteen.

(b) Jos nimittäjän aste ylittää osoittajan asteen, rationaalifunktio esitetään osamurtojen summana. Osamurtojen tarkka muoto riippuu siitä, onko nimittäjällä kuinka monta nollakohtaa, ja jos on, niin ovatko nämä nollakohdat useampikertaisia vai uniikkeja. Osamurtohajotelman avulla rationaalifunktio palautetaan muotoon, jossa se voidaan esittää esimerkiksi muotoa $F'(x)/F(x)$ olevien termien summana.

5 Sijoituskeino

Jos integraali ei ratkea tähän mennessä käsitellyillä tekniikoilla, voidaan integroitava lauseke usein muokata ratkeavaan muotoon sijoittamalla x:n paikalle jokin muu muuttuja. Esimerkiksi integraalin

$$\int \frac{1}{x^2+6x+10}\mathrm{d}x$$

voi ratkaista **sijoituskeinolla**. Muokataan aluksi nimittäjä $x^2+6x+10$ muotoon, josta nähdään millainen sijoitus kannattaa tehdä. Huomataan, että $x^2+6x+10 = x^2+6x+9+1 = (x+3)^2+1$, joten luonteva sijoitus olisi valita $t = x+3$. Eli nyt tekijä $x+3$ korvataan t:llä:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+6x+10}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(x+3)^2+1}\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{t^2+1}dt\end{aligned}$$

Yllä sijoitettiin myös dx:n paikalle dt, koska integrointi suoritettiin lopulta t:n suhteen. Nyt integraali on ratkeavassa muodossa, sillä integraali, joka on muotoa $1/(1+x^2)$ on arkustangenttifunktion integraali. Eli:

$$\int \frac{1}{t^2+1}dt = \arctan t + C$$

Sijoituskeinoa käyttäessä pitää muistaa lopussa sijoittaa takaisin x:ää sisältävä lauseke t:n paikalle. Tässä tehtävässä siis sijoitetaan $t = x+3$ takaisin, jolloin saadaan lopullinen vastaus:

$$\int \frac{1}{x^2+6x+10}\mathrm{d}x = \arctan(x+3) + C.$$

Sijoituskeinossa siis sijoitetaan jonkin x:n lausekkeen paikalle t. Tyypillinen sijoitus on esimerkiksi

$$\begin{aligned}t &= \sqrt{x} \text{ eli} \\ x &= t^2.\end{aligned}$$

Tällaisen sijoituksen idea on siis tehdä integroitavasta lausekkeesta helposti laskettava. Sijoituskeinossa siis korvataan x lausekkeella $g(t)$ eli jollakin t:n funktiolla. Käytännössä tehtävästä etsitään x:ää sisältäviä termejä, joiden paikalle olisi kätevää sijoittaa t. Yllä esimerkiksi valitsimme termin $x+3$ korvattavaksi t:llä, koska se teki integroinnista helpompaa. Sijoituskeinoa soveltavissa tehtävissä ongelmana on yleensä nimen omaan keksiä mikä lauseke kannattaa korvata t:llä. Usein ensimmäinen sijoitusyritys ei tuota tulosta, vaan on yritettävä uudestaan eri sijoituksella.

Aina kun sijoittaa t:n lausekkeeseen, pitää muistaa myös korvata dx lausekkeella $g'(t)dt$ eli funktion g derivaatan ja dt:n tulolla. Yllä tämä ei ollut ongelma, koska jos $t = x+3$ niin $x = t-3 = g(t)$ ja selkeästi $g'(t) = 1$, jolloin $\mathrm{d}x = dt$.

Esimerkki 5.1. Lasketaan integraali

$$\int x\sqrt{x+1}\mathrm{d}x$$

sijoituksella. Tässä potentiaalisina sijoituksina tulee mieleen $t = x+1$ ja $t = \sqrt{x+1}$. Tämä tehtävä ratkeaa kätevästi tällä jälkimmäisellä sijoituksella, joten olkoon $t = \sqrt{x+1}$. Ensin ratkaistaan tästä x:

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{x+1} \\ t^2 &= x+1 \\ x &= t^2 - 1 = g(t) \end{aligned}$$

Tästä saadaan, että $g'(t) = 2t$, jolloin meidän pitää muistaa sijoittaa dx:n paikalle $2tdt$. Tällöin tehdään sijoitukset

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} &= t \\ x &= t^2 - 1 \text{ ja} \\ \mathrm{d}x &= 2tdt \end{aligned}$$

jolloin lauseke saadaan muotoon

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x+1}\mathrm{d}x &= \int (t^2-1)t(2tdt) \\ &= \int 2t^4 - 2t^2 dt \\ &= \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + C \end{aligned}$$

Lopullinen vastaus saadaan sijoittamalla yllä t:n paikalle takaisin lauseke $\sqrt{x+1}$:

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+1}\mathrm{d}x &= \frac{2}{5}(\sqrt{x+1})^5 - \frac{2}{3}(\sqrt{x+1})^3 + C \\ &= \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

Yllä sijoituskeino ratkaisi tehtävän melko suoraan. Usein sijoituksen tuloksena kuitenkin päädytään lausekkeeseen, jota on muokattava esimerkiksi osamurroilla parempaan muotoon.

Sijoituskeinossa ja osamurroissa on siis kummassakin ideana muokata integroitavaa lauseketta helpompaan muotoon. Usein lausekkeen saa helpompaan muotoon muullakin tavoin. Esimerkiksi jos laskettavana on integraali

$$\int 2\sin x \cos x \mathrm{d}x$$

voimme käyttää kaavaa $2\sin x\cos x = \sin 2x$, jolla integraali ratkeaa helposti.

6 Määrätty integraali

Aiemmin tarkastelimme määräämätöntä integraalia $\int(\cdot)\mathrm{d}x$, jonka hyöty on pääosin siinä, että se on derivoinnin käänteistoimitus. Nyt käsittelemme alustavasti **määrättyä integraalia**

$$\int_a^b (\cdot)\mathrm{d}x.$$

Tähän on aiempaan verrattuna lisätty integroinnin rajat: integrointi aloitetaan pisteestä $x = a$ ja lopetetaan pisteeseen $x = b$. Eli väli (a, b) on integrointiväli: funktio integroidaan tältä väliltä. Määrätty integraali on hyvin kätevä käsite. Esimerkiksi jos $f(x)$ on ei-negatiivinen funktio eli $f(x) \geq 0$, niin määrätty integraali

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

mittaa funktion f ja x-akselin rajoittaman alueen pinta-alaa välillä $a \leq x \leq b$. Määrätyn integraalin intuitio on se, että jos välin (a, b) pituus on 1 (eli jos $b = a + 1$), niin määrätty integraali antaa funktion keskiarvon tällä välillä. Esimerkiksi tiedetään, että

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Koska välin $(0, 1)$ pituus on yksi, niin voimme sanoa, että funktion x^2 keskiarvo tällä on tällä välillä on $1/3$. Yllä huomataan, että määrätyllä integraalilla on myös se hyvä puoli, että sen arvo on yksikäsitteinen. Samaa ei voi sanoa määräämättömästä integraalista, jossa on aina mukana vakio C.

Jos välin (a, b) pituus ei ole yksi, voidaan sanoa että määrätty integraali antaa funktion keskiarvon tällä välillä *kerrottuna välin* (a, b) *pituudella* eli luvulla $b - a$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \Big(\text{Funktion } f \text{ keskiarvo välillä } (a, b)\Big) \cdot (b - a).$$

Tämän intuition avulla voimme antaa arvioita tietyn määrätyn integraalin arvolle. Jos tiedämme vaikka, että funktio f saa aina arvonsa välillä $1/2$ ja $3/2$ eli $1/2 \leq f(x) \leq 3/2$, niin luonnollisesti tämän funktion keskiarvo on myös tällä välillä. Koska määrätty integraali on funktion keskiarvo tietyllä välillä (a, b) kerrottuna tämän välin pituudella, voidaan nyt sanoa

$$\frac{1}{2}(b - a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{3}{2}(b - a).$$

7 Ylä- ja alasumma

Määrätyn integraalin täsmällinen määritelmä vaatii **alasumman** ja **yläsumman** käsitteitä. Ylä- ja alasumma kertovat yksinkertaisesti arvion tietyn käyrän alla olevan alueen pinta-alalle. Oletetaan nyt, että haluamme laskea määrätyn integraalin

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

eli haluamme laskea funktion $f(x)$ alla olevan alueen pinta-alan, kun $x \in (0, 1)$. Alasumma $\underline{a}$ antaa tälle pinta-alalle alarajan ja yläsumma $\bar{a}$ antaa puolestaan tälle pinta-alalle ylärajan, eli

$$\underline{a} \leq \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leq \bar{a}$$

Kummankin laskeminen aloitetaan jakamalla väli (a, b) osiin. Yllä käytetty väli on $(0, 1)$. Tämän voi jakaa osiin esimerkiksi seuraavasti:

$$(0,1) = (0,1/3] \cup (1/3,2/3] \cup (2/3,1)$$

Tässä **jakopisteet** ovat $1/3$ ja $2/3$. Ne siis jakavat välin (0,1) kolmeen osaan. Alasumma saadaan tämän jaon avulla laskettua kolmessa osassa. Valitaan ensin väliltä $(0, 1/3)$ funktion $f(x)$ pienin[3] arvo tällä välillä. Olkoon tämä m_1. Seuraavaksi valitaan funktion pienin arvo väliltä $(1/3, 2/3)$. Olkoon tämä m_2. Valitaan vastaavasti funktion pienin arvo välillä $(2/3, 1)$, jota merkitään m_3. Nyt näiden jakopisteiden määrittämä alasumma saadaan laskettua kertomalla nuo pisteet m_1, m_2 ja m_3 kyseisten välien pituuksilla (eli luvulla $1/3$):

$$\underline{a} = \frac{1}{3}m_1 + \frac{1}{3}m_2 + \frac{1}{3}m_3.$$

Yläsumma saadaan vastaavasti laskemalla funktion *suurimmat* arvot yllä muodostetuilla väleillä. Merkitään näitä suurimpia arvoja M_1, M_2 ja M_3. Näistä saadaan laskettua yläsumma kaavalla

$$\bar{a} = \frac{1}{3}M_1 + \frac{1}{3}M_2 + \frac{1}{3}M_3.$$

Esimerkki 7.1. Lasketaan integraalille

$$\int_1^2 x^2 dx$$

ylä- ja alasumma. Ensin pitää päättää välin $(2, 3)$ jakopisteet. Valitaan pisteiksi $4/3$ ja $5/3$, jolloin saamme siis kolme väliä. Ensin pitäisi laskea funktion pienemmät ja suurimmat arvot näillä väleillä. Tämä on helppoa, koska f on välillä $(2, 3)$ aidosti kasvava funktio: suurin arvo on siis aina välin oikeassa päätepisteessä ja pienin arvo on taas vasemmassa päätepisteessä. Täten alasumman kaava on

$$\begin{aligned}
\underline{a} &= \frac{1}{3}f(1) + \frac{1}{3}f(4/3) + \frac{1}{3}f(5/3) \\
&= \frac{1}{3}1 + \frac{1}{3}16/9 + \frac{1}{3}25/9 \\
&= \frac{9}{27} + \frac{16}{27} + \frac{25}{27} \\
&= \frac{50}{27} \approx 1,85
\end{aligned}$$

[3] Jos funktio ei saavuta minimiä tällä välillä, valitaan infimum minimin asemesta: $m_1 = \inf\{f(x) : x \in (0, 1/3)\}$.

Vastaavasti yläsumman kaava on

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \frac{1}{3}f(4/3) + \frac{1}{3}f(5/3) + \frac{1}{3}f(2)\\ &= \frac{1}{3}16/9 + \frac{1}{3}25/9 + \frac{1}{3}4\\ &= \frac{16}{27} + \frac{25}{27} + \frac{36}{27}\\ &= \frac{77}{27} \approx 2,85\end{aligned}$$

Todellisuudessa tuo määrätty integraali on arvoltaan $7/3 \approx 2,33$. Tässä tehtävässä nähtiin myös esimerkki siitä, että alasumma on aina pienempi kuin yläsumma, kun taas itse määrätty integraali on näiden kahden välissä.

Yllä jaoimme välin vain kolmeen osaan. Jakoa voi kuitenkin tihentää valitsemalla enemmän ja enemmän jakopisteitä. Tällöin tämän jaon määrittämät ylä- ja alasummat lähestyvät toisiaan ja niiden antama arvio funktion rajoittaman alan pinta-alalle on yhä parempi. Tämän takia määrätty integraali määritellään ylä- tai alasummien raja-arvona, kun tuota jakoa tihennetään rajatta, eli kun jakopisteitä valitaan yhä enemmän ja enemmän.

Tästä määritelmästä nähdään myös, miksi määrätty integraali voidaan tulkita keskiarvona, kun integrointivälin pituus on 1. Jos jakopisteitä on aluksi vaikka 5, on alasumma

$$\begin{aligned}\underline{a} &= \frac{1}{5}m_1 + \frac{1}{5}m_2 + \frac{1}{5}m_3 + \frac{1}{5}m_4 + \frac{1}{5}m_5\\ &= \frac{1}{5}(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5).\end{aligned}$$

Toisin sanottuna alasumma on funktion viiden arvon keskiarvo. Jos jakoa tihennetään, niin funktiosta otetaan keskiarvoja, jossa on mukana yhä enemmän ja enemmän funktion pisteitä. Esimerkiksi jos jakopisteitä on 100, saadaan alasumma

$$\underline{a} = \frac{1}{101}\sum_{i=1}^{101} m_i.$$

Täten määrätyn integraalin tulkinta keskiarvona on oikeutettu. Tästä nähdään myös, että määrätty integraali on siis eräänlainen *summa*.

8 Määrätyn integraalin laskeminen

Aiemmin määrittelimme määrätyn integraalin $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ funktion $f(x)$ ala- ja yläsummien raja-arvona. Määrätyllä integraalilla on kaksi intuitiivista tulkintaa:

1. Mikäli $f(x)$ on ei-negatiivinen eli $f(x) \geq 0$, niin määrätty integraali antaa funktion $f(x)$ ja x-akselin välissä olevan alueen pinta-alan välillä (a, b).

2. Määrätty integraali $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ on funktion $f(x)$ keskiarvo välillä (a, b) kerrottuna tämän välin pituudella eli luvulla $b - a$.

Funktion $f(x)$ määräämätön integraali $\int f(x)\mathrm{d}x$ määriteltiin puolestaan ilman vastaavanlaista intuitiota: se on ainoastaan laskusääntö, joka on derivoinnin käänteistoimitus. Eli esimerkiksi

$$\int \left(x^3 + \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + \arctan x + C.$$

Määräämätön integraali ja määrätty integraali kuitenkin liittyvät toisiinsa kiinteästi, kuten näiden nimistäkin voi päätellä. Merkitään alla määräämätöntä integraalia $\int f(x)\mathrm{d}x$ merkinnällä $F(x)$. Eli

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x.$$

Täten esimerkiksi jos $f(x) = x^3$, niin $F(x) = (1/4)x^4 + C$.

Integraalilaskennan päälause sanoo, että määrätyt integraalit voi laskea määräämättömien integraalien avulla:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Eli: halutaan laskea funktion $f(x)$ määrätty integraali välillä (a, b). Tämä saadaan laskemalla aluksi funktion f määräämätön integraali $F(x)$ ja katsomalla, mikä sen arvo on pisteessä a ja mikä sen arvo on pisteessä b.

Esimerkki 8.1. Halutaan laskea määrätty integraali $\int_3^4 x^2\mathrm{d}x$. Integraalilaskennan päälauseen mukaan:

$$\int_3^4 x^2\mathrm{d}x = F(4) - F(3),$$

jossa F on funktion x^2 määräämätön integraali eli $F(x) = (1/3)x^3 + C$. Täten

$$\begin{aligned}\int_3^4 x^2 \mathrm{d}x &= F(4) - F(3) \\ &= \left(\frac{1}{3}4^3 + C\right) - \left(\frac{1}{3}3^3 + C\right) \\ &= \frac{64}{3} - 9 \\ &= \frac{37}{3}.\end{aligned}$$

Toisin sanottuna funktion x^2 määrätty integraali välillä $(3,4)$ on $37/3 \approx 12,3$. Huomaa yllä, että vakio C häviää määrättyä integraalia laskettaessa. Näin käy aina, joten sitä on turha pitää laskussa mukana.

Huomaa edellisessä esimerkissä, että tulos $\int_3^4 x^2 \mathrm{d}x \approx 12,3$ kertoo, että funktion x^2 keskimääräinen arvo välillä $(3,4)$ on 12,3. Toinen tulkinta on, että tämän funktion ja x akselin väliin jää pinta-ala, joka on suuruudeltaan 12,3 välillä $(3,4)$.

Esimerkki 8.2. Lasketaan $\int_a^b e^x \mathrm{d}x$. Koska e^x on oma integraalinsa, niin

$$\begin{aligned}\int_a^b e^x \mathrm{d}x &= F(b) - F(a) \\ &= e^b - e^a.\end{aligned}$$

Huomaa, että tässä vakiota C ei pidetty laskussa mukana.

Määrätyn integraalin laskemista helpottaa käytännössä, jos käytämme notaation $F(b) - F(a)$ asemesta merkintää $\Big|_a^b$. Täten siis esimerkiksi

$$\begin{aligned}\int_a^b (3x+1)\mathrm{d}x &= \Big|_a^b \left(\frac{3}{2}x^2 + x\right) \\ &= \left(\frac{3}{2}b^2 + b\right) - \left(\frac{3}{2}a^2 + a\right).\end{aligned}$$

Kuten yllä mainitsimme, määrätyn integraalin voi nähdä keskiarvona tai pinta-alana. Tästä tulkinnasta seuraa hyödyllisiä sovelluksia. Seuraavassa esimerkissä käytetään lisäksi tietoa

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)\mathrm{d}x,$$

eli integroinnin lineaarisuutta.

Esimerkki 8.3. Laske käyrien $y = x^2$ ja $y = x$ sekä suorien $x = 1$ ja $x = 2$ reunustaman alueen pinta-ala.

Ratkaisu. Kuten tunnettua, pinta-alan voi laskea integraalina $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Koska reunustamassa on suorat $x = 1$ ja $x = 2$, niin valitaan integroinnin päätepisteiksi $a = 1$ ja $b = 2$. Lisäksi tiedetään

1. Integraali $\int_a^b x^2\mathrm{d}x$ antaa käyrän $y = x^2$ ja x-akselin välissä olevan alueen pinta-alan. Merkitään tätä alaa A.
2. Integraali $\int_a^b x\mathrm{d}x$ antaa suoran $y = x$ ja x-akselin välissä olevan alueen pinta-alan. Merkitään tätä alaa B.
3. Välillä $(1, 2)$ pätee $x^2 > x$, eli käyrä $y = x^2$ on suoran $y = x$ yläpuolella.

Täten käyrien $y = x^2$ ja $y = x$ välissä olevan alueen pinta-ala saadaan erotuksena $A - B$. Eli erotuksena

$$\int_a^b x^2\mathrm{d}x - \int_a^b x\mathrm{d}x = \int_a^b (x^2 - x)\mathrm{d}x.$$

Tästä seuraa, että käyrien $y = x^2$ ja $y = x$ reunustaman alueen pinta-ala välillä $(1, 2)$ saadaan integroimalla erotus $x^2 - x$ integrointirajoilla $a = 1$ ja $b = 2$:

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x^2 - x)\mathrm{d}x &= \Big|_1^2 \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right) \\ &= \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{7}{3} - \frac{3}{2} \\ &= \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

Eli käyrien $y = x^2$ ja $y = x$ sekä suorien $x = 1$ ja $x = 2$ reunustaman alueen pinta-ala on $5/6$.

Esimerkki 8.4. Laske käyrien $y = x^2$ ja $y = x$ sekä suorien $x = 0$ ja $x = 2$ reunustaman alueen pinta-ala.

Ratkaisu. Integrointiväli on nyt $(0, 2)$. Huomataan, että välillä $(0, 1)$ pätee $x > x^2$, mutta välillä $(1, 2)$ taas pätee $x^2 > x$. Käyrien välistä pinta-alaa laskiessa pitää aina vähentää korkeammalla olevasta käyrästä matalammalla oleva käyrä, joten tämä tehtävä on laskettava kahdessa osassa.

Välillä $(0, 1)$ pätee $x > x^2$, joten integroidaan erotus $x - x^2$ tällä välillä:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x - x^2)\mathrm{d}x &= \Big|_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Välillä $(1, 2)$ pätee $x^2 > x$, joten integroidaan tällä välillä puolestaan erotus $x^2 - x$:

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x^2 - x)\mathrm{d}x &= \Big|_1^2 \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right) \\ &= \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

Täten käyrien $y = x^2$ ja $y = x$ sekä suorien $x = 0$ ja $x = 2$ reunustaman alueen pinta-ala on $1/6 + 5/6 = 1$.

9 Määrätyn integraalin laskeminen sijoituksella

Aiemmin laskimme määräämättömiä integraaleja sijoituksella $x = g(t)$. Siinä siis integroitavan lausekkeen muuttuja x korvattiin sijoituksella $g(t)$ ja vastaavasti termi $\mathrm{d}x$ korvattiin termillä $g'(t)dt$. Määrätyn integraalin laskeminen tällä tavalla on periaatteessa samanlaista, mutta integroinnin rajat a ja b pitää myös muuntaa.

Esimerkki 9.1. Lasketaan nyt integraali

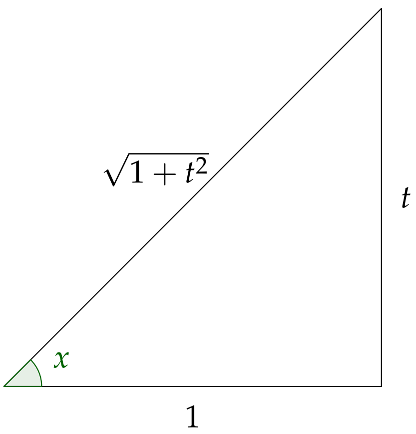
$$\int_{-1}^0 x\sqrt{x+1}\mathrm{d}x.$$

Tehdään aluksi sijoitus $t = x + 1$, jolloin $x = t - 1$ ja $\mathrm{d}x = dt$. Integrointilausekkeeseen tehdään nyt nämä sijoitukset, mutta pitää huomata että *sijoituksen takia myös integroinnin rajat muuttuvat*. Integrointirajat $a = -1$ ja $b = 0$ on määritelty muuttujan x suhteen ja nyt siirrytään muuttujaan $t = x + 1$. Täten jos $x = -1$, niin $t = 0$ ja jos $x = 0$, niin $t = 1$. Integrointirajojen $a = 0$ ja $b = 1$ paikalle tulevat täten uudet rajat $c = 0$ ja $d = 1$.

Tällöin integraali saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} x\sqrt{x+1}\mathrm{d}x &= \int_0^1 (t-1)\sqrt{t}dt \\
&= \int_0^1 t^{3/2} - t^{1/2}dt \\
&= \Big|_0^1 \left(\frac{2}{5}t^{5/2} - \frac{2}{3}t^{3/2}\right) \\
&= \frac{2}{5} - \frac{2}{3} \\
&= -\frac{4}{15}
\end{aligned}$$

Seuraavaksi käsitellään trigonometristen funktioiden integroimista sijoituskeinolla. Määritellään aluksi trigonometrisen funktiot yksikköympyrän avulla. Tarkastellaan alla olevaa kuvaa. Huomaa ensinnä, että kuvassa pätee Pythagoraan lause $a^2 + b^2 = c^2$ eli hypotenuusan neliö on yhtä kuin kateettien neliöiden summa:



Eli pätee $(\sqrt{1+t^2})^2 = 1^2 + t^2$. Toisaalta koska kulman x sini on määritelmän mukaan sen vastaisen sivun ja hypotenuusan suhde, pätee

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Vastaavasti kulman kosiini on sen kulman viereisen sivun ja hypotenuusan suhde, joten

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Tangentti puolestaan on kulman vastaisen ja viereisen sivun suhde eli kuvassa

$$\tan x = t.$$

Näitä tietoja voi käyttää sovellettaessa sijoitusta $t = \tan x$. Tätä sijoitusta käytetään integraaleihin, jotka ovat muotoa

$$\int \frac{1}{a + b\sin^2 x + c\cos^2 x} \mathrm{d}x.$$

Tällöin tehdään korvaukset

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{t^2}{1+t^2} \quad \text{ja} \\ \cos^2 x &= \frac{1}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Esimerkki 9.2. Integroidaan

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{4 - 3\sin^2 x} \mathrm{d}x.$$

Tehdään sijoitus $\tan x = t$. Täten $x = \arctan t$, joten $\mathrm{d}x = dt/(1+t^2)$. Termin $\sin^2 x$ paikalle puolestaan sijoitetaan termi $t^2/(1+t^2)$.

Myös integroinnin rajat muuttuvat: kun $x = -\pi/4$, niin $\tan x = -1$ ja kun $x = \pi/4$, niin $\tan x = 1$. Tehdään kaikki nämä sijoitukset:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{4 - 3\sin^2 x} \mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{4 - 3(t^2/(1+t^2))} \left(\frac{dt}{1+t^2} \right) \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{4(1+t^2) - 3t^2} dt \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{4+t^2} dt. \end{aligned}$$

Tämä integraali näyttää nyt kohtalaisen yksinkertaiselta. Huomataan, että tämä saadaan laskettua arkustangenttifunkion avulla:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{4+t^2} dt &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+(t/2)^2} \right) dt \\
&= \Big|_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2} \arctan(t/2) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\arctan(1/2) - \arctan(-1/2) \right) \\
&= 2 \arctan(1/2).
\end{aligned}$$

Tässä viimeinen yhtäsuuruus perustuu siihen, että $\arctan(-1/2) = -\arctan(1/2)$.

Sijoituskeinoa käytettäessä pitää siis tehdä seuraavat korvaukset:

1. Muuttujaa x sisältävät termit pitää korvata termillä $g(t)$.
2. Termi dx pitää korvata termillä $g'(t)dt$.
3. Integroinnin rajat pitää korvata uusilla rajoilla.

10 Määrätyn integraalin derivoiminen

Tutkitaan nyt määrättyä integraalia, jonka yläraja on muuttuja x. Tutkitaan siis integraalia

$$\int_a^x f(t) dt.$$

Tämä integraali on nyt muuttujan x funktio, joten voidaan merkitä

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Esimerkki tällaisesta funktiosta on

$$F(x) = \int_a^x (t^2 + t) dt.$$

Huomaa, että tämä on nimenomaan muuttujan x funktio, eikä muuttujan t funktio. Muuttuja t häviää integroitaessa, joten yhtä hyvin voitaisiin kirjoittaa

$$F(x) = \int_a^x (c^2 + c) dc,$$

eli tuo integraalin sisässä oleva kirjain ei ole laskennan kannalta oleellinen.

Integraalilaskennan toinen päälause kertoo, että integraalin $\int_a^x f(t)dt$ derivaatta muuttujan x suhteen on funktio $f(x)$:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t) = f(x).$$

Tämän tuloksen voi tulkita intuitiivisesti, kun muistaa, että määrätyn integraalin voi tulkita pinta-alana. Derivaatta $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)$ siis kertoo, kuinka funktion $f(x)$ ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala muuttuu, kun siirrytään hieman oikealle eli kasvatetaan argumenttia x hieman. Vastaus on, että ala muuttuu funktion f arvon verran. Tämä on sikäli intuitiivista, koska kyseinen pinta-ala muuttuu paljon, jos $f(x)$ on suuri luku ja vähän jos $f(x)$ on pieni luku.

Esimerkki 10.1. Laske derivaatta $F'(x)$, kun

$$F(x) = \int_a^x (t^2 + t)dt.$$

Ratkaisu. Integraalilaskennan päälauseen mukaan

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx}\int_a^x (t^2 + t)dt \\ &= x^2 + x. \end{aligned}$$

Seuraavassa esimerkissä käytetään tietoa

$$\int_x^a f(t)dt = -\int_a^x f(t)dt,$$

eli jos integrointirajojen järjestystä vaihtaa, niin integraali kertoutuu luvulla -1.

Esimerkki 10.2. Laske derivaatta $F'(x)$, kun

$$F(x) = \int_x^a \ln t dt.$$

Ratkaisu. Integraalilaskennan päälauseen mukaan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\int_x^a \ln t dt &= -\frac{d}{dx}\int_a^x \ln t dt \\ &= -\ln x. \end{aligned}$$

Siispä alarajalla oleva muuttuja x on helppo palauttaa ylärajalle. Hieman enemmän ongelmia tuottaa integraalin

$$\int_a^{x^2} f(t)dt$$

laskeminen, sillä tässä ylärajana ei ole muuttuja x, vaan tämän muuttujan funktio x^2. Tästä tilanteesta selvitään kuitenkin sopivalla notaatiolla: merkitään

$$F(x^2) = \int_a^{x^2} f(t)dt,$$

eli nyt merkitään, että laskettava integraali on jonkin muuttujan F arvo pisteessä x^2. Täten siis

$$F(x) = \int_a^{x} f(t)dt.$$

Derivoinnin ketjusäännön perusteella pätee

$$\frac{d}{dx}F(x^2) = 2xF'(x^2),$$

eli yhdistetyn funktion derivaatta saadaan sisäfunktion x^2 ja ulkofunktion F derivaattojen tulona. Tästä seuraa, että

$$\frac{d}{dx}\int_a^{x^2} f(t)dt = 2xf(x^2),$$

jossa siis $2x$ on sisäfunktion x^2 derivaatta ja $f(x^2)$ on ulkofunktion $F(x)$ derivaatta arvioituna pisteessä x^2.

Esimerkki 10.3. Derivoi funktio

$$F(x^2) = \int_a^{x^2} \cos t dt.$$

Ratkaisu. Ketjusäännön ja integroinnin päälauseen mukaan

$$\frac{d}{dx}\int_a^{x^2} \cos t dt = 2x\cos x^2.$$

Jos integroinnin rajana on jokin muu funktio kuin x^2, selvitään tästäkin ketjusäännön yksinkertaisella sovelluksella.

Esimerkki 10.4. Derivoi funktio

$$\int_a^{\sin x} \ln t dt.$$

Ratkaisu. Merkitään ensinnä tätä integraalia funktion F arvona pisteessä $\sin x$:

$$F(\sin x) = \int_a^{\sin x} \ln t dt.$$

Tässä siis sisäfunktio on $\sin x$. Tämän derivaatta on tunnetusti $\cos x$. Nyt voidaan jälleen soveltaa ketjusääntöä:

$$\frac{d}{dx}\int_a^{\sin x} \ln t dt = \cos x \ln|\sin x|.$$

Yllä todettiin, että muuttuja x saa esiintyä joko integroinnin ala- tai ylärajalla. Se voi kuitenkin esiintyä kummallakin rajalla yhtä aikaa. Tämä ei tuota laskuihin ongelmia, koska integraalin voi aina jakaa osiin:

$$\begin{aligned}\int_{-x}^{x} f(t)dt &= \int_{-x}^{0} f(t)dt + \int_0^x f(t)dt \\ &= -\int_0^{-x} f(t)dt + \int_0^x f(t)dt.\end{aligned}$$

Integraalin $\int_0^{-x} f(t)dt$ voi derivoida jälleen ketjusäännöllä: merkitään

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt.$$

Täten

$$\frac{d}{dx}F(-x) = -1f(-x).$$

Tämän perusteella

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x} f(t)dt &= -\frac{d}{dx}\int_0^{-x} f(t)dt + \frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt \\ &= f(-x) + f(x).\end{aligned}$$

Esimerkki 10.5. Derivoi

$$\int_{-x}^{x^3} e^{t^2} dt.$$

Ratkaisu. Jaetaan tämä integraali ensin kahteen osaan:

$$\begin{aligned}\int_{-x}^{x^3} e^{t^2} dt &= \int_{-x}^{0} e^{t^2} + \int_{0}^{x^3} e^{t^2} \\ &= -\int_{0}^{-x} e^{t^2} + \int_{0}^{x^3} e^{t^2}.\end{aligned}$$

Näistä kummankin integrointi sujuu nyt kätevästi ketjusäännöllä:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x^3} e^{t^2} dt &= -\frac{d}{dx}\int_{0}^{-x} e^{t^2} dt + \frac{d}{dx}\int_{0}^{x^3} e^{t^2} \\ &= e^{(-x)^2} + 3x^2 e^{(x^3)^2} \\ &= e^{x^2} + 3x^2 e^{x^6}.\end{aligned}$$

11 Määrätyn integraalin sovelluksia

Määrätyllä integroinnilla on runsaasti sovelluksia, jotka perustuvat siihen, että integraali esittää pinta-alaa. Taloustieteessä esimerkiksi kuluttajan ylijäämä on kahden käyrän välissä oleva pinta-ala, joten sen voi laskea määrättynä integraalina.

Integraalilla voi laskea paitsi aloja, myös tilavuuksia. Tyypillinen sovellus on seuraava: jokin käyrä $y = f(x)$ pyörähtää x-akselin ympäri tietyllä välillä (a, b). Tällaisella pyörähdyskappaleella on tilavuus, joka on helppo laskea integraalin avulla: sen kaava on

$$\pi \int_a^b (f(x))^2 dx,$$

eli kyseisen tilavuuden saa integroimalla f: neliön pyörähdysvälillä (a, b) ja kertomalla tuloksen π:llä.

Esimerkki 11.1. Käyrä $y = x^2 + 1$ pyörähtää x-akselin ympäri välillä $(0, 1)$. Laske syntyneen kappaleen tilavuus.

Ratkaisu. Kyseinen tilavuus saadaan integraalina

$$\begin{aligned}\pi\int_0^1 (x^2+1)^2 dx &= \pi\int_0^1 (x^4+2x^2+1)\mathrm{d}x \\ &= \pi\Big|_0^1 (\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+x) \\ &= \pi(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1) \\ &= \frac{28}{15}\pi.\end{aligned}$$

12 Tilavuuden ja vaipan alan laskeminen

Kuten aiemmin käsittelimme, määrätyn integraalin avulla voi laskea pinta-aloja ja tilavuuksia. Tyypillisenä sovelluksena tilavuuden laskemisesta on tapaus, jossa jokin käyrä $y = f(x)$ pyörähtää x-akselin ympäri jollakin välillä $a \leq x \leq b$. Tällaisen kappaleen tilavuus A saatiin laskettua kaavalla

$$A = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx.$$

Toisaalta määrätyn integraalin avulla voi laskea myös tällaisen pyörähtämällä syntyneen kappaleen vaipan ala. Tämä ala B saadaan laskettua kaavalla

$$B = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

Esimerkki 12.1. Käyrä $f(x) = 1 + x$ pyörähtää x-akselin ympäri välillä $1 \leq x \leq 2$. Syntyneen kappaleen tilavuus A saadaan laskettua yllä esitetyllä kaavalla:

$$\begin{aligned}A &= \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx \\ &= \pi\int_1^2 (1+x)^2\,dx \\ &= \pi\int_1^2 \left(1+2x+x^2\right)\mathrm{d}x \\ &= \pi\Big|_1^2 \left(x+x^2+\frac{1}{3}x^3\right) \\ &= \pi\left(\left(2+4+\frac{8}{3}\right)-\left(1+1+\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{19}{3}\pi.\end{aligned}$$

Vastaavasti syntyneen pyörähdyskappaleen vaipan ala B saadaan laskettua seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
B &= 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_1^2 |1+x|\sqrt{1+1}\mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_1^2 (1+x)\sqrt{2}\mathrm{d}x \\
&= 2\sqrt{2}\pi \Big|_1^2 (x+\frac{1}{2}x^2) \\
&= 2\sqrt{2}\pi \left(\frac{5}{2}\right) = 5\sqrt{2}\pi.
\end{aligned}
$$

Tässä itseisarvot voitiin poistaa, koska $1+x$ on positiivinen tutkitulla välillä $1 \leq x \leq 2$.

13 Epäoleelliset integraalit

Tähän mennessä lasketut integraalit ovat olleet "hyvin käyttäytyviä" eli muotoa

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

jossa a ja b ovat olleet reaalilukuja. Tällainen integraali on ollut yleensä kohtuullisen suoraviivaisesti laskettavissa: jos $f(x)$ on jatkuva funktio, niin yllä olevaa tyyppiä oleva integraali on aina olemassa eli voidaan kirjoittaa

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A,$$

eli integraali $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ on jokin reaaliluku A. Tässä oleellista siis on, että f on jatkuva funktio välillä $[a,b]$ ja että a ja b ovat reaalilukuja. Tällöin tämä integraali on olemassa eli f on **integroituva** välillä $[a,b]$.

Ennen kuin etenemme, on syytä ymmärtää intuitiivisesti miksi yllä olevaa tyyppiä oleva integraali on aina olemassa. Tämän voi perustella sillä, että integraali voidaan ymmärtää käyrän ja x-akselin välissä olevan alueen pinta-alana. Jos piirrät jatkuvan funktion f jollekin äärelliselle välille $[a,b]$, niin tämän funktion ja x-akselin välissä on aina pakolla äärellinen pinta-ala. Täten jatkuva funktio on integroituva äärellisellä välillä.

Nyt tutkimme tapausta, jossa f:n jatkuvuus tai a:n ja b:n äärellisyys eivät enää päde. Tyyppiesimerkki tälläisestä integraalista on

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x.$$

Tässä siis toisena integrointirajana on ääretön. Onko tämä integraali olemassa? Tämä riippuu intuitiivisesti siitä, onko käyrän $y = 1/x^2$ ja x-akselin välissä olevan alueen pinta-ala ääretön vai äärellinen välillä $x \in [1, \infty[$. Tätä ei voi kuitenkaan päättää ennen kuin tiedetään, miten tällainen integraali lasketaan. Määritellään siis **epäoleellinen integraali** seuraavanlaisena raja-arvona:

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)\mathrm{d}x.$$

Tässä määritelmässä siis halutaan laskea integraali äärettömyydessä. Tämä tapahtuu siten, että lasketaan aluksi integraali

$$\int_a^M f(x)\mathrm{d}x,$$

ja annetaan tämän jälkeen integroinnin ylärajan kasvaa rajatta eli otetaan raja-arvo

$$\lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)\mathrm{d}x.$$

Tämä on siis *määritelmän mukaan* sama asia kuin integraali äärettömyydessä eli

$$\lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)\mathrm{d}x = \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x.$$

Nyt voimme laskea epäoleellisen integraalin

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x.$$

Merkitään siis integroinnin ylärajaa kirjaimella M ja annetaan tämän ylärajan kasvaa rajatta:

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x &= \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{M\to\infty}\Big|_1^M \left(-\frac{1}{x}\right)\\ &= \lim_{M\to\infty}\left(-\frac{1}{M}-(-1)\right)\\ &= \lim_{M\to\infty}(1-\frac{1}{M}) = 1.\end{aligned}$$

Täten tämä integraali on siis olemassa ja täten käyrän $y = 1/x^2$ ja x-akselin välissä olevan alueen pinta-ala välillä $[1,\infty[$ on yksi.

Epäoleellinen integraali lasketaan täsmälleen samalla tekniikalla kuin yllä, jos integroitava on funktio joka on epäjatkuva integroimisvälillä. Esimerkki tälläisestä integraalista on

$$\int_0^1 \frac{1}{x}.$$

Nyt funktio $1/x$ on epäjatkuva nollassa, joten tämä integraali määritellään jälleen raja-arvona:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\int_a 1\frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

14 Integraalien suppeneminen

Yllä laskettiin esimerkkinä integraali

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = 1.$$

Tässä siis epäoleellinen integraali oli olemassa. Näin ei kuitenkaan aina käy. Tämä huomataan laskemalla esimerkiksi funktion $1/x$ integraali välillä $[1,\infty]$

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x}\mathrm{d}x &= \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{M\to\infty}\Big|_1^M \ln x\\ &= \lim_{M\to\infty}(\ln M - \ln 1)\\ &= \infty - 0,\end{aligned}$$

eli kyseinen integraali on ääretön. Toisin sanottuna siis funktion $1/x$ ja x-akselin välissä oleva pinta-ala on ääretön välillä $[1,\infty[$.

Jos integraali

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

on arvoltaan jokin reaaliluku, sanotaan että se **suppenee**. Jos tämä epäoleellinen integraali puolestaan ei ole reaaliluku (vaan esimerkiksi ääretön tai miinus ääretön), niin kyseinen integraali **hajaantuu**. Usein hajaantumisen tai suppenemisen voi päättää yksinkertaisesti laskemalla epäoleellisen integraalin, kuten alla olevassa esimerkissä.

Esimerkki 14.1. Tutki suppeneeko vai hajaantuuko

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

Ratkaisu. Integraali näyttää alkuun siltä, että siinä tarvitsisi käyttää osittaisintegrointia, mutta tämä itse asiassa sujuu helpommin, sillä integroitava lauseke xe^{-x^2} on itse asiassa "melkein" muotoa $f'(x)f(x)$, jossa $f(x) = e^{-x^2}$:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty xe^{-x^2}\mathrm{d}x &= \lim_{M\to\infty}\int_0^M xe^{-x^2}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{M\to\infty}\Big|_0^M\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\\ &= \lim_{M\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-M^2} - (-\frac{1}{2}e^0)\right)\\ &= 0-(-1/2) = 1/2.\end{aligned}$$

Usein integroitavaa funktiota ei kuitenkaan voi suoraan laskea. Tällainen on esimerkiksi integraali

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x,$$

jota ei voi suoraan laskea siitä yksinkertaisesta syystä, että tähän laskuun tarvittavaa määräämätöntä integraalia

$$\int e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

ei ole olemassa. Tämän ja monet muut ei-negatiivisten funktioiden integraalit voi kuitenkin osoittaa suppeneviksi **majoranttiperiaatteen** avulla. Tätä periaatetta käytetään, kun halutaan osoittaa että integraali[4]

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

on olemassa. Muistetaan aluksi, että integraali on pinta-ala. Haluamme siis osoittaa, että jokin pinta-ala on äärellinen. Oletetaan nyt, että löydetään jokin integraali $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ joka on suurempi kuin f:n integraali:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Jos tämä integraali $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ on nyt olemassa äärellisenä, niin integraali $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ on myös pakolla olemassa: pinta-ala $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ on äärellisenä olemassa, koska se on pienempi kuin pinta-ala $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$, joka on myös äärellisenä olemassa.
Oletetaan siis että seuraavat seikat pätevät:

1. $$0 \leq f(x)$$

2. $$f(x) \leq g(x) \text{ kun } x \in [a, b]$$

3. Integraali
   $$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$
   on äärellisenä olemassa.

[4] Tässä b voi olla myös ∞ ja a voi olla $-\infty$.

Tällöin pätee

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

ja integraali $\int_a^b f(x)$ suppenee majoranttiperiaatteen nojalla. Majoranttiperiaatteessa siis etsitään *suurempiarvoinen integraali, joka suppenee*.

Esimerkki 14.2. Osoita, että

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

suppenee.

Ratkaisu. Nyt $f(x) = e^{-x^2}$. Tämä funktio on aina positiivinen, joten siihen voi mahdollisesti soveltaa majoranttiperiaatetta. Halutaan löytää tätä suurempiarvoinen funktio $g(x)$, jonka integraali suppenee. Välillä $[1, \infty]$ pätee

$$e^{-x^2} = e^{-x}e^{-x} \leq e^{-x}.$$

Täten funktioksi g voidaan valita $g(x) = e^{-x}$. Tämän integraali on helppo laskea:

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty e^{-x}\mathrm{d}x &= \lim_{M\to\infty} \int_1^M e^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{M\to\infty} \Big|_1^M (-e^{-x}) \\
&= \lim_{M\to\infty} (-e^{-M} - (-e^{-1})) \\
&= e^{-1}.
\end{aligned}$$

Eli

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x \leq \int_1^\infty e^{-x}\mathrm{d}x = e^{-1},$$

joten esimerkin integraali suppenee majoranttiperiaatteen nojalla.

Nyt kun majoranttiperiaate on käsitelty, on helppo arvata mistä on kyse **minoranttiperiaatteessa**. Tässä tarkastellaan jälleen kahta funktiota f ja g, jotka ovat kumpikin ei-negatiivisia ja joille pätee

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

ja lisäksi oletetaan, että integraali $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ hajaantuu. Tällöin minoranttiperiaatteen nojalla myös integraali $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ hajaantuu[5]. Eli intuitiivisesti ajateltuna funktion f ja x-akselin välinen pinta-ala on ääretön, koska tämä ala on "suurempi" kuin funktion g ja x-akselin välinen pinta-ala, joka on ääretön.

Minoranttiperiaatetta käytetään seuraavasti:

1. Halutaan todistaa, että jokin integraali $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ hajaantuu.
2. Etsitään funktio g, joka on pienempi kuin f eli $g(x) \leq f(x)$ ja jonka integraali $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ hajaantuu.
3. Tällöin integraali $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ hajaantuu.

Esimerkki 14.3. Osoita minoranttiperiaatteen avulla, että integraali

$$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}-1}\mathrm{d}x$$

hajaantuu.

Ratkaisu. Nyt $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$. Pitäisi löytää tätä funktiota pienempi funktio g, jonka integraali hajaantuu välillä $[2, \infty]$. Helppo tapa löytää pienempi funktio on kasvattaa osoittajaa yhdellä:

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} > \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Eli nyt etsimämme funktio on $g(x) = 1/\sqrt{x}$. Tämän integraali voidaan laskea jälleen suoraviivaisesti:

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= \lim_{M\to\infty} \int_2^M \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{M\to\infty} \Big|_2^M 2\sqrt{x} \\ &= \lim_{M\to\infty} (2\sqrt{M} - 2\sqrt{2}) \\ &= \infty.\end{aligned}$$

[5]Tämä periaate seuraa itse asiassa suoraan majoranttiperiaatteesta: jos f suppenisi, niin silloin majoranttiperiaatetta voisi soveltaa ja myös g suppenisi.

Täten koska

$$\infty = \frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}-1},$$

niin integraali $\frac{1}{\sqrt{x}-1}$ hajaantuu.

15 Tiheysfunktiot

Kuten jo useaan kertaan on todettu, integraalilla voi laskea aloja ja tilavuuksia. Yksi määrätyn integraalin tärkeimpiä sovelluksia on lisäksi se, että sillä voi laskea tapahtumien todennäköisyyksiä. Tämän sovelluksen käyttäminen vaatii kuitenkin **tiheysfunktion** käsitettä.

Tiheysfunktio on matemaattisesti ajateltuna mikä tahansa ei-negatiivisia arvoja saava funktio, joka integroituu reaaliakselilla lukuun yksi eli jolle pätee

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 \text{ ja}$$
$$f(x) \geq 0.$$

Graafisesti tulkittuna tiheysfunktio on siis funktio, joka on jatkuvasti x-akselin yläpuolella (tai x-akselilla) ja jonka alla olevan alueen pinta-ala on yksi.

Tiheysfunktion idea on seuraava: jos satunnaismuuttujalla X on tiheysfunktio $f(x)$, niin tätä tiheysfunktiota integroimalla voi laskea todennäköisyyksiä. Jos merkitään $P(a \leq X \leq b)$ todennäköisyyttä, että satunnaismuuttuja X saa arvon välillä $[a, b]$, niin tämän todennäköisyyden voi laskea integroimalla satunnaismuuttujan tiheysfunktion $f(x)$ tällä välillä:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Alla olevissa esimerkeissä käytetään lisäksi seuraavaa "integrointisääntöä": jos funktio $f(x)$ on jollakin välillä $[i, j]$ nolla eli pätee $f(x) = 0,\ x \in [i, j]$, niin myös tämän funktion integraali välillä $[i, j]$ on nolla eli

$$\int_i^j f(x) = 0.$$

Tarkastellaan nyt funktiota $f(x)$, joka on määritelty paloittain:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, \text{ kun } x \in [a, b] \\ 0 \text{ muulloin.} \end{cases}$$

Eli funktio f saa positiivisen arvon e^x joukossa $[a, b]$ ja on nolla muualla. Kun tätä funktiota nyt integroi välillä $[-\infty, \infty]$, niin se alue jossa funktio on nolla voidaan sivuttaa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b e^x dx.$$

Eli koska funktion integraali on nolla sillä alueella jossa funktio on nolla, niin integroitaessa tämä nolla-alue voidaan poistaa eli integroinnit rajat voidaan muuttaa siten, että nolla-alue poistuu.

Tarkastellaan nyt esimerkkien avulla tiheysfunktioita ja niiden integrointia.

Esimerkki 15.1. Satunnaismuuttuja X on **tasajakautunut**, jos todennäköisyys että X saa arvon tietyssä joukossa riippuu ainoastaan tämän joukon koosta (eikä tämän joukon sijainnista x-akselilla). Jos X on esimerkiksi tasajakautunut välillä $[0, 2]$, sen tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{jos } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tämä on tiheysfunktio, koska se on aina ei-negatiivinen ja sen integraali reaaliakselilla on yksi:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^2 \frac{1}{2}\mathrm{d}x \\ &= \Big|_0^2 \frac{1}{2}x \\ &= 1. \end{aligned}$$

Nyt tätä tiheysfunktiota integroimalla voi siis laskea todennäköisyyksiä. Lasketaan todennäköisyys, että X saa arvon välillä $[0, 1/6]$:

$$\begin{aligned} P(0 \le X \le 1/6) &= \int_0^{1/6} \frac{1}{2}\mathrm{d}x \\ &= \Big|_0^{1/6} \frac{1}{2}x = 1/12. \end{aligned}$$

Esimerkki 15.2. Toinen esimerkki satunnaismuuttujan tiheysfunktiosta on

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{jos } x \ge 0 \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tämä on tiheysfunktio, koska se on aina ei-negatiivinen ja se integroituu yhteen:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{0}^{\infty} e^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{M\to\infty} \int_{0}^{M} e^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{M\to\infty} \Big|_{0}^{M} - e^{-x} \\
&= \lim_{M\to\infty} (-e^{-M} - (-e^{-0})) \\
&= -0 - (-1) = 1.
\end{aligned}$$

Tämä on erään **eksponenttijakauman** tiheysfunktio. Integroimalla tiheysfunktiota voidaan jälleen laskea välien todennäköisyyksiä:

$$\begin{aligned}
P(a \leq X \leq b) &= \int_{a}^{b} e^{-x}\mathrm{d}x \\
&= (-e^{-a} - (-e^{-b}) \\
&= e^{-b} - e^{-a},
\end{aligned}$$

jossa oletetaan, että $a > 0$.

Tarkastellaan nyt paloittain määriteltyä funktiota

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & \text{jos } 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tässä a on jokin vakio. Kysymys kuuluu: millä a:n arvolla tämä funktio on tiheysfunktio? Koska tiheysfunktiolta vaaditaan ensinnäkin ei-negatiiviisuus, niin on pakko olla, että $a \geq 0$, sillä muuten yllä oleva tiheysfunktio saisi negatiivia arvoja.

Toisaalta tiheysfunktiolta vaaditaan, että se integroituu yhteen reaaliakselilla eli

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Integroidaan nyt funktio $f(x) = ax^2$ ja katsotaan millä a:n arvolla se integroituu lukuun yksi:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} ax^2 dx \\ &= \int_{0}^{10} ax^2 dx \\ &= \Big|_0^{10} \frac{a}{3}x^3. \\ &= \frac{a}{3}1000.\end{aligned}$$

Nyt tämä funktio on siis tiheysfunktio, kun tämä integraali saa arvon yksi eli pätee

$$\frac{a}{3}1000 = 1,$$

eli $a = 3/1000$. Täten funktio

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{100}x^2, & \text{jos } 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

on tiheysfunktio.

16 Tasointegraalit

Ennen tasointegraaleihin siirtymistä käsitellään hieman integroinnin notaatiota. Tarkastellaan jälleen tavallista yksiulotteista integraalia

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Tässä siis integrointi tapahtuu välillä $x \in [a, b]$. Tätä väliä $[a, b]$ voidaan kuitenkin merkitä $[a, b] = A$, jolloin yllä oleva integraali voidaan merkitä vastaavasti:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_A f(x)\mathrm{d}x.$$

Integraali $\int_A f(x)\mathrm{d}x$ ilmaisee, että funktio $f(x)$ integroidaan joukossa A. Tässä tapauksessa koska $A = [a, b]$, niin tämä on sama asia kuin integraali $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Tälle uudelle lyhyemmälle notaatiolle tulee käyttöä, kun tarkastelemme **useamman muuttujan funktion** integroimista. Tarkastellaan kahden muuttujan funktiota

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \to f(x, y).$$

Tämän muuttujan lähtöjoukko on nyt **taso** eli $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sen maalijoukko on puolestaan reaaliluvut eli $\mathbb{R}$. Yksi esimerkki tällaisesta kahden muuttujan funktiosta on

$$f(x, y) = x + y,$$

jolle pätee siis esimerkiksi että $f(1, 2) = 3$. Nyt tällaista funktiota $f(x, y)$ voi integroida tasossa eli kahden muuttujan x ja y suhteen. Syntynyt integraali on nimeltään **tasointegraali**.

Seuraavaksi tasointegraali pitäisi määritellä. Palautetaan aluksi mieliin, että yhden muuttujan tapauksessa määrätty integraali $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ määriteltiin ala- ja yläsummien avulla. Esimerkiksi alasumma saatiin laskettua jakamalla ensin integrointiväli $[a, b]$ osiin ja laskemalla funktion f pienin arvo jokaisessa näistä osissa. Esimerkissämme väli $[a, b]$ jaettiin kolmen osaan, joiden jokaisen pituus oli $1/3$. Laskimme seuraavaksi funktion f pienimmän arvon jokaisessa näistä osissa: merkitsimme näitä m_1, m_2 ja m_3. Alasumma saatiin tämän jälkeen summana

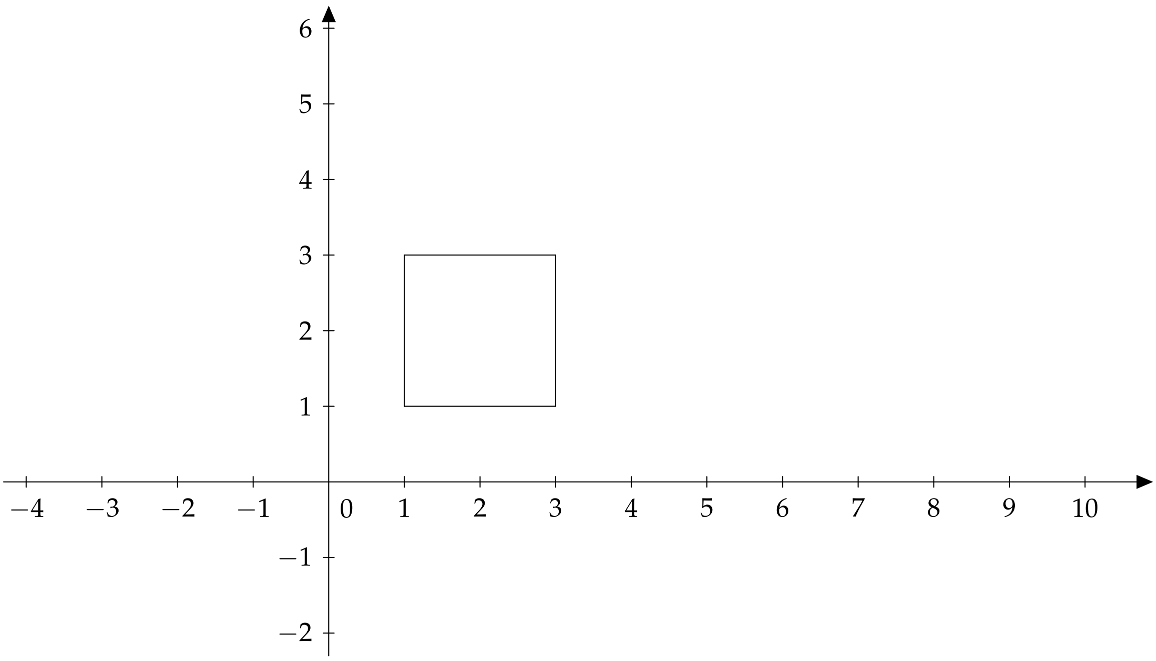
$$\frac{1}{3}m_1 + \frac{1}{3}m_2 + \frac{1}{3}m_3,$$

jossa siis jokaisen välin pituus kerrottiin funktion pienemmällä arvolla kyseisellä välillä.

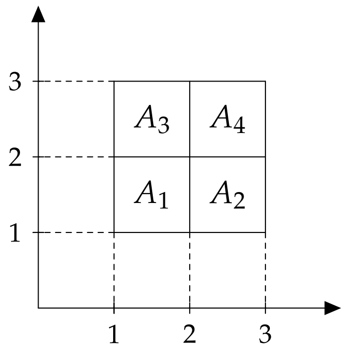
Kuten yhden muuttujan tapauksessa, määrätty integraali tasossa määritellään ylä- ja alasummien avulla. Nyt emme kuitenkaan voi enää pelkästään osittaa väliä, koska tasointegraali on nimensä mukaisesti määritelty tasossa eikä välillä. Valitaan integroitavaksi funktioksi $f(x, y) = x + y$. Tutkitaan kuitenkin helppoa esimerkkiä, jossa integrointi tapahtuu joukossa

$$[1, 3] \times [1, 3],$$

eli joukossa jossa $x \in [1, 3]$ ja $y \in [1, 3]$. Tämä joukko on sikäli helppo, että se määritellään kahden välin karteesisena tulona. Kyseinen joukko on siis yksinkertainen suorakulmio, joka näyttää kuvana seuraavalta:



Tasointegraalin ylä- ja alasummia laskettaessa tämä suorakulmio jaetaan osiin. Muodostetaan alla olevassa kuvassa näkyvä mahdollisimman yksinkertainen jako eli jaetaan väli $[1,3]$ kahtia keskeltä:



Tästä näkyy, että suorakulmio $[1,3] \times [1,3]$ jaettiin nyt neljään osaan: osiin A_1, A_2, A_3 ja A_4. **Alasumma** määritellään valitsemalla funktion f pienin arvo jokaisessa näistä osista ja kertomalla se näiden osien pinta-alalla.

Olkoon siis $m(A_i)$ funktion f pienin arvo joukossa A_i, jossa luonnollisesti i on $1,2,3$ tai 4. Koska jokaisen näiden joukon pinta-ala on 1, niin alasumma on tässä tapauksessa

$$m(A_1) + m(A_2) + m(A_3) + m(A_4).$$

Nyt integroitavana on funktio $f(x,y) = x+y$. Kuvaa katsomalla huomataan, että tämän pienin arvo joukossa A_1 on yhtä kuin $1+1=2$. Vastaavasti tämän funktion pienin arvo joukossa A_2 on $2+1=3$, joukossa A_3 tämä pienin arvo on samoin $2+1=3$ ja joukossa A_4 tämä pienin arvo on $2+2=4$. Täten alasumma saa arvon

$$\begin{aligned} m(A_1)+m(A_2)+m(A_3)+m(A_4) &= 2+2+3+4 \\ &= 11. \end{aligned}$$

Vastaavasti **yläsumma** saadaan valitsemalla jokaisesta joukosta A_i funktion suurin arvo tässä joukossa. Merkitään tätä suurinta arvoa joukossa $M(A_i)$, jolloin yläsumma saadaan jälleen helposti katsomalla yllä olevaa kuvaa:

$$\begin{aligned} M(A_1)+M(A_2)+M(A_3)+M(A_4) &= 4+5+5+6 \\ &= 20. \end{aligned}$$

Näin karkealla osituksella ylä- ja alasummat siis eroavat toisistaan melko paljon. Nämä summat antavat siis ylä- ja alarajan tasointegraalille, jota merkitään kahdella integroimismerkillä

$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_A (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

jossa joukko A on suorakulmio $[1,3]\times[1,3]$.

Esimerkki 16.1. Lasketaan vielä ylä- ja alasummien antamat arviot tasointegraalille

$$\iint_A (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

jossa $A=[0,1]\times[0,2]$. Tehdään nyt jako, jossa x-arvojen väli $[0,1]$ jaetaan väleihin $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ ja $\left[\frac{1}{2},1\right]$ ja y-arvojen väli $[0,2]$ jaetaan neljään väliin: $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2},1\right]$, $\left[1,\frac{1}{2}\right]$ ja $\left[\frac{1}{2},2\right]$. Nyt tällä jaolla suorakulmio $A=[0,1]\times[0,2]$ saadaan jaettua kahdeksaan osaan (piirrä kuva, tästä ei ota muuten selvää):

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left[0,\frac{1}{2}\right]\times\left[0,\frac{1}{2}\right] & A_5 &= \left[0,\frac{1}{2}\right]\times\left[1,\frac{3}{2}\right] \\
A_2 &= \left[\frac{1}{2},1\right]\times\left[0,\frac{1}{2}\right] & A_6 &= \left[\frac{1}{2},1\right]\times\left[1,\frac{3}{2}\right] \\
A_3 &= \left[0,\frac{1}{2}\right]\times\left[\frac{1}{2},1\right] & A_7 &= \left[0,\frac{1}{2}\right]\times\left[\frac{3}{2},2\right] \\
A_4 &= \left[\frac{1}{2},1\right]\times\left[\frac{1}{2},1\right] & A_8 &= \left[\frac{1}{2},1\right]\times\left[\frac{3}{2},2\right]
\end{aligned}$$

Näiden jokaisen osan ala on $1/4$. Koska integroitava funktio on $f(x,y) = x - y$, niin kyseisen funktion pienin arvo jokaisessa näistä joukosta löytyy valitsemalla mahdollisimman pieni x-arvo ja mahdollisimman suuri y-arvo. Täten alasummaksi saadaan

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left(m(A_1)+m(A_2)+m(A_3)+m(A_4)+m(A_5)+m(A_6)+m(A_7)+m(A_8)\right)\\
=&\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}+0-1-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}-1-2-\frac{3}{2}\right)\\
=&-\frac{9}{4}.
\end{aligned}
$$

Vastaavasti yläsumma saadaan järkeiltyä siten, että valitaan osituksen jokaisessa joukossa mahdollisimman suuri x-arvo ja mahdollisimman pieni y-arvo. Täten tämä yläsumma on

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left(M(A_1)+M(A_2)+M(A_3)+M(A_4)+M(A_5)+M(A_6)+MA_7)+M(A_8)\right)\\
=&\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+1+0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+0-1-\frac{1}{2}\right)\\
=&0.
\end{aligned}
$$

Jälleen siis ylä- ja alaintegraali tuottavat huomattavan erilaisia tuloksia. Todellisuudessa kyseinen integraali on -1.

17 Tasointegraalin laskeminen

Aiemmin tutkimme ylä- ja alasummien antamia arvioita tasointegraalille

$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Tässä siis funktio $f(x,y)$ integroidaan muuttujien x ja y suhteen jossain tason $\mathbb{R}^2$ osajoukossa A. Aikaisemmissa esimerkeissä tämä integrointijoukko on ollut suorakulmio eli

$$A = [a,b] \times [c,d].$$

Ala- ja yläsummien laskemisessa ideana oli osittaa tämä suorakulmio A osiin ja laskea tämän avulla arvio tälle tasointegraalille. Kun tätä ositusta hienonnetaan, niin tämä arvio paranee ja on lähempänä integraalin todellista arvoa. Jos tasointegraali $\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ on olemassa, niin se voidaan määritellä näiden ylä- ja alasummien raja-arvona.

Tasointegraalin $\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ geometrinen intuitio on, että se antaa funktion $f(x,y)$ ja xy-tason välissä olevan alueen tilavuuden, kun x ja y rajoitetaan joukkoon A.

Esimerkki 17.1. Jos integroinnin alue A on suorakulmio $[0,1]\times[0,2]$ ja integroitavana on vakiofunktio $f(x,y)=10$, niin integraali $\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ antaa funktion $f(x,y)$ ja xy-tason suorakulmion $[0,1]\times[0,2]$ välissä olevan alueen tilavuuden, joka selvästi on $10\cdot 2=20$.

Toinen intuitiivinen tulkinta tasointegraalille on, että se antaa funktion f keskiarvon joukossa A kerrottuna tämän joukon pinta-alalla. Eli

$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (\text{Funktion } f \text{ keskiarvo joukossa } A)\cdot(\text{joukon } A \text{ pinta-ala}).$$

Tästä seuraa suoraan, että funktion f keskiarvo joukossa A saadaan jakamalla integraali $\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ joukon A alalla:

$$\text{Funktion } f \text{ keskiarvo joukossa } A = \frac{\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\text{Joukon } A \text{ pinta-ala}}$$

Esimerkiksi yllä olevassa esimerkissä joukon $A=[0,1]\times[0,2]$ pinta-ala oli 2, joten funktion keskiarvo tässä joukossa oli $20/2=10$.

Nyt kun tasointegraalille on esitetty intuitiivinen tulkinta, käsittelemme kuinka tämä tasointegraali käytännössä lasketaan. Tämä on yllättävän helppoa, kun integrointialue A on suorakulmio $[a,b]\times[c,d]$. Tällöin funktion $f(x,y)$ integrointi joukossa A voidaan laskea integroimalla tämä funktion ensin x:n suhteen ja integroimalla tämän jälkeen syntynyt lauseke y:n suhteen. Merkitään integraalia seuraavasti:

$$\iint_A xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Nyt tämä integrointi sujuu laskemalla aluksi "sisäintegraali", jota merkitään alla sulkujen sisässä olevana lausekkeena:

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

Eli lasketaan aluksi sisäintegraali $\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$. Tämän jälkeen integroidaan syntynyt lauseke y:n suhteen, kuten alla oleva esimerkki valaisee:

Esimerkki 17.2. Laske tasointegraali $\iint_A xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kun A on suorakulmio $[0,2] \times [5,6]$.

Ratkaisu. Nyt tehtävän suorakulmiolla on rajat $0 \leq x \leq 2$ ja $5 \leq y \leq 6$. Täten tämä tasointegraali voidaan kirjoittaa muodossa

$$\iint_A xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_5^6 \int_0^2 xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Tämä on helppo laskea: integroidaan ensin x:n suhteen ja tämän jälkeen integroidaan syntynyt lauseke y:n suhteen:

$$\begin{aligned}
\int_5^6 \int_0^2 xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_5^6 \left(\int_0^2 xydx \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_5^6 \left(\Big|_0^2 \frac{x^2}{2} y \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_5^6 (2y)\, \mathrm{d}y \\
&= \Big|_5^6 y^2 \\
&= 6^2 - 5^2 \\
&= 36 - 25 = 11.
\end{aligned}$$

Voit integroida tämän tasointegraalin myös toisessa järjestyksessä eli laskea integraalin

$$\int_0^2 \left(\int_5^6 xy\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Tästä saatava tulos on sama.

Kun integrointialue on suorakulmio, lasketaan tasointegraali integroimalla funktio $f(x,y)$ ensin joko x:n tai y:n suhteen ja tämän jälkeen jäljellä olevan muuttujan suhteen.

Esimerkki 17.3. Laske tasointegraali $\iint_A y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ integroimalla ensiksi y:n suhteen, kun A on suorakulmio $[0,1] \times [3,4]$.

Nyt tätä tasointegraalia voidaan jälleen merkitä seuraavasti:

$$\iint_A y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_3^4 \int_0^1 y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Integroinnin järjestystä voi nyt vaihtaa vapaasti:

$$\begin{aligned}
\int_3^4 \left(\int_0^1 y^3 \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_3^4 y^3 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\Big|_3^4 \frac{y^4}{4} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{4^4}{4} - \frac{3^4}{4} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(54 - \frac{27}{4} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{189}{4} \right) \mathrm{d}x \\
&= \Big|_0^1 \frac{189}{4} x \\
&= \frac{189}{4}.
\end{aligned}$$

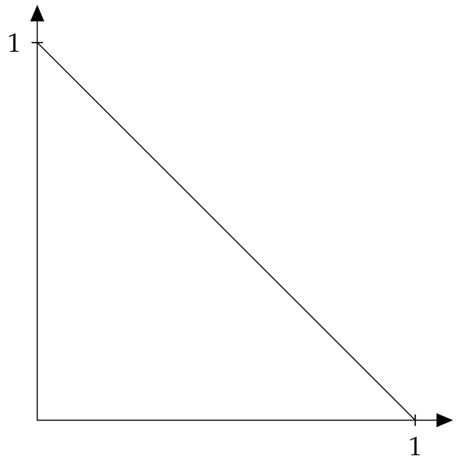
Yllä olevissa esimerkeissä integrointi sujui yhtä helposti kummassakin järjestyksessä: integrointi ensin x:n suhteen ja sen jälkeen y:n suhteen oli yhtä helppoa kuin integrointi ensin y:n suhteen ja tämän jälkeen x:n suhteen. Käytännössä näin ei kuitenkaan aina ole, joten jos integrointi ei tunnu sujuvan tietyssä järjestyksessä, kannattaa yrittää vaihtaa integrointijärjestystä.

Yllä olevista esimerkeistä nähtiin, että tasointegraalin laskeminen on yleensä helppoa, jos integrointialue A on suorakulmio. Ikävä kyllä integrointi muuttuu huomattavasti vaikeammaksi heti, kun tämä integrointialue ei enää ole yksinkertainen suorakulmio. Alla kappaleessa 18 käsittelemme tapausta, jossa integrointi yli monimutkaisempien alueiden onnistuu valitsemalla sopiva integrointijärjestys. Kappaleessa 19 taas käsitellään tapaus, jossa integrointi onnistuu muuttujanvaihdoksella.

18 Tasointegraalin laskeminen monimutkaisemmassa joukossa

Tasointegraalin $\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ laskeminen suorakulmiossa $A = [a,b] \times [c,d]$ ei ole sen vaikeampaa kuin yhden muuttujan funktion integroiminen. Tässä tapauksessa tämä yhden muuttujan integrointi pitää vain suorittaa kaksi kertaa peräkkäin: ensin x:n ja sen jälkeen y:n suhteen tai toisin päin. Jatkossa käsitellään vaikeampaa tapausta, jossa A ei ole suorakulmio.

Käsitellään aluksi esimerkkitapaus, jossa integrointi tapahtuu kolmiossa, jonka kärkipisteinä ovat $(0,0),(0,1)$ ja $(1,0)$. Tämä integrointialue näyttää nyt seuraavalta:



Huomataan aluksi, että kolmion kärjet $(0,1)$ ja $(1,0)$ yhdistää viiva, joka on osa suoraa $y = 1 - x$. Tämän jälkeen huomataan, että tämä kolmio voidaan esittää alueena, jossa x on välillä $[0,1]$ ja y on välillä $0 \leq y \leq 1 - x$. Tämä huomio mahdollistaa integroinnin tässä kolmiossa.

Esimerkki 18.1. Integroidaan tässä kolmiossa funktio $f(x,y) = xy$. Kuten yllä mainittiin, tämä kolmio voidaan esittää alueena, jossa $0 \leq x \leq 1$ ja $0 \leq y \leq 1 - x$. Täten haluttu integraali saadaan laskemalla seuraava integraali:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} xy \mathrm{d}y \mathrm{d}x.$$

Huomaa, että tässä sisäintegraalina on y:n suhteen integroitava lauseke $\int_0^{1-x} xy \mathrm{d}y$. Tämä johtuu siitä, että y:n rajat ovat ”monimutkaiset” eli sisältävät x:n termejä. Nyt tämän integrointi sujuu suoraviivaisesti:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{1-x} xy \mathrm{d}y \mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} xy \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\Big|_0^{1-x} x\frac{y^2}{2} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x\frac{(1-x^2)}{2} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^3) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \Big|_0^1 (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}) \\
&= \frac{1}{2} (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) \\
&= \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

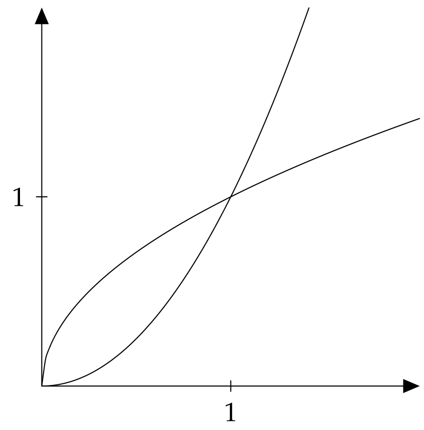
Yllä olevassa esimerkissä siis integrointialue esitettiin muodossa, jossa x oli kahden vakion välissä eli $a \le x \le b$ samalla kun y oli kahden x:ää sisältävän lausekkeen välissä eli $g_1(x) \le y \le g_2(x)$. Yllä olevassa esimerkissä siis $g_1(x) = 0$ ja $g_2(x) = 1 - x$. Usein siis integrointialue voidaan esittää nimenomaan tällaisessa muodossa eli alueena

$$\begin{gathered}
a \le x \le b \\
g_1(x) \le y \le g_2(x).
\end{gathered}$$

Tällaisen alueen yli integrointi suoritetaan laskemalla integraali

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x.$$

Esimerkki 18.2. Tutkitaan nyt alla olevassa kuvassa näkyvää integrointialuetta, jossa x on välillä $[0,1]$ ja y on välillä $x^2 \le y \le \sqrt{x}$:



Integroidaan tällä alueella funktio $f(xy) = xy$. Tämän integrointi sujuu yllä esitellyllä tavalla:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} (xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{1}{2}(xy^2)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{x}{2}(x - x^4)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 - x^5)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\Big|_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^6\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) \\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Näissä kahdessa esimerkissä siis x oli yksinkertaisella välillä $[a, b]$ ja y oli x:n funktioiden välillä. Palataan nyt kolmioon, jossa $0 \le x \le 1$ ja $0 \le y \le 1 - x$. Huomataan, että täsmälleen saman kolmion voi esittää myös alueena $0 \le y \le 1$ ja $0 \le x \le 1 - y$. Eli tässä y on tietyllä yksinkertaisella välillä $[a, b]$ ja x on kahden y:n funktion välissä eli $g_1(y) \le x \le g_2(y)$. Nyt tällä välillä voi integroida esimerkiksi funktion $f(x, y) = x$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{1-y} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \Big|_0^{1-y} \frac{1}{2}x^2 \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-y)^2 \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-2y+y^2)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\Big|_0^1 (y - y^2 + \frac{1}{3}y^3) \\
&= \frac{1}{2}(1 - 1^2 + \frac{1}{3}1^3) \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Monet alueet voi siis esittää kahdessa muodossa: joko muodossa jossa x on välillä $[a, b]$ ja y välillä $[g_1(x), g_2(x)]$ tai muodossa y on välillä $[c, d]$ ja y välillä $[g_3(x), g_4(x)]$. Näiden alueiden muodostaminen on usein vaikeaa ellei niitä piirrä paperille.

Jos tehtävän integroimisalue voidaan esittää kahdessa eri muodossa (kuten yllä), niin usein integrointi on helpompaa toisella näistä alueista. Täten jos integrointi ei onnistu tietyllä alueella helposti, kannattaa miettiä josko tämän alueen voisi esittää eri muodossa.

19 Muuttujien vaihto: siirtyminen napakoordinaatteihin

Yhden muuttujan funktioiden tapauksessa integraalit ratkesivat usein muuttujanvaihdolla, jossa integraaliin $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ tehtiin korvaus $x = g(t)$. Tämän jälkeen korvattiin vielä termi $\mathrm{d}x$ termillä $g'(t)\mathrm{d}t$ ja laskettiin integraali

$$\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t,$$

jossa integroinnit rajat on myös muutettu, kuten aina muuttujaa vaihdettaessa on muistettava tehdä.

Yhden muuttujan tapauksessa muuttujan vaihdossa ideana on siis laittaa x:n paikalle t:tä sisältävä lauseke $g(t)$, jonka avulla integraali on usein helppo laskea. Yhden muuttujan muuttujanvaihdos sisältää siis kolme elementtiä:

1. Jokainen integroitavan lausekkeen termi x korvataan termillä $g(t)$ eli jollakin t:n lausekkeella.

2. Termi $\mathrm{d}x$ korvataan termillä $g'(t)\mathrm{d}t$.

3. Integroinnin rajat ovat alun perin $x = a$ ja $x = b$. Nyt kun tehdään sijoitus $x = g(t)$, niin myös nämä rajat muuttuvat. Kun alkuperäinen raja on $x = a$, niin sijoituksesta $x = g(t)$ saadaan $g(t) = a \iff t = g^{-1}(a)$. Samoin rajasta $x = b$ saadaan raja $t = g^{-1}(b)$. Täten integraali saadaan muotoon

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t.$$

Tasointegraalin muuttujanvaihdoksessa on myös mukana nämä kolme elementtiä. Tarkastellaan nyt tasointegraalia

$$\iint_A (xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Ensimmäinen muuttujanvaihdoksen elementti on **sijoitus**. Tässä siis x ja y korvataan joillakin muilla termeillä. Nyt x korvataan termillä jota merkitään $x(u,v)$ eli x korvataan kahden muuttujan funktiolla $x(u,v)$. Samoin y korvataan kahden muuttujan funktiolla $y(u,v)$. Otetaan esimerkiksi muunnos, jossa $x(u,v) = u + v$ ja $y(u,v) = u - v$ Tällöin integroitava lauseke xy saadaan muotoon $(u+v)(u-v) = u^2 - v^2$.

Toinen muuttujanvaihdoksen elementti on, että termi $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ korvataan jollakin toisella termillä. Tämä termi on monimutkaisempi kuin yhden muuttujan tapauksessa, koska sijoitetut funktiot ovat nyt kahden muuttujan funktioita. Tarkastellaan yleistä sijoitusta

$$\begin{aligned} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v). \end{aligned}$$

Nyt termi $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ korvataan termillä $|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$. Tässä termi J on **Jakobin determinantti**, joka on yhtä kuin

$$J = \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} - \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial y(u,v)}{\partial u}.$$

Jos esimerkiksi

$$x(u,v) = u + v$$
$$y(u,v) = u - v,$$

niin $\frac{\partial x(u,v)}{\partial u} = 1$, $\frac{\partial x(u,v)}{\partial v} = 1$, $\frac{\partial y(u,v)}{\partial u} = 1$ ja $\frac{\partial y(u,v)}{\partial v} = -1$. Tällöin Jakobin determinantti on $1 \cdot (-1) - 1 \cdot (1) = -2$. Täten tämän muuttujanvaihdoksen tapauksessa termi $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ korvataan termillä $|-2|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ eli termillä $2\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

Esimerkki 19.1. Tarkastellaan edelleen muuttujanvaihdosta $x(u,v) = u + v$, $y(u,v) = u - v$. Lasketaan integraali

$$\iint_A (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

tällä muuttujanvaihdoksella. Olkoon integrointialue suorakulmio $A = [-1,1] \times [0,2]$. Ensin pitää katsoa miten tämä alue muuntuu tässä muuttujanvaihdoksessa. Ratkaistaan ensin yhtälöt $x = u + v$ ja $y = u - v$ muuttujien u ja v suhteen. Tästä saadaan ratkaistua

$$u = \frac{x+y}{2}$$
$$v = \frac{x-y}{2}.$$

Täten, kun x on välillä $-1 \leq x \leq 1$ ja y on välillä $0 \leq y \leq 2$, niin yllä olevista yhtälöistä nähdään, että u on välillä $(-1/2, 3/2)$ ja v on välillä $[-3/2, 1/2]$.

Lisäksi pitää muistaa sijoittaa termin $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ paikalle termi $|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 2\mathrm{d}u\mathrm{d}v$:

$$\begin{aligned}
\iint_A (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-3/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{3/2} ((u+v)+(u-v))2\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_{-3/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{3/2} (2u)2\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_{-3/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{3/2} (4u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_{-3/2}^{1/2}\Big|_{-1/2}^{3/2} (2u^2)\mathrm{d}v \\
&= \int_{-3/2}^{1/2} (9/2-1/2)\mathrm{d}v \\
&= \int_{-3/2}^{1/2} (4)\mathrm{d}v \\
&= \Big|_{-3/2}^{1/2} (4v)\mathrm{d}v \\
&= 2-(-3) \\
&= 5.
\end{aligned}$$

Tässä siis tehtiin kohtalaisen yksinkertainen muuttujanvaihto: siinä siirryttiin muuttujista x ja y muuttujiin u ja v. Usein tehdään kuitenkin kunnianhimoisempia muuttujanvaihtoja. Tasointegraalin tapauksessa tyypillisin lienee siirtyminen napakoordinaatteihin. Tässä ideana on vaihtaa muuttujat x ja y muuttujiin r ja θ tekemällä muuttujanvaihto

$$\begin{aligned}
x(r,\theta) &= r\cos\theta \\
y(r,\theta) &= r\sin\theta.
\end{aligned}$$

Tämä muuttujanvaihto voi vaikuttaa nopeasti katsottuna hieman eksoottiselta, mutta tässä on ideana se että kun summataan näiden neliöt eli x^2+y^2, niin saadaan

$$\begin{aligned}
(x(r,\theta))^2 + (y(r,\theta))^2 &= r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta \\
&= r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta) \\
&= r^2
\end{aligned}$$

koska $\cos^2\theta+\sin^2\theta = 1$. Täten jos integroitavassa lausekkeessa on termi x^2+y^2, niin napakoordinaattimuunnoksella

$$\begin{aligned}
x(r,\theta) &= r\cos\theta \\
y(r,\theta) &= r\sin\theta
\end{aligned}$$

tämä termi $x^2 + y^2$ voidaan korvata termillä r^2. Tämä mahdollistaa monien integraalien laskemisen.

Napakoordinaattimuunnoksessa termi $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ pitää luonnollisesti korvata termillä $|J|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$. Lasketaan siis nyt Jakobin determinantti:

$$\begin{aligned}
J &= \frac{\partial x(r,\theta)}{\partial r} \cdot \frac{\partial y(r,\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial x(r,\theta)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial y(r,\theta)}{\partial r} \\
&= \cos\theta(r\cos\theta) - (-r\sin\theta)(\sin\theta) \\
&= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta \\
&= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\
&= r.
\end{aligned}$$

Täten Jakobin determinantti on napakoordinaattimuunnoksen tapauksessa r.

Esimerkki 19.2. Integroi

$$\iint_A \sqrt{x^2 + y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kun A on yksikköympyrä eli $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Ratkaisu. Siirrytään napakoordinaatteihin, mikä tässä tapauksessa onnistuu sijoituksella $x^2 + y^2 = r^2$. Tällöin integroitava lauseke $\sqrt{x^2 + y^2}$ saadaan muotoon $\sqrt{r^2} = r$.

Nyt integroinnin rajat pitää myös muuttaa. Koska alueena on $x^2 + y^2 \leq 1$, niin $r^2 \leq 1$. Täten laitetaan r väille $[0,1]$. Vastaavasti napakoordinaattimuunnoksessa θ tulkitaan kulmana. Koska integrointialueena on koko yksikköympyrä, annetaan tämän kulman θ kulkea koko matkansa eli

$0 \leq \theta \leq 2\pi$. Täten integrointi suoritetaan seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \Big|_0^1 \frac{1}{3}r^3\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\mathrm{d}\theta \\
&= \Big|_0^{2\pi} \frac{1}{3}\theta \\
&= \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Esimerkki 19.3. Olkoon A joukko $\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$ eli yksikköympyrä. Lasketaan nyt integraali

$$\iint_A e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Tätä on vaikeaa integroida ilman muuttujanvaihtoa. Koska integroitava lauseke sisältää termin x^2+y^2, on napakoordinaattimuunnos luonnollinen tapa edetä. Eli tehdään korvaus

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,$$

jolloin termi x^2+y^2 voidaan korvata termillä r^2. Jakobin determinantti J laskettiinkin jo yllä: se on r. Lopuksi muunnetaan vielä integrointirajat: kun $x^2+y^2 \leq 1$ niin luonnollisesti $r^2 \leq 1$. Täten saadaan raja $0 \leq r \leq 1$.

Vastaavasti $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Täten integrointi sujuu seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\iint_A e^{x^2+y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{r^2} |J| \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 e^{r^2} r \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\Big|_0^1 \frac{1}{2} e^{r^2} \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (e-1) \, \mathrm{d}\theta \\
&= \Big|_0^{2\pi} \frac{1}{2} (e-1) \, \theta \\
&= \frac{1}{2} (e-1) \, 2\pi \\
&= \pi \, (e-1)
\end{aligned}$$

Näissä esimerkeissä integrointialue oli siis koko yksikköympyrä. Käsitellään seuraavaksi tapaus, jossa integroitavana on kahden ympyrän välissä oleva alue.

Esimerkki 19.4. Integroi

$$\iint_A \sqrt{x^2+y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kun A on alue $A = \{(x,y) : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$.

Ratkaisu. Nyt integrointialue on $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$ eli $1 \leq r^2 \leq 4$ eli

$1 \leq r \leq 2$. Lisäksi kulman θ annetaan jälleen olla välillä $[0, 2\pi]$:

$$
\begin{aligned}
\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 \sqrt{r^2} r \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^2 (r) r \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \Big|_1^2 \frac{1}{3}r^3 \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (\frac{8}{3}-\frac{1}{3})\mathrm{d}\theta \\
&= \Big|_0^{2\pi} (\frac{7}{3})\theta \\
&= \frac{14\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

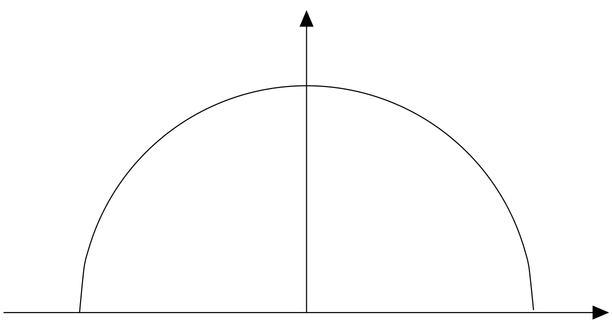
Toinen tapa, jolla integroinnin rajat voivat erota aiemmasta, on että meillä ei ole integrointialueena enää täysi ympyrä, vaan ainoastaan tietty ympyrän osa. Tällöin kulma θ ei enää mene täyttä kierrosta $[0, 2\pi]$, vaan ainoastaan osan tästä.

Esimerkki 19.5. Integroi

$$\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kun A on nyt alue $A = \{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\}$.

Ratkaisu. Nyt integrointialueella pätee $0 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ eli $0 \leq r \leq 3$. Nyt on kuitenkin voimassa lisärajoitus $y \geq 0$. Tällöin integrointialueena on puoliympyrä eli kuvassa näkyvä alue:



Tällöin kulma θ kulkee puoliympyrän verran, jolloin $0 \leq \theta \leq \pi$. Lasketaan nyt tämä integraali näillä rajoilla:

$$\begin{aligned}
\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^\pi \int_0^3 (r) r \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^\pi \int_0^3 r^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^\pi |_0^3 \frac{1}{3} r^3 \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^\pi (9) \mathrm{d}\theta \\
&= \Big|_0^\pi 9\theta \\
&= 9\pi.
\end{aligned}$$

20 Avaruusintegraali

Aiemmin laskimme yksiulotteisia integraaleja $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, jossa integrointialue on x-akselin väli $[a, b]$. Lisäksi laskimme kaksiulotteisia integraaleja $\iint_A g(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, jossa integrointialue A puolestaan löytyi tasosta eli $A \in \mathbb{R}^2$.

Nyt siirrymme kolmanteen ulottuvuuteen ja laskemme integraaleja, joissa integrointialue A on kolmiulotteisessa avaruudessa eli $\mathbb{R}^3$:ssa. Tällaista **avaruusintegraalia** merkitään

$$\iiint_A f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y dz.$$

Tässä siis kolmen muuttujan funktio $f(x, y, z)$ integroidaan kaikkien kolmen muuttujansa x:n, y:n ja z:n suhteen.

Integrointialueen A muoto ratkaisee jälleen, kuinka helppoa integrointi käytännössä on. Helppoa tämä integrointi on silloin, jos A on suorakulmainen särmiö eli

$$A = [a, b] \times [c, d] \times [p, q].$$

Eli toisin sanottuna A on tässä joukko, jossa $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$ ja $z \in [p, q]$ eli kaikki muuttujat rajoitetaan vakioväleille. Tällöin integrointi sujuu suoraviivaisesti integroimalla funktio jokaisen muuttujansa suhteen vuoron perään:

$$\boxed{\iiint_A f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.}$$

Esimerkki 20.1. Integroidaan funktio $f(x,y,z) = xyz$ joukossa $A = [1,2] \times [3,4] \times [0,2]$. Tässä siis integroinnin rajat ovat nyt $x \in [1,2]$, $y \in [3,4]$ ja $z \in [0,2]$. Käytetään integrointiin yllä olevaa kaavaa:

$$\begin{aligned}\iiint_A f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_0^2 \int_3^4 \int_1^2 (xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Nyt tämän integraalin voi laskea missä järjestyksessä haluaa. Integroidaan tämä alla ensin x, sitten y:n ja lopulta z:n suhteen:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_3^4 \int_1^2 (xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^2 \int_3^4 \Big|_1^2 \frac{1}{2}(x^2yz)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 \int_3^4 yz\Big|_1^2 (x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 \int_3^4 yz(3)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 \Big|_3^4 \frac{3}{2}(y^2z)\mathrm{d}z \\ &= \frac{3}{4}\int_0^2 z\Big|_3^4 y^2\mathrm{d}z \\ &= \frac{3}{4}\int_0^2 z(7)\mathrm{d}z \\ &= \frac{3}{4}\Big|_0^2 \frac{7}{2}z^2 \\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{7}{2}\cdot 4\right) \\ &= \frac{21}{2}.\end{aligned}$$

Tämä lasku siis on kohtalaisen pitkä, mutta suoraviivainen.

Esimerkki 20.2. Edellisessä esimerkissä integraali laskettiin integroimalla ensin x:n, sitten y:n ja lopuksi z:n suhteen. Tämän integroinnin voi suorittaa tällaisen suorakulmaisen särmiön tapauksessa myös muussa järjestyksessä. Tulos on sama. Lasketaan tämä integraali alla integroimalla ensin y:n, sitten z:n ja lopuksi x:n suhteen:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_3^4 \int_1^2 (xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^2 \int_1^2 \int_3^4 (xyz)dy\mathrm{d}zdx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_1^2 \Big|_3^4 (xy^2z)\mathrm{d}zdx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_1^2 xz\Big|_3^4 (y^2)\mathrm{d}zdx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_1^2 xz(7)\mathrm{d}zdx \\
&= \frac{7}{4} \int_0^2 \Big|_1^2 xz^2 dx \\
&= \frac{7}{4} \int_0^2 3xdx \\
&= \frac{21}{8}\Big|_0^2 x^2 dx \\
&= \frac{21}{2}.
\end{aligned}$$

Tulos on siis sama. Huomaa, että termien dx, dy ja dz järjestys kertoo integrointijärjestyksen. Täten esimerkiksi dzdxdy tarkoittaa, että integrointi suoritetaan ensin z:n, sitten x:n ja lopuksi y:n suhteen.

21 Avaruusintegraali yli monimutkaisempien alueiden

Yllä todettiin, että avaruusintegraalien laskeminen suorakulmaisissa särmiöissä on kohtalaisen suoraviivaista. Integrointialueena on kuitenkin usein jokin avaruuden $\mathbb{R}^3$ monimutkaisempi osajoukko. Integrointirajojen muodostaminen on tällöin usein vaikeaa.

Tarkastellaan nyt integrointia yleisessä avaruuden joukossa $A \subset R^3$. Haluamme siis laskea integraalin

$$\iiint_A f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Tämän laskeminen onnistuu samalla tekniikalla kuin aikaisemmin esimerkiksi silloin, kun pystymme esittämään alueen A seuraavanlaisena joukkona:

$$\begin{gathered} a \leq x \leq b, \\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), \\ v_1(x,y) \leq z \leq b \leq v_2(x,y). \end{gathered}$$

Tässä siis x on vakiovälillä $[a,b]$. Muuttujan y puolestaan sallitaan olevan kahden x:n funktion välissä. Muuttujan z taas sallitaan olla funktioiden $v_1(x,y)$ ja $v_2(x,y)$ välissä. Tässä on siis kolme ehtoa:

1. Muuttujan x rajat eivät saa riippua muista muuttujista: x on vakiovälillä.

2. Muuttujan y rajat saavat riippua x:stä: y on funktioiden $\phi_1(x)$ ja $\phi_1(x)$ välissä.

3. Muuttujan z rajat saavat riippua x:stä *ja* y:stä. Muuttuja z on funktioiden $v_1(x,y)$ ja $v_2(x,y)$ välissä.

Jos alue A pystytään esittämään tässä muodossa, niin haluttu integraali saadaan laskettua seuraavalla kaavalla:

$$\boxed{\iiint_A f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{v_1(x,y)}^{v_2(x,y)} f(x,y,x)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x.}$$

Eli: Integroidaan funktio $f(x,y,z)$ ensin z suhteen integrointirajoilla $v_1(x,y)$ ja $v_2(x,y)$. Seuraavaksi integroidaan syntynyt lauseke y:n suhteen integrointirajoilla $\phi_1(x)$ ja $\phi_2(x)$. Lopuksi integroidaan tästä syntynyt lauseke x:n suhteen välillä $[a,b]$.

Esimerkki 21.1. Lasketaan avaruusintegraali

$$\iiint_A (1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kun A on joukko jota rajaa taso $2x+y+3z=12$ ja koordinaattitasot $x=0$, $y=0$ ja $z=0$. Nyt tämä alue pitäisi kirjoittaa yllä esitellyssä muodossa. Ratkaistaan aluksi yhtälö $2x+y+3z=12$ muuttujan z suhteen:

$$z = \frac{1}{3}\left(12-2x-y\right).$$

Tämä on nyt z:n yläraja. Sen alaraja saadaan ehdosta $z = 0$, joten

$$0 \leq z \leq \frac{1}{3}\left(12 - 2x - y\right).$$

Muuttujan y rajat puolestaan saadaan ratkaisemalla lauseke $2x + y + 3z = 12$ muuttujan y suhteen:

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 12 \\ y &= 12 - 2x - 3z. \end{aligned}$$

Tässä y on suurimmillaan, kun z on pienimmillään: kun $z = 0$. Yllä olevasta yhtälöstä nähdään että tällöin $y = 12 - 2x$. Tämä on y:n yläraja. Muuttujan y alaraja on 0. Täten y on välillä $[0, 12 - 2x]$.

Muuttujan x rajat nähdään myös katsomalla yhtälöä $2x + y + 3z = 12$. Tästä nähdään, että x on integrointialueella suurimmillaan silloin kun y ja z ovat minimissään, eli silloin kun $y = 0$ ja $z = 0$. Tällöin $x = 6$. Täten $0 \leq x \leq 6$.

Nyt kun rajat on ratkaistu, tämän funktion integrointi voidaan suorittaa suoraviivaisesti:

$$\begin{aligned} \iiint_A (1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{v_1(x,y)}^{v_2(x,y)} (1)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_0^3 \int_0^{12-2x} \int_0^{\frac{1}{3}(12-2x-y)} (1)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Tässä oli integroinnin vaikea osuus: kun rajat on muodostettu, etenee integrointi suoraviivaisesti: ensin integroidaan funktio $f(x, y, x) = 1$ muuttujan z suhteen, sitten y:n suhteen ja lopuksi x:n suhteen:

$$\begin{aligned}
&\int_0^3 \int_0^{12-2x} \int_0^{\frac{1}{3}(12-2x-y)} (1) \mathrm{d}z \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 \int_0^{12-2x} \Big|_0^{\frac{1}{3}(12-2x-y)} (z) \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 \int_0^{12-2x} \frac{1}{3}\left(12-2x-y\right) \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 \Big|_0^{12-2x} \frac{1}{3}\left(12y - 2xy - \frac{1}{2}y^2\right) \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 \Big|_0^{12-2x} \left(4y - \frac{2}{3}xy - \frac{1}{6}y^2\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 \left(4\left(12-2x\right) - \frac{2}{3}x\left(12-2x\right) - \frac{1}{6}\left(12-2x\right)^2\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 \left(\frac{2}{3}x^2 - 8x + 24\right) \mathrm{d}x \\
&= \Big|_0^3 \left(\frac{2}{9}x^3 - 4x^2 + 24x\right) \\
&= 6 - 4 \cdot 3^2 + 24 \cdot 3 \\
&= 42.
\end{aligned}$$

Yllä olevassa esimerkissä siis meillä oli neljä tasoa: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $2x + y + 3z = 24$. Nämä tasot rajoittivat integrointialueen A. Tehtävän haaste oli löytää sopivat integroinnin rajat. Yhtälöistä $z = 0$ ja $2x + y + 3z = 24$ oli kohtalaisen suoraviivaista ratkaista z:n rajat. Muuttujan y rajat puolestaan saatiin ratkaistua valitsemalla $z = 0$ yhtälössä $2x + y + 3z = 24$.

22 Muuttujan vaihto: sylinterikoordinaatit

Myös kolmen muuttujan funktiota $f(x, y, z)$ integroitaessa voidaan tehdä muuttujanvaihdos. Nyt muuttujat x, y ja z korvataan lausekkeilla, jotka sisältävät muuttujia u, v ja w:

$$\begin{aligned}
x &= x(u, v, w) \\
y &= y(u, v, w) \\
z &= z(u, v, w).
\end{aligned}$$

Nyt siis x korvataan funktiolla $x(u,v,w)$, y korvataan funktiolla $y(u,v,w)$ ja z korvataan funktiolla $z(u,v,w)$. Esimerkki tällaisesta muuttujanvaihdoksesta on

$$\begin{aligned} x &= u+v \\ y &= u-v \\ z &= z, \end{aligned}$$

jossa siis z pysyy omana itsenään, mutta muuttujat x ja y muuntuvat. Tämä on kuitenkin hyvin yksinkertainen muuttujanvaihdos. Käytännössä kaksi käytetyintä muuttujanvaihdosta avaruusintegraaleille ovat siirtyminen **sylinterikoordinaatteihin** ja siirtyminen **pallokoordinaatteihin**.

Seuraavassa oletamme, että determinantin laskukaava on tuttu. Jos näin ei ole, kannattaa hyväksyä tulokset sellaisinaan.

Sylinterikoordinaattimuunnos on melkein sama kuin aiemmin käsitelty siirtyminen napakoordinaatteihin. Se on seuraava muunnos:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z. \end{aligned}$$

Tässä siis muuttujat x ja y korvataan täsmälleen samoilla muuttujilla kuin napakoordinaattimuunnoksen tapauksessa. Muuttuja z ei tässä muunnoksessa muunnu. Tämän muunnoksen Jakobin determinantti on sama kuin napakoordinaattimuunnoksella:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \cdot 1 \\ &= \cos\theta\,(r\cos\theta) - (-r\sin\theta(\sin\theta)) \\ &= r\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) \\ &= r. \end{aligned}$$

Täten sylinterikoordinaatteihin siirryttäessä integraali muuttuu seuraavasti:

$$\boxed{\iiint_A f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_D f\left(r\cos\theta, r\sin\theta, z\right) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z,}$$

jossa alkuperäinen integrointialue A muuntuu sylinterikoordinaatteihin siirryttäessä alueeksi D.

Sylinterikoordinaatteihin siirryttäessä on sama etu kuin napakoordinaatteihin siirryttäessä: termi x^2+y^2 voidaan korvata yksinkertaisella termillä r^2. Tätä muunnosta kannattaa käyttää muun muassa silloin, kun integrointialue A on muotoa $x^2+y^2 \leq a$ ja $c \leq z \leq d$, eli jos integrointialue on sylinterin muotoinen.

Esimerkki 22.1. Lasketaan integraali

$$\iiint_A (xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

jossa alue A on sylinteri $x^2+y^2 \leq 1$ ja $0 \leq z \leq 1$. Koska $x^2+y^2 = r^2$, niin muuttujan r rajat ovat $0 \leq r \leq 1$. Puolestaan muuttuja θ on tuttuun tapaan välillä $[0,2\pi]$, koska integrointialueena on koko sylinteri eikä esimerkiksi sylinterinpuolikas. Koska muuttuja z ei muunnu sylinterimuunnoksessa mihinkään, sen rajat eivät muutu eli $0 \leq z \leq 1$. Täten integrointi sujuu tällä kertaa seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\iiint_A (xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\cos\theta)\,(r\sin\theta)\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r^3\cos\theta\sin\theta\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi}\Big|_0^1 \left(\frac{1}{4}r^4\cos\theta\sin\theta\right) d\theta\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1\int_0^{2\pi} (\cos\theta\sin\theta)\, d\theta\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 \Big|_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\sin\theta)^2\,\mathrm{d}z \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Tässä integrointi suoritettiin siis koko sylinterissä, koska kulma θ oli täydellä välillään $[0,2\pi]$. Huomaa lisäksi, että tulos kertoo että funktio

$f(x, y, z) = xy$ saa keskimäärin arvon nolla tehtävän sylinterissä. Tämä johtuu käytännössä siitä, että tämän funktion negatiiviset arvot tasapainottavat sen positiiviset arvot integrointialueella.

Kulma θ on usein jollakin pienemmällä välillä, kuin $[0, 2\pi]$. Alla olevassa esimerkissä lisäehto $y \geq 0$ aiheuttaa sen, että θ rajoittuu välille $[0, \pi]$.

Esimerkki 22.2. Integroidaan muuttuja $e^{x^2+y^2}$ puolisylinterissä, jonka rajat ovat $x^2 + y^2 \leq 9$, $1 \leq z \leq 2$ ja $y \geq 0$ eli lasketaan integraali

$$\iiint_A e^{x^2+y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Tehdään sylinterimuunnos, jolloin lauseke $e^{x^2+y^2}$ saadaan muotoon e^{r^2}. Integroinnin raja $x^2 + y^2 \leq 9$ muuttuu muotoon $0 \leq r \leq 3$ ja raja $y \geq 0$ tarkoittaa, että θ rajoittuu välille $[0, \pi]$. Puolestaan raja $1 \leq z \leq 2$ pysyy ennallaan.

Nyt integraali lasketaan sylinterikoordinaatteihin siirtymällä seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\iiint_A \left(e^{x^2+y^2}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_1^2 \int_0^\pi \int_0^3 \left(e^{r^2} r\right) \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\
&= \int_1^2 \int_0^\pi \Big|_0^3 \left(\frac{1}{2} e^{r^2}\right) d\theta\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2} \int_1^2 \int_0^\pi \left(e^9 - 1\right) d\theta\mathrm{d}z \\
&= \left(\frac{e^9 - 1}{2}\right) \int_1^2 \Big|_0^\pi (\theta)\, \mathrm{d}z \\
&= \left(\frac{e^9 - 1}{2}\right) \Big|_1^2 (z\pi) \\
&= \pi \left(\frac{e^9 - 1}{2}\right).
\end{aligned}$$

23 Muuttujan vaihto: pallokoordinaatit

Yllä käsittelimme sylinterikoordinaattimuunnoksen, jonka voi ymmärtää napakoordinaattien yleistyksenä, kun integrointi tapahtuu avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Tämä muunnos on hyödyllinen, kun integrointialueena oli joukko joka on muotoa $a \leq x^2 + y^2 \leq b$, $v_1(x, y) \leq z \leq v_2(x, y)$. Sylinterikoordinaattien hyödyllisyys perustuu siihen, että termi $x^2 + y^2$ voidaan korvata termillä r^2.

Tutkitaan nyt palloa. Pallo on alue avaruudessa, joka määrittyy yhtälöstä $x^2 + y^2 + z^2 \leq a$, jossa a on jokin vakio. Jos integrointialueena on pallo tai pallon osa, on usein hyödyllistä siirtyä **pallokoordinaatteihin**. Pallokoordinaattimuunnoksessa muuttujat x, y ja z korvataan muuttujien r, θ ja φ lausekkeilla seuraavasti:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}$$

Tämä muunnos on nyt hieman monimutkaisempi kuin sylinterikoordinaattimuunnos. Sen hyödyllisyys perustuu kuitenkin samantyyliseen seikkaan kuin sylinterikoordinaattienkin hyödyllisyys. Tämä nähdään summaamalla $x^2 + y^2 + z^2$ yhteen:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + r^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + r^2 \cos^2\theta \\ &= r^2 \left(\sin^2\theta \cos^2\varphi + \sin^2\theta \sin^2\varphi + \cos^2\theta \right) \\ &= r^2 \left(\sin^2\theta \underbrace{\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi \right)}_{=1} + \cos^2\theta \right) \\ &= r^2 \left(\sin^2\theta + \cos^2\theta \right) \\ &= r^2. \end{aligned}$$

Täten pallokoordinaattien hyöty on siinä, että pallomaisilla alueilla esiintyvä termi $x^2 + y^2 + z^2$ voidaan korvata yksinkertaisella termillä r^2. Tämä helpottaa integrointia huomattavasti. Puolestaan pallokoordinaatiston muuttujat θ ja φ pitää tulkita kulmina.

Myös pallokoordinaattien tapauksessa meidän pitää löytää tämän muunnoksen Jakobin determinantti. Tämän laskeminen on tällä kertaa hieman työläämpää kuin aikaisemmin:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\varphi \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Huomataan, että viimeisellä rivillä on nolla. Täten tämä determinantti on helpointa laskea, kun sen laajentaa viimeistä riviä käyttäen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = \cos\theta &\begin{vmatrix} -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \end{vmatrix} \\
- r\sin\theta &\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Tästä seuraa parin rivin laskutoimituksen jälkeen, että

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = -r^2\sin\theta.$$

Lopulliseen integraaliin sijoitetaan tämän Jakobin determinantin itseisarvo, eli $r^2\sin\theta$. Täten pallokoordinaatteihin siirryttäessä integraali muuttuu seuraavasti:

$$\boxed{\iiint_A f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_D f\left(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta\right) r^2\sin\theta dr\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta.}$$

Esimerkki 23.1. Lasketaan integraali

$$\iiint_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kun integrointijoukko A on pallo $x^2+y^2+z^2 \leq 100$. Koska integrointialueessa esiintyy termi $x^2+y^2+z^2$, on pallokoordinaattimuunnos järkevä ratkaisu. Korvataan siis termi $x^2+y^2+z^2$ termillä r^2. Täten uutta integrointialuetta rajoittaa $0 \leq r^2 \leq 100 \iff 0 \leq r \leq 10$.

Seuraavaksi pitää päättää kulmien φ ja θ rajat. Aina kun integroimme täydessä ympyrässä, niin kulma φ käy täyden kierroksen eli $0 \leq \varphi \leq$

2π. Kulma θ puolestaan käy tällöin puoli kierrosta: $0 \leq \theta \leq \pi$. Täten integroinnin rajat ovat tässä tapauksessa

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq 10 \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 &\leq \theta \leq \pi. \end{aligned}$$

Rajojen muodostamisen jälkeen tämäkin integrointi on suoraviivaista, kunhan muistetaan sijoittaa Jakobin determinantin itseisarvo eli $r^2 \sin\theta$ tähän muunnettuun integraaliin:

$$\begin{aligned} \iiint_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{10} (r)\left(r^2\sin\theta\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{10} \left(r^3\sin\theta\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Big|_0^{10}\frac{1}{4}\left(r^4\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 10000\,(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= 2500\int_0^{2\pi}\Big|_0^{\pi}(-\cos\theta)\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 2500\int_0^{2\pi}(-\cos\pi+\cos 0)\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 2500\int_0^{2\pi}(2)\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 2500\Big|_0^{2\pi}(2\varphi) \\ &= 2500\,(4\pi) \\ &= 10000\pi. \end{aligned}$$

Tässä siis integrointialueena oli koko pallo. Jos rajoitteena on lisäksi $z \geq 0$, niin kulmaa θ pitää modifioida siten että integrointi tapahtuu ainoastaan puolipallossa, jossa $x^2+y^2+z^2 \leq a$ ja $z \geq 0$. Tämä onnistuu rajoittamalla θ välille $[0, \pi/2]$. Vastaavasti rajoittamalla kulmia θ ja φ voidaan integroida funktioita pallon eri osissa.

24 Ensimmäiseen välikokeeseen valmistavia tehtäviä

Ensimmäisen välikokeen koealue on pelkkää integrointia. Täten tentistä oleellista on hallita integraalien laskutekniikat. Alla on harjoituksia, joita tekemällä voit valmistautua tenttiin. Ne käsittelevät osaa koealueen aihepiiristä, eivätkä kata koko koealuetta. Ratkaisut näihin ja kaikkiin muihinkin harjoituksiin löytyvät liitteestä A, joka alkaa sivulta 128. Ennen harjoituksen tekemistä voi olla syytä kerrata harjoituksen aihepiiri sitä käsittelevästä kappaleesta.

24.1 Osittaisintegrointia

Ensimmäinen tässä käsiteltävä integrointitekniikka on **osittaisintegrointi** (katso sivu 5). Esitetään aluksi osittaisintegroinnin kaava määrätyn integraalin tapauksessa:

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = \Big|_a^b (f(x)g(x)) - \int_a^b f'(x)g(x).}$$

Esimerkki 24.1. Lasketaan integraali

$$\int_1^2 xe^x dx$$

osittaisintegroimalla. Valitaan funktiot $f(x)$ ja $g'(x)$ seuraavasti: $f(x) = x$ ja $g'(x) = e^x$. Tällöin $f'(x) = 1$ ja $g(x) = e^x$. Täten osittaisintegroinnin kaavaa käyttäen integraali saadaan muokattua seuraavaan muotoon:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 xe^x dx &= \Big|_1^2 (xe^x) - \int_1^2 e^x dx \\
&= \left(2e^2 - e\right) - \Big|_1^2 e^x \\
&= e\,(2e-1) - \left(e^2 - e\right) \\
&= e\,(2e-1) - e\,(e-1) \\
&= 2e^2 - e - e^2 + e = e^2.
\end{aligned}$$

Osittaisintegrointia käytettäessä on oleellista päättää mikä on $f(x)$ ja mikä on $g'(x)$. Tämän jälkeen integrointi onnistuu suoraviivaisesti osittaisintegroinnin kaavaa käyttäen. Tyypillisesti osittaisintegrointia tarvitaan seuraavanlaisia funktioita integroitaessa (alla n on kokonaisluku ja a ja b ovat vakioita):

1. Integraali $\int x^n e^{ax} \mathrm{d}x$. Tämä ratkeaa kun valitaan $f(x) = x^n$.
2. Integraali $\int x^n \sin bx \mathrm{d}x$ ja $\int x^n \cos bx \mathrm{d}x$. Nämä ratkeavat, kun valitaan $f(x) = x^n$.
3. Integraali $\int x^n \ln(ax) \mathrm{d}x$. Tämä ratkeaa kun valitaan $f(x) = \ln(ax)$.
4. Trigonometriset funktiot, jotka on kerrottu e^{ax}:llä: $\int e^{ax} \sin bx \mathrm{d}x$ ja $\int e^{ax} \cos bx \mathrm{d}x$. Tämä ratkeaa kun valitaan $f(x) = e^{ax}$.

Näistä kahden ensimmäisen ratkaisu perustuu siihen, että funktion $f(x) = x^n$ derivointi n kertaa johtaa siihen, että termi x häviää. Kohta 3 puolestaan perustuu siihen, että termin $f(x) = \ln(ax)$ derivaatta on $1/x$. Kohdan 4 periaate on monimutkaisempi. Se selviää harjoituksessa 24.3.

Osittaisintegroitaessa pitää lisäksi muistaa, että joskus osittaisintegrointia voi joutua soveltamaan samassa tehtävässä useaan otteeseen.

Harjoitus 24.1. Integroi $\int xe^{2x} \mathrm{d}x$. **Ratkaisu sivulla 128.**

Harjoitus 24.2. Integroi $\int x \ln x \mathrm{d}x$. **Ratkaisu sivulla 128.**

Seuraavan tehtävän integraali on tyyppiä $\int e^{ax} \sin bx \mathrm{d}x$. Tällaisessa tehtävassä tarvitaan osittaisintegrointia kahteen kertaan sekä termien yhdistelyä.

Harjoitus 24.3. Integroi $\int e^x \sin x \mathrm{d}x$. **Ratkaisu sivulla 129.**

Seuraavat kaksi integraalia ratkeavat myös osittaisintegroimalla, vaikkakaan ne eivät ole yllä lueteltua neljää tyyppiä.

Harjoitus 24.4. Integroi $\int (\ln x)^2 \mathrm{d}x$. Laske $\int_1^2 (\ln x)^2 \mathrm{d}x$. **Ratkaisu sivulla 128.**

Harjoitus 24.5. Laske integraali

$$\int_0^2 \arctan x \mathrm{d}x.$$

Ratkaisu sivulla 130.

24.2 Osamurtohajotelmia

Rationaalifunktiot eli kahden polynomifunktion osamäärät ratkeavat usein suoraan: esimerkiksi tyyppiä $f'(x)/f(x)$ olevan funktion integraali on muotoa $|f(x)| + C$. Samoin tyyppiä $a/(1 + x^2)$ oleva funktio voidaan integroida suoraan: sen integraali on $a \arctan x + C$. Osamurtohajotelmissa ideana on palauttaa rationaalifunktio $P(x)/Q(x)$ tällaiseen muotoon, joka on suoraan integroitavissa.

Harjoitus 24.6. Laske integraali

$$\int \frac{1}{x^2 + x - 2} \mathrm{d}x.$$

Ratkaisu sivulla 130.

24.3 Yhden muuttujan sijoituskeino

Yhden muuttujan sijoituskeinossa ideana on korvata integroitavan lausekkeen termi x muuttujaa t sisältävällä termillä $g(t)$. Lisäksi pitää muistaa korvata termi $\mathrm{d}x$ termillä $\mathrm{d}t$.

Harjoitus 24.7. Laske integraali

$$\int_1^2 x\sqrt{x + 1} \mathrm{d}x$$

Ratkaisu sivulla 131.

Harjoitus 24.8. Laske integraali

$$\int_1^2 \frac{x^4}{1 + x^{10}} \mathrm{d}x$$

Ratkaisu sivulla 132.

24.4 Tasointegraalit

Tasointegraalin laskeminen suorakulmiossa $[a, b] \times [c, d]$ on helppoa. Alla olevat esimerkit käsittelevät integrointia yli monimutkaisempien tason alueiden. Kummassakin tehtävässä tällainen alue on kolmio, mutta sama ratkaisutekniikka soveltuu myös integrointiin yli muunlaisten tason alueiden.

Harjoitus 24.9. Laske tasointegraali

$$\iint_A xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kun A on kolmio, jota rajoittavat pisteet $(0,0)$, $(3,3)$ ja $(3,1)$.
Ratkaisu sivulla 132.

Harjoitus 24.10. Laske tasointegraali

$$\iint_A xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kun A on kolmio, jota rajoittavat pisteet $(0,0)$, $(1,2)$ ja $(1,-2)$.
Ratkaisu sivulla 133.

24.5 Napakoordinaatit

Napakoordinaattimuunnosta on hyvä käyttää, kun laskettavana on tasointegraali jonka integrointialue A on joko ympyrä tai yleisemmin kahden osaympyrän väliin jäävä alue. Napakoordinaattimuunnos on muunnos

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta. \end{aligned}$$

Tätä muunnosta käytettäessä on huomattava, että alkuperäisen lausekkeen termi x^2+y^2 korvataan termillä r^2. Haasteena napakoordinaattitehtävissä on usein valita muuttujien r ja θ integrointirajat oikein.

Harjoitus 24.11. Laske tasointegraali

$$\iint_A (1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kun A on neljäsosaympyrä $x^2+y^2 \leq 4$, $y \geq 0$ ja $x \geq 0$. **Ratkaisu sivulla 134.**

Harjoitus 24.12. Laske tasointegraali

$$\iint_A (x^2+y^2+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kun A on alue, jota rajoittaa ympyrät $x^2+y^2 \leq 9$ ja $x^2+y^2 \leq 4$ sekä koordinaattiakseli $y \geq 0$. **Ratkaisu sivulla 135.**

24.6 Sylinterikoordinaatit

Sylinterikoordinaattimuunnos on napakoordinaattimuunnoksen (yksi) yleistys avaruusintegraaleille. Kyseessä on muunnos

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z. \end{aligned}$$

Tämä muunnos toimi hyvin pitkälti samalla tavalla kuin napakoordinaattimuunnos. Tämän muunnoksen nimi tulee siitä, että jos integroitava alue on muotoa $x^2 + y^2 \leq a$, $b \leq z \leq c$, niin se on avaruuteen ($\mathbb{R}^3$) piirrettynä sylinterin muotoinen.

Harjoitus 24.13. Laske integraali

$$\iiint_A \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kun A on sylinteri $x^2 + y^2 \leq 1$, $2 \leq z \leq 3$. **Ratkaisu sivulla 135.**

Sylinterimuunnoksessa muuttuja z voi olla muulla kuin vakiovälillä, kuten seuraavassa tehtävässä.

Harjoitus 24.14. Laske integraali

$$\iiint_A \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kun A on sylinteri, jota rajoittaa tasot $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$ ja $z = x^2 + y^2$. Vaaditaan lisäksi, että $y \geq 0$. **Ratkaisu sivulla 136.**

24.7 Pallokoordinaatit

Pallokoordinaattimuunnos on muunnos, joka on nimensä mukaisesti hyödyllinen integroitaessa pallomaisilla $\mathbb{R}^3$:n alueilla. Kyseessä on muunnos, jossa muuttujat x, y ja z korvataan muuttujilla r, θ ja φ seuraavasti:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

Tämän muunnoksen hyöty on siinä, että sitä käytettäessä termi $x^2 + y^2 + z^2$ voidaan korvata termillä r^2. Haastavaa pallokoordinaattimuunnosta käytettäessä on muodostaa rajat uusille muuttujille r, θ ja φ. Jos integrointi tapahtuu täydessä pallossa, jossa $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, niin rajat ovat

$$\begin{aligned}
&0 \leq r \leq a \\
&0 \leq \theta \leq \pi \\
&0 \leq \varphi \leq 2\pi.
\end{aligned}$$

Harjoitus 24.15. Laske integraali

$$\iiint_A (1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kun integrointijoukko A on kahden pallon rajoittama ala: $4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$. **Ratkaisu sivulla 137.**

Osa II
Toinen välikoe

25 Useamman muuttujan funktion raja-arvo

Palautetaan aluksi mieliin yhden muuttujan funktion $g(x)$ **raja-arvo**

$$\lim_{x \to a} g(x).$$

Tämä raja-arvo kertoo, mitä arvoa funktio $g(x)$ lähestyy, kun x lähestyy arvoa a. Esimerkiksi

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4,$$

koska funktio $g(x) = x^2$ lähestyy arvoa 4, kun x lähestyy arvoa 2.

Toisaalta esimerkiksi funktio

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \geq 0 \\ -1, & \text{jos } x < 0 \end{cases}$$

ei saa raja-arvoa origossa, eli $\lim_{x \to 0} g(x)$ ei ole olemassa. Tämä johtuu siitä, että kyseisen funktion oikeanpuoleinen raja-arvo $\lim_{x \to 0+} g(x)$ on yhtä kuin yksi, kun taas sen vasemmanpuoleinen raja-arvo $\lim_{x \to 0-} g(x)$ on yhtä kuin -1. Tällöin funktiolla ei voi olla raja-arvoa. Usein on siis mahdollista todistaa, että yhden muuttujan funktiolla ei ole raja-arvoa osoittamalla, että sen oikean- ja vasemmanpuoleinen raja-arvo ovat erisuuria eli

$$\lim_{x \to a+} g(x) \neq \lim_{x \to a-} g(x).$$

Tämä tulos on hyödyllistä tulkita siten, että funktiolla ei ole raja-arvoa pisteessä a, mikäli laskettu raja-arvo on eri kun pistettä a lähestytään *eri puolilta*. Tämä tulkita osoittautuu hyödylliseksi monen muuttujan funktioiden raja-arvoja laskettaessa.

Nyt tarkastellaan kahden muuttujan funktion raja-arvoja. Kahden muuttujan funktiota merkitään $f(x, y)$. Tällaisen funktion raja-arvoa merkitään puolestaan

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y).$$

Tämä on funktion $f(x,y)$ raja-arvo, kun x lähestyy arvoa x_0 ja y lähestyy arvoa y_0 eli $(x,y) \to (x_0,y_0)$. Yksinkertainen esimerkki kahden muuttujan funktiosta on $f(x,y) = xy$, jolle pätee esimerkiksi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

eli tämän funktion raja-arvo origossa on nolla. Tämä on selvä tulos, sillä kun x ja y lähestyvät nollaa, niin myös tulo xy lähestyy nollaa.

Seuraavaksi esitetään yksi tapa osoittaa, että jotakin raja-arvoa $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ ei ole olemassa. Yllä todettiin, että yhden muuttujan tapauksessa riittää osoittaa, että $\lim_{x\to a+} g(x) \neq \lim_{x\to a-} g(x)$ eli jos raja-arvon laskeminen eri suunnista tuottaa eri tuloksia, ei raja-arvoa ole olemassa. Usean muuttujan tapauksessa voidaan käyttää samaa tekniikkaa: lasketaan raja arvo $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, kun pistettä (x_0,y_0) lähestytään eri suunnista. Jos eri suunnista saadaan eri tuloksia, ei tätä raja-arvoa ole olemassa.

Koska piste (x_0,y_0) on tasossa (eli avaruudessa $\mathbb{R}^2$), niin sitä voi itse asiassa lähestyä hyvinkin monesta eri suunnasta. Jos esimerkiksi laskemme raja-arvoa origossa eli suuretta

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y),$$

niin lukupari (x,y) voi lähestyä origoa useasta eri suunnasta: esimerkiksi suoraa $y = x$ pitkin tai paraabelia $y = x^2$ pitkin. Jos raja-arvolasku tuottaa eri tuloksia eri lähestymisteitä pitkin, ei tätä raja-arvoa ole olemassa.

Esimerkki 25.1. Osoitetaan, että raja-arvoa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

ei ole olemassa. Tämän voi osoittaa seuraavalla tavalla: valitaan kaksi polkua, joita pitkin (x,y) lähestyy origoa ja näytetään, että raja-arvotulos on eri. Ensinnä (x,y) voi lähestyä origoa suoraa $y = x$ pitkin, koska origo $(0,0)$ sisältyy suoraan $y = x$. Tämä raja-arvo saadaan laskettua tekemällä lausekkeeseen $x^2/(x^2+y^2)$ sijoitus $x=y$:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{x^2+y^2} &= \frac{x^2}{x^2+x^2}\\ &= \frac{x^2}{2x^2}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Eli kun origoa lähestytään suoraa $y=x$ pitkin, saadaan raja-arvo $1/2$.

Origoa voi kuitenkin lähestyä myös esimerkiksi suoraa $y=0$ pitkin. Tällöin saadaan seuraava tulos:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{x^2+y^2} &= \frac{x^2}{x^2}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Eli tällöin raja-arvo on yksi. Täten eri polkuja pitkin saadaan laskettua eri raja-arvoja, joten kyseistä raja-arvoa $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ ei ole olemassa.

Alla on vielä toinen esimerkki, joka soveltaa tätä samaa tekniikkaa.

Esimerkki 25.2. Osoita, että raja-arvoa

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{2x^6+y^2}$$

ei ole olemassa.

Ratkaisu. Lasketaan raja-arvo aluksi y-akselia eli suoraa $x=0$ pitkin:

$$\frac{x^3y}{2x^6+y^2} = 0.$$

Täten raja arvo suoraa $x=0$ pitkin on nolla. Valitaan toiseksi poluksi $y=x^3$. Tällöin

$$\begin{aligned}\frac{x^3y}{2x^6+y^2} &= \frac{x^3x^3}{2x^6+x^6}\\ &= \frac{x^6}{3x^6}\\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Eli eri polkuja pitkin saadaan eri raja-arvoja, joten funktiolla $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{2x^6+y^2}$ ei ole raja-arvoa origossa.

Yllä esitetty tekniikka, jolla osoitetaan että funktiolla $f(x,y)$ ei ole raja-arvoa pisteessä (x_0, y_0) on siis seuraava:

1. Lasketaan raja-arvo $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ eri polkuja pitkin. Jos $(x_0, y_0) = (0,0)$, niin tällaisia polkuja voi olla esimerkiksi $y = x$ tai $y = 0$.

2. Jos raja-arvolasku tuottaa näitä eri polkuja pitkin eri tuloksia, ei tätä raja-arvoa ole olemassa.

Nyt on siis esitetty tapa, jolla raja-arvon olemattomuus osoitetaan. Seuraavaksi näytettään, kuinka todistetaan että raja arvo

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

on olemassa. Tämä on helppoa, mikäli raja-arvo ei ole "vaikeaa muotoa", kuten muotoa $\frac{0}{0}$. Täten pätee esimerkiksi

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2+y^2}{xy} = 2,$$

mikä nähdään suoraan sijoittamalla arvot $x = 1$ ja $y = 1$ kyseiseen lausekkeeseen.

Ongelmia sen sijaan tuottaa erityisesti tyyppiä $\frac{0}{0}$ olevat raja-arvot. Esimerkki tällaisesta on

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2},$$

jossa siis sekä osoittaja, että nimittäjä lähestyvät nollaa. Mikäli tätä tyyppiä oleva raja-arvo on olemassa, sen olomassaolo on osoitettava käyttäen suoraan raja-arvon määritelmää.

Palautetaan tätä varten aluksi mieliin yhden muuttujan funktion $f(x)$ raja-arvon määritelmä pisteessä x_0: $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ tarkoittaa intuitiivisesti sitä, että $f(x)$:n etäisyys luvusta a eli $|f(x) - a|$ on pieni, kun x:n etäisyys luvusta x_0 on pieni. Tarkempi määritelmä kuuluu suomeksi seuraavasti:

> $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ *tarkoittaa, että erotus* $|f(x) - a|$ *saadaan niin pieneksi kuin halutaan, kunhan valitaan luku* x *riittävän läheltä lukua* x_0.

Matematiikan kielellä tämä ilmaistaan seuraavasti

> *Kaikille* $\epsilon > 0$ *on olemassa* $\delta > 0$ *siten että* $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - a| < \epsilon$.

Toisin sanottuna funktion $f(x)$ raja-arvo pisteessä x_0 on yhtä kuin a, mikäli $f(x)$ etäisyys a:sta eli $|f(x) - a|$ saadaan aina alle ϵ:n päähän, kunhan valitaan luku x tarpeeksi läheltä lukua x_0. Tässä ideana on se, että ϵ voidaan valita niin pieneksi kuin halutaan, eli $|f(x) - a|$ saadaan halutun pieneksi.

Kahden muuttujan funktioiden tapauksessa tämä määritelmä on intuitiivisesti täysin sama, eli

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a$$

tarkoittaa, että etäisyys $|f(x,y) - a|$ saadaan halutun pieneksi valitsemalla piste (x,y) riittävän läheltä lukua (x_0,y_0). Ainoa muutos tulee siitä, että pisteet (x,y) ja (x_0,y_0) ovat lukupareja, joten niiden etäisyys pitää määritellä jollakin tavalla. Tällä kurssilla käytettään perinteistä **normia**, eli pisteiden (x,y) ja (x_0,y_0) etäisyys on

$$\|(x,y) - (x_0,y_0)\| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.$$

Täten kahden muuttujan funktion $f(x,y)$ raja-arvo pisteessä (x_0,y_0) on yhtä kuin a, mikäli pätee

Kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten että

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Longrightarrow |f(x,y) - a| < \epsilon.$$

Täten pääasiallinen ero yhden muuttujan funktion raja-arvon määritelmään on ainoastaan termin $|x - x_0|$ korvaaminen termillä $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$.

Nyt meillä on tarvittavat työkalut todistaa, että raja-arvo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

on itse asiassa yhtä kuin nolla. Raja-arvon määritelmä sanoo nyt, että tämä raja-arvo on 0, mikäli valitsemalla tarpeeksi pieni arvo

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

erotus $|f(x,y) - 0| = |f(x,y)|$ saadaan niin pieneksi kuin halutaan. Huomataan aluksi, että

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &= \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \\ &\leq \left|\frac{x^2y}{x^2}\right| \\ &= |y|\,. \end{aligned}$$

Täten itseisarvo $|f(x,y)|$ on aina pienempi tai yhtä suuri kuin $|y|$. Tehtävä ratkeaa suoraan tämän huomion jälkeen, sillä pätee myös

$$\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y|\,.$$

Täten:

$$|f(x,y)| \leq |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}.$$

Eli kun valitaan piste (x,y) tarpeeksi läheltä origoa $(0,0)$, niin $|y|$ saadaan halutun pieneksi ja samalla $|f(x,y)|$ saadaan halutun pieneksi. Täten

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

Täten tekniikka, jolla osoitetaan kahden muuttujan funktion raja-arvon olemassaolo, on seuraava:

1. Ensin pitää arvata, että tämä raja-arvo on jokin a (yllä oli $a = 0$).
2. Seuraavaksi yritetään osoittaa, että erotus $|f(x,y) - a|$ on pienempi kuin jokin tietty luku b (yllä tämä luku oli $b = |y|$).
3. Seuraavaksi osoitetaan, että $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ on puolestaan suurempi kuin tämä luku b.
4. Täten, kun $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ valitaan riittävän pieneksi, $|f(x,y) - a|$ saadaan halutun pieneksi, koska

   $$|f(x,y) - a| \leq b \leq \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

   Täten kun $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \longrightarrow 0$, niin $|f(x,y) - a| \longrightarrow 0$. Eli $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y/(x^2+y^2) = 0$.

Esimerkki 25.3. Osoita, että

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Ratkaisu. Noudatetaan yllä esitettyjä vaiheita. Aluksi tutkitaan erotusta $|f(x,y) - a|$:

$$\begin{aligned}
|f(x,y) - a| &= \left| \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| \\
&\leq \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2} \right).
\end{aligned}$$

Lisäksi $\sqrt{x^2+y^2} \geq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$, joten pätee:

$$|f(x,y) - 0| \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2} \right) \leq \sqrt{x^2+y^2},$$

joten funktio $f(x,y)$ saadaan niin lähelle nollaa kuin halutaan valitsemalla (x,y) tarpeeksi läheltä origoa. Täten

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

26 Useamman muuttujan funktion jatkuvuus

Useamman muuttujan funktion jatkuvuus määritellään täsmälleen samalla tavalla kuin yhden muuttujan funktion jatkuvuus[6]: esimerkiksi funktio $f(x,y)$ on jatkuva pisteessä (x_0,y_0), jos sen raja-arvo tässä pisteessä on yhtä kuin funktion arvo tässä pisteessä eli mikäli pätee

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

[6] Tämä määritelmä itse asiassa vaatii sen, että piste (x_0,y_0) on **kasaantumispiste** eli piste, jonka jokaisessa ympäristössä on muita määrittelyjoukon pisteitä.

Usean muuttujan funktiolle pätee periaatteessa samat jatkuvuustulokset kuin yhdenkin muuttujan funktiolle: jatkuvien funktioiden tulo on jatkuva, samoin kuin jatkuvien funktioiden osamäärä (kunhan nimittäjä ei ole nolla). Lisäksi jatkuvien funktioiden yhdistetty funktio on jatkuva.

Esimerkki 26.1. Funktio

$$\frac{x^2y^2}{1+x^2}$$

on jatkuva, sillä se on jatkuvien funktioiden osamäärä. Samoin

$$e^{x^2+y^2}$$

on jatkuva sillä se on jatkuvien funktioiden yhdistetty funktio.

27 Osittaisderivaatat ja gradientti

Osittaisderivointi ei eroa tekniikaltaan oleellisesti tavallisesta derivoinnista. Jos meillä on kahden muuttujan funktio $f(x,y)$, niin tämän osittaisderivaattaa muuttujan x suhteen merkitään $\partial f(x,y)/\partial x$ ja vastaavasti osittaisderivaattaa y:n suhteen merkitään $\partial f(x,y)/\partial y$.

Laskettaessa esimerkiksi osittaisderivaattaa $\partial f(x,y)/\partial x$ on syytä muistaa kohdella muuttujaa y kuten vakiota.

Esimerkki 27.1. Funktiolle $f(x,y) = y \ln x$ pätee:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y}{x}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \ln x.$$

Tässä siis derivoitaessa x:n suhteen kohdellaan muuttujaa y kuin vakiota ja derivoitaessa y:n suhteen kohdellaan muuttujaa x kuin vakiota.

Kahden muuttujan tapauksessa osittaisderivaatta $\partial f(x,y)/\partial x$ kertoo, kuinka paljon tietyn funktion $f(x,y)$ arvo muuttuu, kun muuttujaa x kasvatetaan "vähän" samalla kun muuttuja y pidetään vakioisena.

Kansantaloustieteessä osittaisderivaatat ovat suosittuja työkaluja: jos esimerkiksi $F(K,L)$ on perinteinen tuotantofunktio, niin osittaisderivaatta

$\partial F(K, L)/\partial K$ ilmaisee kuinka paljon tuotanto kasvaa, kun pääomaa K kasvatetaan yksi yksikkö. Osittaisderivoinnin suosiota taloustieteessä voi perustella sillä, että se ilmaisee *ceteris paribus* -käsitteen matemaattisesti.

Osittaisderivoitaessa funktiota, jossa on enemmän kuin kaksi muuttujaa, on yllä esitetty tekniikka ja intuitio täsmälleen sama.

Esimerkki 27.2. Lasketaan funktion $f(x, y, z) = x^2yz^5$ osittaisderivaatat:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2xyz^5$$
$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = x^2z^5.$$
$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 5x^2yz^4.$$

Funktion f **gradientti** ∇f saadaan yksinkertaisesti esittämällä osittaisderivaatat rivivektorina. Täten yllä olevassa esimerkissä pätee

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y,z) &= \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right) \\ &= \left(2xyz^5, x^2z^5, 5x^2yz^4\right).\end{aligned}$$

Täten voidaan laskea esimerkiksi tämän funktion gradientti pisteessä $(1, 1, 1)$:

$$\nabla f(1,1,1) = (2,1,5).$$

28 Vektoriarvoiset funktiot

Yllä olemme tarkastelleet usean muuttujan funktioita, jotka ovat reaaliarvoisia eli $f(x, y) \in \mathbb{R}$. Funktio voi kuitenkin olla myös **vektoriarvoinen**, kuten funktio $f(x, y) = (x^2y, y^3)$. Tämä funktio saa siis arvon, joka ei ole reaaliluku vaan lukupari eli $f(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tällaisessa funktiossa ei sinänsä ole mitään outoa: konkreettinen esimerkki tällaisesta funktiosta olisi $f(x) = (l, k)$, jossa x on tietty paikka, l on tämän paikan lämpötila ja k sen ilmankosteus. Tässä siis funktio f antaa tietyn paikan lämpötilan ja ilmankosteuden.

Vektoriarvoisen funktion **komponenttifunktiot** ovat sen arvovektorin alkiot. Täten esimerkiksi funktion $f(x, y) = (x^2y, y^3)$ komponenttifunktiot ovat $f_1(x,y) = x^2y$ ja $f_2(x,y) = y^3$. Komponenttifunktioiden hyöty on siinä, että vektoriarvoisen funktion jatkuvuus ja määrittelyjoukko voidaan määritellä sen komponenttifunktioiden avulla. Esimerkiksi vektoriarvoinen funktio $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ on jatkuva, mikäli sen komponenttifunktiot ovat jatkuvia.

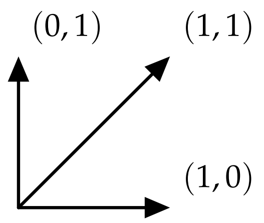
Vastaavasti vektoriarvoisen funktion osittaisderivaatat määritellään osittaisderivoimalla jokainen komponenttifunktio erikseen. Täten esimerkiksi funktion $f(x,y) = (x^2y, y^3)$ osittaisderivaatat ovat:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= (2xy, 0)\\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= (x^2, 3y^2).\end{aligned}$$

Täten vektoriarvoisen funktion osittaisderivaatat ovat myös vektoriarvoisia.

29 Suunnattu derivaatta

Aluksi tarkastelemme vektoreita, koska ymmärrys vektoreista helpottaa alla olevien asioiden omaksumista. Kun liikutaan tasossa eli avaruudessa $\mathbb{R}^2$, niin vektori (x,y) on yksinkertaisesti lukupari koordinaatistossa. Se voidaan visualisoida nuolena, joka alkaa origosta ja päättyy pisteeseen (x,y). Esimerkiksi vektori $(1,0)$ on vektori, joka alkaa origosta ja päättyy pisteeseen $(1,0)$. Alla olevassa kuvassa on kuvattu kolme vektoria:



Vektorilla on aina suunta ja pituus. Yllä olevassa kuvassa kaikilla kolmella vektorilla on eri suunta. Kaksi näistä kulkee koordinaattiakseleiden suuntaisesti ja yksi 45 asteen kulmassa. Vektorin pituus on sen etäisyys origosta eli $\sqrt{x^2+y^2}$. Täten siis vektorien $(1,0)$ ja $(0,1)$ pituus on yksi ja vektorin $(1,1)$ pituus on $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Vektori on **yksikkövektori**, jos sen pituus on yksi. Toisaalta myös vektorista $(1,1)$ saadaan muodostettua yksikkövektori jakamalla sen jokainen komponentti sen pituudella $\sqrt{2}$. Täten $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ on yksikkövektori.

Tarkastellaan nyt jälleen kahden muuttujan funktiota $f(x,y)$. Tämän funktion osittaisderivaatta $\partial f(x,y)/\partial x$ kertoo, kuinka funktion f arvo muuttuu, kun x-akselilla siirrytään "vähän" oikealle. Puolestaan $\partial f(x,y)/\partial y$ kertoo, kuinka tämä arvo muuttuu, kun y-akselilla siirrytään ylöspäin. Funktion gradientti $\nabla f(x,y)$ esittää nämä osittaisderivaatat vektorina

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right).$$

Siispä $\partial f(x,y)/\partial x$ on funktion f muutos siirryttäessä (x,y)-tasossa oikealle *eli vektorin* $(1,0)$ *suuntaan*. Vastaavasti $\partial f(x,y)/\partial y$ on funktion f muutos siirryttäessä (x,y)-tasossa ylöspäin *eli vektorin* $(0,1)$ *suuntaan*. Tasossa voi kuitenkin siirtyä muuhunkin suuntaan kuin oikealle tai ylös. Tästä seuraa ja myös funktion f derivaatan voi laskea, kun (x,y)-tasossa siirrytään johonkin yleiseen suuntaan.

Voimme esimerkiksi laskea funktion $f(x,y)$ derivaatan, kun siirrymme (x,y)-tasossa vektorin $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ suuntaan. Tällainen derivaatta tietyn yksikkövektorin (v_1, v_2) suuntaan on nimeltään **suunnattu derivaatta** ja sen määritelmä on kahden muuttujan funktion $f(x,y)$ tapauksessa seuraava:

$$\frac{d}{dt}\left(f\left((x,y)+t(v_1,v_2)\right)\right)\Bigg|_{t=0}$$

Tässä määritelmässä $f((x,y)+t(v_1,v_2))$ on funktion f arvo pisteessä $(x,y)+t(v_1,v_2) = (x+tv_1, y+tv_2)$. Tässä siis pisteestä (x,y) siirrytään vektorin (v_1,v_2) suuntaan ja t kertoo, kuinka paljon tämän vektorin suuntaan liikutaan. Derivaatta $\frac{d}{dt}f((x,y)+t(v_1,v_2))$ kertoo, miten funktion arvo muuttuu, kun t kasvaa hieman eli kun siirrytään pisteestä (x,y) hieman kohden vektoria (v_1,v_2). Suunnattu derivaatta arvioidaan pisteessä $t=0$: se siis kertoo paljonko funktion f arvo muuttuu, kun pisteestä (x,y) lähdetään liikkuumaan vektorin (v_1,v_2) suuntaan.

Suunnatulle derivaatalle on olemassa helppo laskukaava:

$$\frac{d}{dt}\left(f\left((x,y)+t(v_1,v_2)\right)\right)\Bigg|_{t=0} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}v_1 + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}v_2.$$

Toisin sanottuna suunnattu derivaatta tietyn yksikkövektorin (v_1, v_2) suuntaan saadaan kertomalla funktion f osittaisderivaatat tämän yksikkövektorin vastaavilla komponenteilla. Täten suunnattua derivaattaa vektorin (v_1, v_2) suuntaan voi ajatella osittaisderivaattojen $\partial f(x,y)/\partial x$ ja $\partial f(x,y)/\partial y$ painotettuna keskiarvona, jossa osittaisderivaatan $\partial f(x,y)/\partial x$ paino on v_1 ja osittaisderivaatan $\partial f(x,y)/\partial y$ paino on v_2.

Esimerkki 29.1. Lasketaan funktion $f(x,y) = xy$ derivaatta vektorin $(1,2)$ suuntaan. Vektori $(1,2)$ ei ole yksikkövektori, joten muodostetaan siitä yksikkövektori jakamalla sen jokainen komponentti sen pituudella. Vektorin $(1,2)$ pituus on $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, joten tästä vektorista saadaan muodostettua yksikkövektori $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$. Nyt funktion $f(x,y) = xy$ derivaatta tämän yksikkövektorin suuntaan on

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}v_1 + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}v_2 &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}1/\sqrt{5} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}2/\sqrt{5} \\ &= y/\sqrt{5} + 2x/\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Täten tämän funktion derivaatta tämän yksikkövektorin suuntaan esimerkiksi pisteessä $(1,1)$ on yhtä kuin $1/\sqrt{5} + 2/\sqrt{5} = 3/\sqrt{5}$. Täten jos pisteestä $(1,1)$ liikutaan yksi yksikkö vektorin $(1,2)$ suuntaan, niin funktion f arvo muuttuu noin $3/\sqrt{5}$.

Tärkeää tässä vaiheessa on ymmärtää suunnatun derivaatan intuitio. Tiedetään, että $\partial f(x,y)/\partial x$ kertoo, paljonko funktion f arvo muuttuu, kun siirrytään vektorin $(1,0)$ suuntaan ja puolestaan $\partial f(x,y)/\partial y$ kertoo paljonko funktion f arvo muuttuu, kun siirrytään vektorin $(0,1)$ suuntaan. Kuitenkin (x,y) voidaan liikkua myös moneen muuhun suuntaan ja suunnattu derivaatta antaa funktion muutoksen tietyn vektorin (v_1, v_2) suuntaan.

Esimerkki 29.2. Olkoon $U(x_1, x_2)$ hyötyfunktio. Hyödykkeen yksi rajahyöty on tunnetusti $\partial U(x_1,x_2)/\partial x_1$ ja hyödykkeen kaksi rajahyöty puolestaan on $\partial U(x_1,x_2)/\partial x_2$. Paljonko on kuluttajan rajahyöty, jos hän kasvattaa kummankin hyödykkeen kulutusta saman verran?

Ratkaisu. Jos hän kasvattaa kummankin hyödykkeen kulutusta saman verran, hän siirtyy (x_1, x_2)-avaruudessa vektorin $(1,1)$ suuntaan. Tämä rajahyöty saadaan siis laskemalla hyötyfunktion suunnattu derivaatta vektoria $(1,1)$ vastaavan yksikkövektorin $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ suuntaan. Tämä on yhtä kuin

$$\frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_1}1/\sqrt{2} + \frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_2}1/\sqrt{2}.$$

Koska suunnattu derivaatta kuvaa funktion muutoksen tiettyyn suuntaan, ja näitä suuntia on täydet 360 astetta, herää kysymys että mihin suuntaan funktion f arvo kasvaa nopeimmin. Osoittautuu, että funktio kasvaa nopeinten gradienttinsa ∇f suuntaan.

Esimerkki 29.3. Funktio $f(x,y) = x^2 + y^2$ kasvaa nopeinten vektorin $(2x, 2y)$ suuntaan. Esimerkiksi pisteessä $(1,0)$ tämä funktio kasvaa nopeinten vektorin $(2,0)$ suuntaan.

Funktio kasvaa siis nopeinten gradienttinsa suuntaan. Tämä tulos on sikäli uskottava, että jos meillä on esimerkiksi funktio $f(x,y) = y$, niin tämä kasvaa selkeästi nopeinten y-akselin suuntaan. Tämän funktion gradientti on $(0,1)$, joten selvästi tämä funktio kasvaa nopeinten gradienttinsa suuntaan. Vastaavasti funktio $f(x,y) = xy$ kasvaa nopeinten suuntaan (y,x). Täten jos olemme suoralla $x = y$, saadaan funktiota $f(x,y) = xy$ kasvatettua eniten siirtymällä yksikkövektorin $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ suuntaan.

Tarkastellaan jälleen funktiota $f(x,y) = y$, joka siis kasvaa nopeinten y-akselin suuntaan. Kyseinen funktio myös selvästi vähenee nopeinten suuntaan $(0,-1)$ eli liikuttaessa y-akselilla alaspäin. Tämä esimerkki yleistyy siten, että jokainen funktio vähenee nopeinten suuntaan $-\nabla f$ eli gradientista päinvastaiseen suuntaan.

> *Funktio $f(x,y)$ kasvaa pisteessä (x_0,y_0) nopeiten gradienttinsa $\nabla f(x_0,y_0)$ suuntaan. Se vähenee tässä pisteessä nopeiten vektorin $-\nabla f(x_0,y_0)$ suuntaan.*

30 Tangenttitason yhtälö

Yhden muuttujan analyysissä funktiolle $f(x)$ voitiin muodostaa tangenttisuora pisteeseen $(x_0, f(x_0))$. Tämän tangenttisuoran yhtälö on

$$y = f(x_0) + f'(x)(x - x_0).$$

Yhden muuttujan funktion tangenttisuora on siis suora $a + bx$, joka approksimoi funktiota pisteen (x_0, y_0) läheisyydessä. Useamman muuttujan tapauksessa tangenttisuoraa vastaa **tangenttitaso**.

Tarkastellaan nyt kolmen muuttujan funktiota $f(x,y,z)$. Tällaiselle funktiolle voi muodostaa tasa-arvopinnan $f(x,y,z) = k$. Tämä pinta koostuu siis kaikista pisteistä (x, y, z), joilla f saa arvon k. Esimerkki tällaisesta tasa-arvopinnasta on

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

joka siis sisältää esimerkiksi pisteet $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ ja $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Tällaisen tasa-arvopinnan pisteeseen (x_0, y_0, z_0) voidaan piirtää tangenttitaso. Tasa-arvopinnan $f(x, y, z) = k$ pisteeseen (x_0, y_0, z_0) piirretyn tangenttitason yhtälö on yhtä kuin

$$\begin{aligned} \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) &= 0 \\ \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}(z - z_0) &= 0, \end{aligned}$$

jossa esimerkiksi $\partial f(x_0, y_0, z_0)/\partial x$ tarkoittaa osittaisderivaattaa $\partial f(x, y, z)/\partial x$ arvioituna pisteessä (x_0, y_0, z_0).

Toisin sanottuna tangenttitason yhtälö saadaan laskemalla funktion f osittaisderivaatat pisteessä (x_0, y_0, z_0) ja kertomalla nämä erotuksilla $x - x_0$, $z - z_0$ ja $z - z_0$.

Esimerkki 30.1. Tasa-arvopinnalle $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ voidaan määrittää yllä olevalla kaavalla tangenttitaso. Sen kaava pisteessä (x_0, y_0, z_0) on

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0$$

Täten esimerkiksi pisteeseen $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ piirretyn tangenttitason yhtälö on yhtä kuin

$$\begin{aligned} 2\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2\frac{1}{\sqrt{3}}\left(y - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2\frac{1}{\sqrt{3}}\left(z - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= 0 \\ \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(y - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(z - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= 0 \\ z &= \frac{3}{\sqrt{3}} - x - y \\ z &= \sqrt{3} - x - y. \end{aligned}$$

Pisteen (x_0, y_0, z_0) tangenttitason vastainen **normaalisuora** on yksinkertaisesti gradientti $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$. Tämä ei ole yllättävää, sillä pisteen (x_0, y_0, z_0) läheisyydessä funktion $f(x, y, z)$ arvo tangenttitasolla on kutakuinkin k eli vakio, kun taas gradientti kertoo mihin suuntaan funktio kasvaa nopeinten. Funktio siis kasvaa nopeinten gradienttinsa suuntaan eli kohtisuoraan pois päin tangenttitasostaan.

Täten yllä olevassa esimerkissä pisteeseen $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ piirretty normaalisuora on vektorin $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = (2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$ suuntainen.

Esimerkki 30.2. Ratkaistaan yhtälön $xyz = 2$ määrittämän tasa-arvopinnan tangenttitaso ja normaalisuora pisteessä $(1, 1, 2)$. Tangenttitaso saadaan yhtälöstä

$$y_0 z_0 (x - x_0) + x_0 z_0 (y - y_0) + x_0 y_0 (z - z_0) = 0.$$

Kun tähän sijoitetaan $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 2)$, saadaan

$$\begin{aligned} y_0 z_0 (x - x_0) + x_0 z_0 (y - y_0) + x_0 y_0 (z - z_0) &= 0 \\ 2(x - 1) + 2(y - 1) + (z - 1) &= 0 \\ z &= 5 - 2x - 2y. \end{aligned}$$

Normaalisuora on puolestaan gradientin $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = (2, 2, 1)$ suuntainen.

31 Hessen matriisi

Tarkastellaan n:n muuttujan funktiota $f(x_1, \ldots, x_n)$. Merkitään tämän funktion derivaattaa muuttujan x_i suhteen f_i. Tällöin siis esimerkiksi $f_1 = \partial f(x_1, \ldots, x_n)/\partial x_1$. Huomataan, että myös näitä osittaisderivaattoja voi derivoida edelleen, eli osittaisderivaatasta voi itsestään ottaa osittaisderivaatan. Täten esimerkiksi

$$f_{12} = \frac{\partial^2 f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Täten jos meillä on esimerkiksi funktio $f(x, y) = x^2 y$, niin $f_1 = 2xy$ ja $f_{12} = 2x$ ja $f_{11} = 2y$. Nyt näistä toisista osittaisderivaatoista voi muodostaa Hessen matriisin, joka on kahden muuttujan funktion $f(x, y)$ tapauksessa yhtä kuin

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}.$$

Toisin sanottuna Hessen matriisi sisältää ainoastaan funktion toisen derivaatat tietyssä järjestyksessä.

Esimerkki 31.1. Funktion $f(x, y) = e^x y + y^2$ Hessen matriisi on yhtä kuin

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^x y & e^x \\ e^x & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tässä huomataan, että $f_{12} = f_{21}$ eli ristikkäisderivaatat ovat samoja. Tämä tulos itse asiassa pätee aina, kun osittaisderivaatat ovat jatkuvia.

Hessen matriisilla ja erityisesti sen determinantilla on suurta käyttöä useamman muuttujan funktioita optimoitaessa. Hessen matriisin determinantti on yhtä kuin $f_{11}f_{22} - f_{12}^2$, joten edellisessä tehtävässä tämä determinantti saa arvon $2e^x y - (e^x)^2 = 2e^x y - e^{2x}$.

32 Kokonaisdifferentiaali

Palautetaan mieliin, että yhden muuttujan funktion tapauksessa **differentioituvuus** tarkoitti sitä, että funktion $f(x)$ muutosta $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)$ voitiin approksimoida "hyvin" pisteen x_0 läheisyydessä luvulla $f'(x_0)\mathrm{d}x$. Tässä $\mathrm{d}x$ on argumentin x "pieni" muutos ja differentioituvuus tarkoittaa siis sitä, että funktion muutos $f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)$ on kutakuinkin funktion derivaatta tässä pisteessä x_0 kerrottuna muutoksella $\mathrm{d}x$.

Usean muuttujan funktion tapauksessa differentioituvuuden määritelmä on vastaava. Tarkastellaan tässä kahden muuttujan funktiota $f(x, y)$, jonka argumentti (x, y) muuttuu pisteestä (x_0, y_0) pisteeseen $(x_0 + \mathrm{d}x, y_0 + \mathrm{d}y)$. Tällöin tämän funktion muutos on yhtä kuin

$$f(x_0 + \mathrm{d}x, y_0 + \mathrm{d}y) - f(x_0, y_0).$$

Mikäli tämä funktio on differentioituva, tätä muutosta voidaan approksimoida funktion f osittaisderivaattojen avulla seuraavasti:

$$f(x_0 + \mathrm{d}x, y_0 + \mathrm{d}y) - f(x_0, y_0) \approx \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Tämä on funktion $f(x, y)$ **kokonaisdifferentiaali**. Se siis approksimoi funktio f muutosta, kun siirrytään pisteestä (x_0, y_0) pisteeseen $(x_0 + \mathrm{d}x, y_0 + \mathrm{d}y)$.

Esimerkki 32.1. Funktion $f(x, y) = x^2 y + y^2 x$ kokonaisdifferentiaali on

$$(2xy + y^2)\mathrm{d}x + (x^2 + 2yx)\mathrm{d}y.$$

Täten tämän funktion kokonaisdifferentiaali esimerkiksi pisteessä $(1, 5)$ on yhtä kuin $27\mathrm{d}x + 21\mathrm{d}y$. Täten jos liikumme pisteestä $(1, 5)$ pienen matkan siten, että x muuttuu arvoon $x + dx$ ja y muuttuu arvoon $y + \mathrm{d}y$, niin funktion f muutos on kutakuinkin $27\mathrm{d}x + 21\mathrm{d}y$. Esimerkiksi jos sekä x että y kasvavat kymmenesosan, niin tämä funktio kasvaa kutakuinkin määrän $27\mathrm{d}x + 21\mathrm{d}y = 2,7 + 2,1 = 4,8$.

Esimerkki 32.2. Kokonaisdifferentiaalilla on runsaasti sovelluksia kansantaloustieteessä. Jos meillä on tarkasteltavana esimerkiksi rahan kysyntäfunktio $L(i, Y)$, niin tämän funktion muutosta approksimoi sen kokonaisdifferentiaali

$$dL(i,Y) = \frac{\partial L(i,Y)}{\partial i} di + \frac{\partial L(i,Y)}{\partial Y} dY$$

eli rahan kysynnän muutos on kutakuinkin rahan kysynnän derivaatta koron i suhteen eli $\partial L(i,Y)/\partial i$ kerrottuna koron muutoksella di plus rahan kysynnän muutos tulojen Y suhteen $\partial L(i,Y)/\partial Y$ kerrottuna tulojen Y muutoksella dY.

Tästä voidaan johtaa myös LM-käyrän kulmakerroin: rahamarkkinat ovat tasapainossa, kun

$$L(i,Y) = M/P.$$

Nyt kun M/P on vakio, niin yllä olevasta tasapainoehdosta voidaan ottaa kummaltakin puolelta kokonaisderivaatta:

$$\begin{aligned} dL(i,Y) &= d(M/P) \\ \frac{\partial L(i,Y)}{\partial i} di + \frac{\partial L(i,Y)}{\partial Y} dY &= 0, \end{aligned}$$

jossa $d(M/P) = 0$, koska M/P on vakio. Yllä olevasta yhtälöstä saadaan muokattua LM-käyrän kulmakerroin di/dY:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(i,Y)}{\partial i} di + \frac{\partial L(i,Y)}{\partial Y} dY &= 0 \\ \frac{\partial L(i,Y)}{\partial i} di &= -\frac{\partial L(i,Y)}{\partial Y} dY \\ \frac{di}{dY} &= -\left(\frac{\partial L(i,Y)/\partial Y}{\partial L(i,Y)/\partial i}\right). \end{aligned}$$

Esimerkki 32.3. Toinen kokonaisdifferentiaalin sovellus on, että sillä saadaan laskettua indifferenssikäyrän kulmakerroin. Indifferenssikäyrä on hyötyfunktion samanarvonkäyrä. Jos hyötyfunktio on $U(x_1, x_2)$, niin indifferenssikäyrä on muotoa

$$U(x_1, x_2) = k.$$

Huomataan aluksi, että indifferenssikäyrä on määritelty (x_1, x_2)-avaruudessa. Indifferenssinkäyrän kulmakerroin on siis kulmakerroin $\partial x_2/\partial x_1$. Otetaan nyt kokonaisdifferentiaali yllä olevan yhtälön kummaltakin puolelta:

$$
\begin{aligned}
dU(x_1, x_2) &= dk \\
\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 &= 0 \\
\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 &= -\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 \\
\frac{dx_2}{dx_1} &= -\frac{\partial U(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial U(x_1, x_2)/U(x_1, x_2)x_2}.
\end{aligned}
$$

Indifferenssikäyrän kulmakerroin on siis $-\frac{\partial U(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial U(x_1, x_2)/U(x_1, x_2)x_2}$.

33 Osittaisderivoinnin ketjusääntö

Yhden muuttujan yhdistetyn funktion $f(g(x))$ derivoinnin ketjusääntö kertoo, että tämän funktion derivaatta on $f'(g(x))g'(x)$. Täten esimerkiksi funktion $f(g(x)) = (1 + x^2)^2$ derivaatta on yhtä kuin $f'(g(x))g'(x) = 2(1 + x^2) \cdot 2x$.

Usean muuttujan ketjusääntö vastaa jossain määrin yhden muuttujan vastaavaa sääntöä. Tutkitaan jälleen kahden muuttujan funktiota $f(u, v)$, mutta oletetaan nyt, että sekä u että v ovat joiden muuttujien x, y, ja z funktioita. Tutkittavana on siis funktio

$$f(u, v) = f(u(x, y, x), v(x, y, x)).$$

Nyt haluamme laskea tämän funktion osittaisderivaatan $\partial f/\partial x$. Huomataan, että kun muuttajaa x muutetaan niin funktion f argumentit u ja v kumpikin muuttuvat. Nyt funktio f muuttuu siis kahdesta syystä: koska u muuttuu ja v muuttuu. Tarkka kaava funktion f osittaisderivaatalle x:n suhteen on seuraava:

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial x} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Tämä usean muuttujan ketjusääntö siis kertoo osittaisderivaatan $\partial f/\partial x$ olevan yhtä kuin muuttujien u ja v osittaisderivaatat x:n suhteen kerrottuna funktion f derivaatoilla u:n ja v:n suhteen.

Esimerkki 33.1. Olkoon $f(u,v) = uv^2 + e^u$ ja lisäksi $u = 2yx^2$ ja $v = x^2y^3$. Lasketaan nyt osittaisderivaatat $\partial f/\partial x$ ja $\partial f/\partial y$. Ketjusäännöllä saadaan:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(u,v)}{\partial x} &= \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= (v^2 + e^u) \cdot 4yx + 2uv \cdot 2xy^3.\end{aligned}$$

Lopulliseen vastaukseen sijoitetaan vielä u:n ja v:n tilalle $u = 2yx^2$ ja $v = x^2y^3$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(u,v)}{\partial x} &= (v^2 + e^u) \cdot 4yx + 2uv \cdot 2xy^3 \\ &= ((x^2y^3)^2 + e^{2yx^2}) \cdot 4yx + 2(2yx^2)(x^2y^3) \cdot 2xy^3 \\ &= (x^4y^6 + e^{2yx^2}) \cdot 4yx + 8yx^2x^2y^3 \cdot xy^3 \\ &= 4x^5y^7 + 4xye^{2yx^2} + 8x^5y^7.\end{aligned}$$

Sama vastaus saadaan sijoittamalla funktioon $f(u,v) = uv^2 + e^u$ arvot $u = 2yx^2$ ja $v = x^2y^3$ ja osittaisderivoimalla tämän jälkeen normaalisti.

Esimerkki 33.2. Tutkitaan jälleen taloustieteellistä esimerkkiä. Olkoon

$$Y = F(K, AL)$$

perinteinen makrotaloudellinen tuotantofunktio. Tutkitaan nyt, miten tuotanto kasvaa ajassa t. Merkitään yllä olevaan yhtälöön, että kaikki muuttujan ovat ajan t funktioita:

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)).$$

Nyt voidaan laskea tuotannon muutos ajan suhteen eli $Y'(t)$. Tämä onnistuu ketjusäännöllä

$$\begin{aligned}Y'(t) &= \frac{\partial F}{\partial K}K'(t) + \frac{\partial F}{\partial AL}\frac{d}{dt}(A(t)L(t)) \\ &= \frac{\partial F}{\partial K}K'(t) + \frac{\partial F}{\partial AL}(A'(T)L(t) + L'(t)A(t)).\end{aligned}$$

34 Implisiittinen derivointi

Tarkastellaan nyt yhtälöä

$$F(x,y) = c,$$

jossa x ja y ovat muuttujia ja c on vakio. Esimerkki tällaisesta yhtälöstä on

$$x^2y^5 + 5xy = 14.$$

Tässä yhtälössä siis vasemmalla puolella on kahden muuttujan funktio $F(x, y)$ ja oikealle puolella vakio c. Nyt haluamme selvittää, onko mahdollista että jonkin pisteen (x_0, y_0) ympäristössä tämä yhtälö voidaan ratkaista muuttujan y suhteen. Tämän yhtälön ratkaisu y:n suhteen tarkoittaa, että voimme ratkaista tämän yhtälön muotoon $y = y(x)$. Joskus tyyppiä $F(x, y) = c$ olevan funktion ratkaisu y:n suhteen on helppoa, kuten funktion

$$x^2y = 3,$$

tapauksessa: tästä voidaan ratkaista helposti $y = 3/x^2$. Yleensä tällainen suora ratkaisu y:n suhteen ei kuitenkaan ole läheskään näin helppoa: esimerkiksi yhtälö $x^2y^5 + 5xy = 14$ ei ratkea helposti muotoon $y = y(x)$. Voimme kuitenkin sanoa, että tietyn pisteen (x_0, y_0) ympäristössä yhtälö $F(x, y)$ määrittää tällaisen **implisiittifunktion** $y(x)$, mikäli seuraavat ehdot täyttyvät:

1. Funktiolla $F(x, y)$ on jatkuvat osittaisderivaatat.

2. Piste (x_0, y_0) toteuttaa yhtälön $F(x, y) = c$ eli $F(x_0, y_0) = c$.

3. $\partial F(x, y)/\partial y \neq 0$ pisteessä (x_0, y_0).

Nämä kolme kohtaa riittävät implisiittifunktion $y = y(x)$ olemassaolon perusteluun.

Esimerkki 34.1. Tarkastellaan nyt yhtälöä $x^2y^5 + 5xy = 14$ pisteen $(x_0, y_0) = (2, 1)$ ympäristössä. Ensinnä huomataan, että kun sijoitamme $x = 2$ ja $y = 1$ tähän yhtälöön, niin saamme tuloksen $14 = 14$ eli piste $(x_0, y_0) = (2, 1)$ toteuttaa tämän yhtälön.

Toiseksi $\partial F(x, y)/\partial y = 5x^2y^4 + 5x$ saa arvon 30 pisteessä $(2, 1)$. Täten $\partial F(x, y)/\partial y \neq 0$ pisteessä $(2, 1)$. Lisäksi huomataan, että funktion F osittaisderivaatat ovat jatkuvia, koska ne ovat polynomifunktioita. Täten pisteen $(2, 1)$ ympäristössä yhtälö $x^2y^5 + 5xy = 14$ määrittää implisiittifunktion $y = y(x)$.

Jos yllä luetellut kolme ehtoa ovat voimassa ja implisiittifunktio on täten olemassa eli $y = y(x)$, niin voimme luonnollisesti merkitä $F(x, y) = F(x, y(x))$. Täten yllä olevan esimerkin tapauksessa voimme merkitä

$$x^2y^5 + 5xy = 14 \quad \text{eli}$$
$$x^2[y(x)]^5 + 5xy(x) = 14.$$

Nyt tällaisen yhtälön $F(x, y(x)) = c$ voi derivoida kummaltakin puolelta x:n suhteen. Tarkastellaan yksinkertaisena esimerkkinä yhtälöä

$$x^2 + y^3 = 2,$$

joka määrittää implisiittifunktion $y = y(x)$ pisteen $(1, 1)$ ympäristössä, koska $1^2 + 1^3 = 2$ (eli $F(x_0, y_0) = c$) ja $\partial F(x, y)/\partial y = 3y^2 = 3$, kun $y = 1$. Nyt voimme määrittää myös tämän implisiittifunktion $y(x)$ derivaatan $y'(x)$. Merkitään aluksi yhtälö $x^2 + y^3 = 2$ muodossa $x^2 + [y(x)]^3 = 2$. Nyt tämän voi derivoida kummaltakin puolelta muuttujan x suhteen. Ensinnä huomataan, että oikea puoli on vakio, joten sen derivaatta x:n suhteen on 0. Toisaalta vasenta puolta derivoitaessa on huomattava, että funktion $[y(x)]^3$ derivaatta x:n suhteen saadaan ketjusäännöllä:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x^2 + [y(x)]^3\right) &= \frac{d}{dx}(2) \\
2x + 3[y(x)]^2 y'(x) &= 0 \\
y'(x) &= -\frac{2x}{3[y(x)]^2} \\
&= -\frac{2}{3}, \quad \text{kun } (x, y) = (1, 1).
\end{aligned}$$

Tähän mennessä olemme siis näyttäneet, miten on mahdollista osoittaa että yhtälö $F(x, y)$ määrittää implisiittifunktion $y(x)$ ja kuinka tämän implisiittifunktion derivaatan $y'(x)$ voi laskea. Otetaan seuraavaksi hieman vaikeampi esimerkki implisiittifunktion derivaatan laskemisesta.

Esimerkki 34.2. Tarkastellaan jälleen yhtälöä $x^2y^5 + 5xy = 14$. Lasketaan tästä yhtälöstä saatavan implisiittifunktion $y(x)$ derivaatta pisteessä $(2, 1)$. Merkitään tätä yhtälöä ensinnä

$$x^2[y(x)]^5 + 5xy(x) = 14$$

Tämän derivointi x:n suhteen ei ole enää niin yksinkertaista kuin aiemmin, sillä esimerkiksi termi $x^2[y(x)]^5$ on funktioiden x^2 ja $[y(x)]^5$ *tulo*, joten se pitää derivoida tulosäännöllä. Palautetaan mieliin, että derivoinnin tulosääntö kertoo, että

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x).$$

Derivoidaan tätä sääntöä käyttäen aluksi pelkästään termi $x^2[y(x)]^5$:

$$\frac{d}{dx}(x^2[y(x)]^5) = \underbrace{2x[y(x)]^5}_{=f'(x)g(x)} + \underbrace{5[y(x)]^4 y'(x)x^2}_{=g'(x)f(x)}.$$

Vastaavalla tekniikalla saadaan ratkaistua termin $5xy(x)$ derivaatta:

$$\frac{d}{dx}(5xy(x)) = 5y(x) + y'(x)5x.$$

Näiden kahden derivoinnin jälkeen voimme derivoida kummaltakin puolelta koko lausekkeen $x^2[y(x)]^5 + 5xy(x) = 14$ ja ratkaista tästä termin $y'(x)$:

$$\begin{aligned}
2x[y(x)]^5 + 5[y(x)]^4 y'(x)x^2 + 5y(x) + y'(x)5x &= 0 \\
y'(x)(5[y(x)]^4x^2 + 5x) &= -2x[y(x)]^5 - 5y(x) \\
y'(x) &= -\left(\frac{2x[y(x)]^5 + 5y(x)}{5[y(x)]^4x^2 + 5x}\right) \\
&= -\left(\frac{2 \cdot 2 + 5}{5 \cdot 4 + 5 \cdot 2}\right) \\
&= -\left(\frac{9}{30}\right) = -3/10.
\end{aligned}$$

Yllä oleva tulos saadaan myös helpommin seuraavan lauseen avulla:

Lause 34.1. Jos yhtälö $F(x,y) = c$ määrittää implisiittifunktion $y(x)$ tietyssä pisteessä, niin tämän funktio derivaatta $y'(x)$ saadaan kaavasta

$$y'(x) = -\frac{\partial F(x,y)/\partial x}{\partial F(x,y)/\partial y}.$$

Voit tarkistaa, että vaikkapa esimerkin 34.2 tulos noudattaa tätä kaavaa.

Nyt siis tiedämme, että yhtälö $x^2[y(x)]^5 + 5xy(x) = 14$ määrittää pisteessä $(2,1)$ implisiittifunktio $y(x)$, jonka derivaatta tässä pisteessä on $-3/10$. Näiden kahden tiedon perusteella voimme muodostaa tälle implisiittifunktiolle $y(x)$ tangenttisuoran yhtälön. Palautetaan mieliin, että funktion $y(x)$ pisteeseen (x_0, y_0) piirretyn tangenttisuoran yhtälö on

$$y - y_0 = y'(x)(x - x_0).$$

Täten funktion $y(x)$ pisteeseen $(2,1)$ muodostetun tangenttisuoran yhtälö on

$$y - 1 = -\frac{3}{10}(x-2) \quad \iff \quad y = -\frac{3}{10}x + \frac{8}{5}.$$

Tässä siis huomataan, että vaikka emme muodostaneet yhtälön $x^2[y(x)]^5 + 5xy(x) = 14$ määrittämän implisiittifunktion $y(x)$ lauseketta, pystyimme muodostamaan tämän lausekkeen tangenttisuoran yhtälön pisteeseen

$(2, 1)$.

Tarkastellaan seuraavaksi kolmen muuttujan yhtälöstä $F(x, y, z) = c$ saatavaa implisiittifunktiota, jossa muuttuja z ratkaistaan muuttujien x ja y suhteen. Tällainen implisiittifunktio $z(x, y)$ on olemassa pisteen (x_0, y_0, z_0) ympäristössä, mikäli tämä piste toteuttaa annetun yhtälön eli $F(x_0, y_0, z_0) = c$ ja mikäli $\partial F(x, y, z)/\partial z \neq 0$ pisteessä (x_0, y_0, z_0).

Nyt saatua implisiittifunktio $z(x, y)$ voi osittaisderivoida muuttujien x ja y suhteen. Nämä derivaatat saadaan helposti seuraavista kaavoista[7]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} &= -\frac{\partial F(x,y,z)/\partial x}{\partial F(x,y,z)/\partial z}\\ \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} &= -\frac{\partial F(x,y,z)/\partial y}{\partial F(x,y,z)/\partial z}.\end{aligned}$$

Esimerkki 34.3. Yhtälö $x^2y + y^2z + z^2x = 3$ määrittää implisiittifunktion $z(x, y)$ pisteen $(1, 1, 1)$ ympäristössä, sillä tämä piste toteuttaa kyseisen yhtälön ja tämän yhtälön vasemman puolen derivaatta muuttujan z suhteen on $y^2 + 2zx$, joka saa arvon $3 \neq 0$ pisteessä $(1, 1, 1)$. Yllä esitellyllä kaavalla voimme nyt laskea tämän implisiittifunktion osittaisderivaatat:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} &= -\frac{\partial F(x,y,z)/\partial x}{\partial F(x,y,z)/\partial z}\\ &= -\frac{2xy+z^2}{y^2+2zx} = -\frac{3}{3} = -1\\ \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} &= -\frac{\partial F(x,y,z)/\partial y}{\partial F(x,y,z)/\partial z}\\ &= -\frac{x^2+2yz}{y^2+2zx} = -\frac{3}{3} = -1.\end{aligned}$$

[7] Joskus näitä derivaattoja merkitään seuraavasti:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} &= D_1 z(x,y)\\ \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} &= D_2 z(x,y).\end{aligned}$$

35 Neliömuodot

Tarkastellaan nyt funktiota $Q(x,y) = x^2 + 4xy + y^2$. Tämä on kahden muuttujan funktio, joka on esimerkki **neliömuodosta**. Tällainen kahden muuttujan neliömuoto on funktio $Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Kolmen muuttujan neliömuoto on puolestaan funktio $Q(x,y,z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz$. Tällainen kolmen muuttujan neliömuoto siis sisältää kaikki muuttujien x, y ja z sellaiset tulot, joissa on kaksi termiä. Vastaavasti kahden muuttujan neliömuoto sisältää kaikki muuttujien x ja y ja sellaiset tulot, joissa on kaksi termiä. Huomataan siis, että neliömuodossa on korkeintaan toisen potenssin termejä, eikä siinä ole vakiotermejä.

Neliömuoto $Q(x,y) = x^2 + 4xy + y^2$ voidaan esittää seuraavanlaisessa matriisimuodossa

$$x^2 + 4xy + y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Tämä nähdään kertomalla yllä oleva matriisi auki[8]:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \cdot x + 2 \cdot y \\ 2 \cdot x + 1 \cdot y \end{bmatrix} \\ &= x(1 \cdot x + 2 \cdot y) + y(2 \cdot x + 1 \cdot y) \\ &= x^2 + 2xy + 2yx + y^2 \\ &= x^2 + 4xy + y^2. \end{aligned}$$

Tämä matriisiesitys on siis yksi tapa esittää neliömuoto $Q(x,y)$. Tämän matriisiesityksen hyöty paljastuu hieman myöhemmin, mutta nyt tarkastellaan kuinka mikä tahansa kahden muuttujan neliömuoto voidaan esittää tällaisessa matriisimuodossa.

Ensinnä huomataan, että kahden muuttujan neliömuoto $Q(x,y)$ on aina muotoa $ax^2 + bxy + cy^2$. Nyt haluamme esittää tämän matriisimuodossa eli muodossa

$$ax^2 + bxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

[8]Tämän ymmärtämiseksi pitää osata kertoa matriiseja. Matriisien $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ tulon $\boldsymbol{AB}$ ij:s alkio on matriisin $\boldsymbol{A}$ i:nnen rivin ja matriisin $\boldsymbol{B}$ j:nnen sarakkeen pistetulo.

Jotta tämä matriisiesitys olisi uniikki, vaadimme lisäksi että $a_{12} = a_{21}$, jolloin voimme merkitä

$$ax^2 + bxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Nyt voimme kertoa tämän yhtälön oikean puolen auki, jolloin saamme seuraavat tulokset:

$$\begin{aligned} a_{11} &= a \\ a_{12} &= b/2 \\ a_{22} &= c \end{aligned}$$

Toisin sanottuna neliömuodon $Q(x,y) = ax^2 + bxy + xy^2$ matriisiesitys on seuraava:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Esimerkki 35.1. Neliömuodon $Q(x,y) = 10x^2 - 5xy + 3y^2$ matriisiesitys on

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & -5/2 \\ -5/2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Esimerkki 35.2. Neliömuodon $Q(x,y) = x^2 + y^2$ matriisiesitys on

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Vastaavasti kolmen muuttujan neliömuoto

$$Q(x,y,z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz$$

voidaan esittää matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_4/2 & a_5/2 \\ a_4/2 & a_2 & a_6/2 \\ a_5/2 & a_6/2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Tämäkin tulos voidaan osoittaa kertomalla matriisi auki. Huomaa erityisesti, että yllä oleva matriisi on symmetrinen ja että sen päädiagonaalilta löytyvät termien x^2, y^2 ja z^2 kertoimet.

Esimerkki 35.3. Kolmen muuttujan neliömuoto

$$Q(x,y,z) = 10x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz$$

voidaan esittää matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

36 Neliömuotojen definiittisyys

Nyt kun osaamme esittää neliömuodon matriisien tulona, voimme alkaa tarkastella näiden neliömuotojen ominaisuuksia. Merkitään aluksi neliömuotoa $Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

jossa $\boldsymbol{A}$ on matriisi $\begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$.

Lisäksi huomataan, että neliömuoto saa aina arvon 0, kun $(x,y) = 0$ eli $Q(0,0) = a0^2 + b0 \cdot 0 + c0^2 = 0$. Nyt voimme määritellä neliömuodon **definiittisyyden**. Neliömuoto $Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ on **positiivisesti definiitti**, jos $Q(x,y) > 0$ aina kun $(x,y) \neq 0$. Tällöin merkitsemme $\boldsymbol{A} > 0$. Neliömuoto on siis positiivisesti definiitti, mikäli se saa aina positiivisia arvoja, kun $(x,y) \neq 0$. Täten esimerkiksi neliömuoto $x^2 + y^2$ on positiivisesti definiitti. Koska tämän neliömuodon matriisiesitys on

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

niin voimme merkitä $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} > 0$, mikä tarkoittaa että *matriisi* $\boldsymbol{A}$ *on positiivisesti definiitti.* On siis yhtäpitävää, että neliömuoto Q ja sitä vastaava matriisi $\boldsymbol{A}$ ovat positiivisesti definiittejä.

Neliömuoto on puolestaan **negatiivisesti definiitti**, jos $Q(x,y) < 0$ aina kun $(x,y) \neq (0,0)$. Negatiivisesti definiitti neliömuoto siis saa nimensä mukaisesta aina negatiivisia arvoja (kun $(x,y) \neq 0$). Esimerkiksi neliömuoto $-x^2 - 2y^2$ on negatiivisesti definiitti. Täten voimme merkitä $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} < 0$.

Neliömuoto on **positiivisesti semidefiniitti**, mikäli $Q(x,y) \geq 0$ pätee kaikilla lukupareilla (x,y). Tällöin merkitään $\boldsymbol{A} \geq 0$. Esimerkiksi neliömuoto $Q(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 \geq 0$ on positiivisesti semidefiniitti. Se ei kuitenkaan ole positiivisesti definiitti (se on ainoastaan *semi*definiitti), koska esimerkiksi $Q(1,-1) = 0$, vaikka $(1,-1) \neq (0,0)$. Koska tämän neliömuodon matriisiesitys on

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

niin voimme merkitä $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \geq 0$. Huomaa, että positiivisesti definiitti neliömuoto on yllä olevan määritelmän nojalla aina myös positiivisesti semidefiniitti.

Neliömuoto on puolestaan **negatiivisesti semidefiniitti**, mikäli $Q(x,y) \leq 0$ pätee kaikilla lukupareilla (x,y). Tällöin merkitään $\boldsymbol{A} \leq 0$. Esimerkiksi $Q(x,y) = -x^2 - 2xy - y^2 = -(x+y)^2 \leq 0$ on negatiivisesti semidefiniitti. Täten

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \leq 0.$$

Jos neliömuoto ei ole positiivisesti eikä negatiivisesti definiitti tai semidefiniitti, niin se on **indefiniittti**. Täten esimerkiksi neliömuoto

$$Q(x,y) = xy = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

on indefiniitti. Tämä nähdään esimerkiksi siitä, että $Q(1,1) = 1 > 0$, mutta $Q(-1,1) = -1 < 0$. Neliömuoto on siis indefiniitti, mikäli se saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja.

Jos neliömuoto $Q(x,y)$ on positiivisesti definiitti eli $Q(x,y) > 0$, niin kertomalla tämä epäyhtälö puolittain -1:llä saadaan, että $-Q(x,y) < 0$ eli *jos $Q(x,y)$ on positiivisesti definiitti, niin $-Q(x,y)$ on negatiivisesti definiitti*. Samalla tavalla nähdään, että jos $Q(x,y)$ on positiivisesti semidefiniitti niin $-Q(x,y)$ on negatiivisesti semidefiniitti.

Kolmen muuttujan neliömuodon definiittisyys määritellään täsmälleen vastaavalla tavalla. Esimerkiksi $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ on positiivisesti definiitti eli

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} > 0.$$

Hyödyllinen tapa tarkistaa onko neliömuoto Q (tai yhtäpitävästi sitä vastaava matriisi $\boldsymbol{A}$) positiivisesti definiitti esitetään seuraavassa tuloksessa. Neliömuoto $Q(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ on positiivisesti definiitti, jos ja vain jos

$$a_{11} > 0 \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0.$$

Esimerkki 36.1. Tarkastellaan neliömuotoa $Q(x,y) = x^2 + xy + y^2$. Tämän matriisiesitys on

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Täten selvästi $a_{11} = 1 > 0$. Vastaavasti:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1/4 = 3/4 > 0,$$

joten neliömuoto $Q(x,y) = x^2 + xy + y^2$ on positiivisesti definiitti. Yhtäpitävästi voidaan sanoa, että matriisi $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ on positiivisesti definiitti.

Kolmen muuttujan neliömuoto

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

on puolestaan positiivisesti definiitti, mikäli pätee

$$a_{11} > 0 \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} > 0.$$

Esimerkki 36.2. Tarkastellaan kolmen muuttujan neliömuotoa $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz$. Tämän matriisiesitys on

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Tälle matriisille pätee selvästi $a_{11} > 0$. Lisäksi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1/4 = 3/4 > 0.$$

Kolmas neliömuodon definiittisyyden tarkistamiseen vaadittava determinantti on puolestaan

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{vmatrix} &= 1\begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} - 1/2\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} + 1/2\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{vmatrix} \\ &= 3/4 - 1/8 - 1/8 \\ &= 3/4 - 1/4 \\ &= 1/2 > 0. \end{aligned}$$

Täten kaikki yllä lasketut determinantin on positiivisia, joten neliömuoto $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz$ on positiivisesti definiitti eli $Q(x,y,z) > 0$ aina kun $(x,y,z) \neq 0$.

Neliömuoto $Q(x,y,z)$ on vastaavasti negatiivisesti definiitti, mikäli pätee

$$a_{11} < 0 \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} < 0,$$

eli mikäli yllä olevien determinanttien etumerkki vuorottelee.

37 Konveksius ja konkaavius

Muutetaan tässä vaiheessa hieman notaatiota. Aiemmin x ja y olivat reaalilukuja, nyt lihavoiduilla kirjaimilla merkitään vektoreja: $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ja $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Nyt siis $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ ovat vektoreja.

Tarkastellaan alla yksinkertaisuuden vuoksi vektoreja, joissa on kaksi komponenttia: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ ja $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$. Kaikki alla esiteltävät määritelmät yleistyvät helposti useampiulotteisiin vektoreihin.

Vektoreista $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ ja $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ voidaan muodostaa näiden kombinaatio $t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y} = (tx_1 + (1-t)y_1, tx_2 + (1-t)y_2)$, jossa $0 \leq t \leq 1$. Tämä on siis vektorien $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ painotettu keskiarvo. Jos esimerkiksi $t = 2/3$, niin tällainen kombinaatio saa arvon

$$\frac{2}{3}\boldsymbol{x} + \frac{1}{3}\boldsymbol{y} = \left(\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}y_1, \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}y_2\right).$$

Näiden kombinaatioiden avulla on mahdollista määrittää funktion f konkaavius ja konveksisuus. Funktio f on **konveksi**, jos pätee

$$f(t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y}) \leq tf(\boldsymbol{x}) + (1-t)f(\boldsymbol{y}) \quad \text{eli}$$
$$f(tx_1 + (1-t)y_1, tx_2 + (1-t)y_2) \leq tf(x_1, x_2) + (1-t)f(y_1, y_2). \tag{37.4}$$

Konveksius tarkoittaa siis, että funktion f arvo vektorien $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ "välissä" eli pisteessä $t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y}$ on pienempi tai yhtä suuri kuin arvojen $f(\boldsymbol{x})$ ja $f(\boldsymbol{y})$ painotettu keskiarvo $tf(\boldsymbol{x}) + (1-t)f(\boldsymbol{y})$. Graafisesti konveksius tarkoittaa sitä, että funktio f on tangenttitasonsa yläpuolella.

Funktio f on puolestaan **konkaavi**, mikäli pätee

$$f(t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{y}) \geq tf(\boldsymbol{x})+(1-t)f(\boldsymbol{y}) \tag{37.5}$$

eli mikä funktion f arvo pisteiden f arvo vektorien $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ välissä on suurempi tai yhtä suuri kuin arvojen $f(\boldsymbol{x})$ ja $f(\boldsymbol{y})$ painotettu keskiarvo.

Jos yhtälöissä (37.4) ja (37.5) epäyhtälömerkit $'' \leq''$ ja $'' \geq''$ korvataan tiukoilla epäyhtälöillä $'' <''$ ja $'' >''$ niin saadaan tiukan konveksisuuden ja tiukan konkaaviuden määritelmät.

Esimerkki 37.1. Osoitetaan suoraan määritelmän avulla, että yhden muuttujan itseisarvofunktio $f(x) = |x|$ on konveksi. Kirjoitetaan aluksi, mitä konveksius tarkoittaisi tämän funktion kohdalla: jos x ja y ovat reaalilukuja, niin se tarkoittaa että

$$\begin{aligned} f(tx+(1-t)y) &\leq tf(x)+(1-t)f(y) \quad \text{eli} \\ |tx+(1-t)y| &\leq t|x|+(1-t)|y| \end{aligned}$$

Tämän yllä olevan epäyhtälön voi itse asiassa osoittaa todeksi hyödyntämällä syksyn kurssilla käsiteltyä **kolmioepäyhtälöä**[9]

$$|a+b| \leq |a|+|b|.$$

Nyt kun tätä kolmioepäyhtälöä soveltaa lukuihin $a = tx$ ja $b = (1-t)y$, niin saadaan

$$|tx+(1-t)y| \leq |tx|+|(1-t)y| = t|x|+(1-t)|y|,$$

mikä on juurikin haluttu tulos. Täten $|x|$ on konveksi funktio.

Käytännössä konveksisuus/konkaavius on usein helpointa osoittaa Hessen matriisin definiittisyyden avulla. Palautetaan mieliin, että kahden muuttujan funktion $f(x_1, x_2)$ tapauksessa Hessen matriisi $H(x_1, x_2)$ saadaan funktion f toisista osittaisderivaatoista:

$$H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}.$$

Hessen matriisille pätevät seuraavat tulokset:

---

[9]Kolmioepäyhtälö pätee yleisemmin normeille, eli jos $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, niin

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|.$$

1. Jos Hessen matriisi on positiivisesti semidefiniitti eli $H \geq 0$, niin funktio f on konveksi.

2. Jos Hessen matriisi on positiivisesti definiitti eli $H > 0$, niin funktio f on vahvasti konveksi.

3. Jos Hessen matriisi on negatiivisesti semidefiniitti eli $H \leq 0$, niin funktio f on konkaavi.

4. Jos Hessen matriisi on negatiivisesti definiitti eli $H < 0$, niin funktio f on vahvasti konkaavi.

Tässä tulee siis esiin matriisien definiittisyyden hyöty: funktion Hessen matriisin definiittisyyden avulla voidaan päättää onko tämä funktio konveksi vaiko konkaavi.

Esimerkki 37.2. Osoitetaan, että funktio $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ on vahvasti konveksi. Tämän funktion Hessen matriisi on

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

jolle pätee determinanttitulokset $a_{11} = 2 > 0$ ja

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Täten tämän funktion Hessen matriisi on positiivisesti definiitti ja tämä funktio on vahvasti konveksi.

Yllä olevan esimerkin funktio oli siis vahvasti konveksi koko määrittelyjoukossaan $\mathbb{R}^2$. Yleisesti ottaen jonkin funktion f Hessen matriisi voi osa positiivisesti definiitti vain tietyssä osajoukossa $A \subset \mathbb{R}^2$. Tällöin f on vahvasti konveksi tässä joukossa A.

38 Lokaalit ääriarvot

Yhden muuttujan funktion $f(x)$ **lokaali maksimi** on piste x_0, jossa $f(x)$ on suurempi kuin muualle pisteen x_0 ympäristössä, eli kun

$$f(x_0) \geq f(x).$$

Tässä määritelmässä x kuuluu välille, johon sisältyy piste x_0 eli $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, jossa $\epsilon > 0$.

Lokaali minimi määritellään vastaavalla tavalla, ainoastaan epäyhtälön suunta muuttuu. Jos funktiolla f on pisteessä x_0 joko lokaali maksimi tai lokaali minimi, niin tällöin sanotaan että funktiolla f on pisteessä x_0 **lokaali ääriarvo.** Jos funktio f on derivoituva, niin välttämätön ehto tämän funktion lokaalille ääriarvolle on, että sen derivaatta tässä pisteessä on nolla eli

$$f'(x_0) = 0.$$

Puolestaan funktion f toinen derivaatta kertoo, onko tällä funktiolla ääriarvopisteessä x_0 lokaali maksimi, lokaali minimi vaiko kumpaakaan. Jos pätee $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) < 0$, niin funktio f on tässä pisteessä x_0 aidosti konkaavi ja sillä on kyseisessä pisteessä lokaali maksimi. Jos puolestaan $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) > 0$, niin kyseisessä pisteessä funktio on aidosti konveksi ja sillä on lokaali minimi. Jos puolestaan pätee $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) = 0$, emme tiedä onko funktiolla tässä pisteessä lokaalia minimiä, lokaalia maksimia vaiko kumpaakaan.

Nyt etsimme kuitenkin useamman muuttujan funktioiden ääriarvoa. Yllä yhden muuttujan funktiolle esitellyillä ideoilla on kuitenkin selkeät vastineet usean muuttujan funktion ääriarvoja etsittäessä. Tarkastellaan aluksi yksinkertaisuuden vuoksi kahden muuttujan funktiota $f(x, y)$. Tällaisella funktiolla on lokaali maksimi pisteessä (x_0, y_0), mikäli funktio f saa tässä pisteessä suuremman (tai yhtä suuren) arvon, kuin tämän ympäristön pisteissä eli mikäli

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y),$$

kun (x, y) kuuluu pisteen (x_0, y_0) ympäristöön. Tässä määritelmässä pisteen (x_0, y_0) ympäristö on ympyrä, jolla on säde r ja jonka keskipiste on (x_0, y_0) eli voimme yhtäpitävästi sanoa, että yllä olevassa määritelmässä piste (x, y) kuuluu joukkoon[10].

$$\left\{ (x, y) : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r \right\}.$$

Täten kahden muuttujan funktiolla on pisteessä (x_0, y_0) lokaali ääriarvo, mikäli luku $f(x_0, y_0)$ on suurempi kuin mikään luku $f(x, y)$, kun (x, y)

[10] Tarkka määritelmä lokaalille maksimille on, että funktiolla $f(x, y)$ on pisteessä (x_0, y_0) lokaali ääriarvo, mikäli on olemassa piste r siten että $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$, kun

$$(x, y) \in \left\{ (x, y) : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r \right\}.$$

kuuluu pisteen (x_0, y_0) ympäristöön.

Lokaali minimi määritellään vastaavalla tavalla. Lokaali ääriarvo tarkoittaa edelleen joko lokaalia maksimia tai lokaalia minimiä. Jos funktio $f(x, y)$ on differentioituva, niin välttämätön ehto lokaalille ääriarvolle on, että sen osittaisderivaatat ovat pisteessä (x_0, y_0) nollia eli

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Nämä ehdot eivät kuitenkaan takaa, että funktiolla f olisi tässä pisteessä (x_0, y_0) lokaalia ääriarvoa. Tämän ratkaisemiseksi tarvitaan **toisen asteen ehtoja.** Yhden muuttujan funktiolle toisen asteen ehto maksimille pisteessä x_0 oli se, että tämä funktio f on kyseisessä pisteessä aidosti konkaavi eli että $f''(x_0) < 0$. Myös kahden muuttujan funktiolle pätee itse asiassa täsmälleen sama konveksisuusehto: funktio $f(x, y)$ saavuttaa pisteessä (x_0, y_0) lokaalin maksimin, mikäli pätee

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \\
&\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0 \quad \text{ja} \\
&f(x, y) \text{ on pisteessä } (x_0, y_0) \text{ aidosti konkaavi.}
\end{aligned}$$

Täten voimme sanoa, että funktio $f(x, y)$ saavuttaa pisteessä (x_0, y_0) lokaalin maksimin mikäli yllä olevat kolme ehtoa toteutuvat. Derivaattojen nollakohdat on yleensä helppo ratkaista. Funktion f aito konkaavius puolestaan ratkeaa tämän funktion Hessen matriisin definiittisyydestä. Jos

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix}$$

on negatiivisesti definiitti pisteessä (x_0, y_0), niin funktio f on aidosti konkaavi tässä pisteessä. Täten yllä esitetty ehto lokaalille maksimille saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \\
&\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0 \quad \text{ja} \\
&H(x, y) < 0 \quad \text{pisteessä } (x_0, y_0).
\end{aligned}$$

Lisäksi viime viikolta muistetaan, että Hessen matriisi on negatiivisesti definiitti silloin, kun pätee

$$f_{11} < 0 \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix} = f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0.$$

Täten saadaan muodostettua laskemisen kannalta kaikkein hyödyllisimmät ehdot kahden muuttujan funktion maksimille pisteessä (x_0, y_0):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0 \quad \text{ja} \\ &f_{11} < 0 \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix} > 0. \end{aligned}$$

Vastaavasti funktio $f(x, y)$ saavuttaa pisteessä (x_0, y_0) lokaalin minimin, mikäli pätee $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$ ja f on pisteessä (x_0, y_0) aidosti konveksi. Lisäksi muistetaan, että f on aidosti konveksi, mikäli sen Hessen matriisi on positiivisesti definiitti eli

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix} > 0$$

pisteessä (x_0, y_0). Tämä Hessen matriisi on pisteessä (x_0, y_0) positiivisesti definiitti mikäli pätee

$$f_{11} > 0 \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix} = f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$$

pisteessä (x_0, y_0). Täten riittävä ehto differentioituvan funktion $f(x, y)$ lokaalille minimille pisteessä (x_0, y_0) on

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0 \quad \text{ja} \\ &f_{11} > 0 \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix} > 0. \end{aligned}$$

Täten verrattuna lokaaliin maksimiin lokaalin minimin toisen asteen ehdon erottaa ainoastaan toisen derivaatan f_{11} etumerkki[11].

[11] Itse asiassa koska $f_{11} > 0$ ja $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0 \iff f_{11}f_{22} > f_{12}^2 > 0$, niin tästä seuraa myös, että $f_{22} > 0$. Vastaavasti maksimin saavuttavalla funktiolla pätee $f_{11} < 0$ ja $f_{22} < 0$.

Esimerkki 38.1. Etsitään funktion $x^2 + y^2 - xy$ lokaalit ääriarvopisteet. Ensimmäisen asteen ehdot ovat

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= 2x - y = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2x = y \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 2y - x = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2y = x. \end{aligned}$$

Näistä seuraa, että ainoa mahdollinen lokaali ääriarvokohta on piste jossa yllä olevat ehdot toteutuvat eli piste $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Tämän ääriarvopisteen laatu nähdään toisen asteen ehdoista. Tämän funktion Hessen matriisi on

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tälle pätee $f_{11} = 2 > 0$ ja $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 4 - 1 = 3 > 0$, joten piste $(0, 0)$ on tämän funktion lokaali minimi.

Esimerkki 38.2. Etsitään funktion $(x-1)^2 + (y-2)^2$ lokaalit ääriarvot. Suoraan määritelmästä nähdään, että tämän funktion globaali ja lokaali minimi on pisteessä $(1, 2)$. Osoitetaan tämä nyt myös yllä opitulla tekniikalla. Ensinnä

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5.$$

Tämän ensimmäiset osittaisderivaatat ovat

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= 2x - 2 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x = 1 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 2y - 4 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad y = 2. \end{aligned}$$

Täten piste $(1, 2)$ toteuttaa nämä ensimmäisen asteen ehdot. Hessen matriisi on puolestaan

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tälle pätee selvästi $f_{11} = 2 > 0$ ja $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 4 > 0$, joten piste $(1, 2)$ on tämän funktio lokaali (ja globaali) minimi.

On syytä huomata, että näiden kahden esimerkin funktioilla ei ole ollenkaan globaalia maksimia. Tämä johtuu siitä, että $f(x, y) \to \infty$, kun $x \to \infty$ tai $y \to \infty$ eli nämä funktiot saavat mielivaltaisen suuria arvoja.

Esitetään vielä ehdot kolmen muuttujan funktion $f(x,y,z)$ maksimille. Ensimmäisen asteen ehto on edelleen, että funktion ensimmäiset osittaisderivaatat ovat nollia. Lisäksi vaadimme, että funktio $f(x,y,z)$ on ääriarvopisteessä (x_0,y_0,y_0) aidosti konkaavi. Täten ehdot lokaalille maksimille ovat:

$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} = 0 \quad \text{ja}$$
$$f_{11} < 0 \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix} < 0.$$

Vastaavasti ehto lokaalille minimille on, että funktio $f(x,y,z)$ on ääriarvopisteessä (x_0,y_0,y_0) aidosti konveksi. Täten ehdot lokaalille minimille ovat:

$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} = 0 \quad \text{ja}$$
$$f_{11} > 0 \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix} > 0.$$

39 Ääriarvon laskeminen joukossa

Tarkastellaan kahden muuttujan funktiota $f(x,y)$. Haluamme nyt laskea tämän funktion suurimman ja pienimmän arvon, kun (x,y) kuuluu johonkin joukkoon A eli $(x,y) \in A$. Jotta funktiolla f varmasti olisi joukossa A suurin ja pienin arvo, pitää olettaa ensinnä että f on jatkuva funktio ja toisaalta että A on **kompakti joukko.**

Joukko $A \in R^n$ on kompakti, jos se on suljettu ja rajoitettu. Esimerkki kompaktista joukosta on

$$A = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}.$$

Tämä joukko on suljettu, koska se sisältää reunansa eli pisteet, joissa $x = -1, x = 1, y = -1$ tai $y = 1$. Se on rajoitettu, koska x ja y ovat aina tietyllä äärellisellä alueella. Täten se on suljettu ja rajoitettu eli kompakti[12].

Tutkitaan funktiota $f(x,y) = xy$. Tämä funktio saavuttaa sekä maksimin että minimin yllä määritellyssä joukossa $A = \{(x,y) : -1 \le x \le 1, -1 \le x \le 1\}$, koska joukko A on kompakti. Tämän funktion maksimi ja minimi joukossa A voivat löytyä kahdesta eri paikkaa:

1. Ääriarvot voivat olla joukon A sisäpisteissä. Tällaisessa ääriarvopisteessä on pädettävä, että $\partial f(x,y)/\partial x = 0$ ja $\partial f(x,y)/\partial y = 0$.

2. Ääriarvot voivat olla joukon A reunalla eli pisteissä, joissa $x = -1, x = 1, y = -1$ tai $y = 1$.

Etsitään aluksi mahdolliset ääriarvot joukon A sisäpisteissä. Ensimmäisen asteen ehdoista saamme mahdolliset lokaalit ääriarvot:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= y = 0 \\
\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= x = 0.
\end{aligned}
$$

Täten piste $(0,0)$ (joka on myös joukon A reunalla) on funktion f mahdollinen ääriarvo. Tässä pisteessä $f(0,0) = 0$. Tämä piste ei kuitenkaan ole edes lokaali ääriarvo. Tämä nähdään siitä, että jokaisessa pisteen $(0,0)$ ympäristössä funktio f saa toisaalta arvoja, jotka ovat yli nollan (esimerkiksi kun $x > 0$ ja $y > 0$) ja toisaalta arvoja, jotka ovat alle nollan (esimerkiksi kun $x > 0$ ja $y < 0$). Täten $(0,0)$ ei ainakaan ole funktion f maksimi eikä minimi joukossa A.

Koska joukko A on kompakti joukko, niin funktio f kuitenkin pakolla saavuttaa minimin ja maksimin tässä joukossa. Koska ääriarvoja ei löytynyt osittaisderivaattojen nollakohdista, on näiden ääriarvojen pakko löytyä tämän joukon reunalta. Tarkastellaan aluksi reunaa, jossa $x = 1$. Tällöin funktio saa arvon $f(1,y) = y$, joka on minimissään pisteessä $y = -1$ ja maksimissaan pisteessä $y = 1$. Vastaavasti voidaan tarkastella reunaa

[12] Topologiassa joukko A on kompakti, jos jokaisella tämän joukon avoimella peitteellä on äärellinen alipeite. Se että joukko on suljettu ja rajoitettu on yhtäpitävää kompaktiuden kanssa, kun joukko A kuuluu joukkoon $\mathbb{R}^n$. Tämä yhtäpitävyys ei kuitenkaan päde välttämättä esimerkiksi jos $A \subset \mathbb{Q}$.

$f(x,1) = x$, jolla funktio on suurimmillaan kun $x = 1$ ja pienimmillään kun $x = -1$. Reunalla $x = -1$ funktio $f(-1,y) = -y$ saavuttaa maksimin pisteessä $(-1,-1)$ ja minimin pisteessä $(-1,1)$. Vastaavasti reunalla $y = -1$ funktio $f(x,-1) = -x$ saavuttaa maksimin pisteessä $(-1,-1)$ ja minimin pisteessä $(1,-1)$.

Yllä tehdyistä reunatarkistuksista voidaan päätellä, että funktio f saavuttaa maksiminsa joukossa A, kun $(x,y) = (1,1)$ tai kun $(x,y) = (-1,-1)$ ja miniminsä kun $(x,y) = (1,-1)$ tai kun $(x,y) = (-1,1)$.

40 Rajoitetun ääriarvon laskeminen Lagrangen menetelmällä

Tähän mennessä olemme esittäneet, että jatkuvan funktion f ääriarvot kompaktissa joukossa A löytyvät tarkastelemalla ensinnä tämän joukon sisäpisteistä löytyviä mahdollisia osittaisderivaattojen nollakohtia ja toisaalta joukon A reunaa. Nyt pyrimme löytämään jonkin funktion $f(x,y)$ ääriarvon tietyllä **rajoitteella**. Tällainen rajoite voi olla vaikkapa ehto $x + y = 1$. Merkitään rajoitetta yleisesti $g(x,y) = c$, josa c on jokin vakio.

Funktion $f(x,y)$ voi usein optimoida rajoitteella $g(x,y) = c$ käyttäen **Lagrangen menetelmää**. Tämän menetelmän ideana on muodostaa Lagrangen funktio

$$\mathcal{L}(x,y;\lambda) = f(x,y) + \lambda(c - g(x,y)),$$

jota derivoimalla voidaan löytää funktion $f(x,y)$ ääriarvot ehdolla $g(x,y) = c$. Ideana on derivoida tätä funktiota aluksi x:n ja y:n suhteen ja asettaa derivaatat nolliksi, jolloin muodostuu yhtälöpari. Lopuksi tämän yhtälöparin ratkaisu pitää sijoittaa rajoitteeseen $g(x,y) = c$.

Esimerkki 40.1. Etsitään funktion $f(x,y) = xy$ ääriarvot ehdolla $x^2 + y^2 = 4$. Tässä siis rajoitefunktio on $g(x,y) = x^2 + y^2$ ja $c = 4$. Lagrangen funktio on täten

$$\mathcal{L}(x,y;\lambda) = xy + \lambda(4 - x^2 - y^2).$$

Derivoidaan tämä x:n ja y:n suhteen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,y;\lambda)}{\partial x} = y - \lambda \cdot 2x = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,y;\lambda)}{\partial y} = x - \lambda \cdot 2y = 0$$

Tästä yhtälöryhmästä saadaan ratkaistua ehto $y/2x = x/2y \iff y^2 = x^2$. Kun tämä ehto sijoitetaan rajoitteeseen $x^2 + y^2 = 4$, saadaan $x^2 = 2 \iff x = \pm 2$. Koska ääriarvopisteissä pätee $y^2 = x^2$, mahdollisia ääriarvopisteitä ovat pisteet $(x, y) = (\pm 2, \pm 2)$. Näistä pisteistä funktio $f(x, y) = xy$ saa maksimiarvonsa pisteissä $(x, y) = (2, 2)$ ja $(x, y) = (-2, -2)$. Minimiarvonsa se saavuttaa pisteissä $(x, y) = (-2, 2)$ ja $(x, y) = (2, -2)$

Esimerkki 40.2. Etsi Lagrangen menetelmällä alaltaan suurin suorakulmio, jonka ympärysmitta on a.

Ratkaisu. Tarkastellaan suorakulmiota, jonka sivut ovat pituudeltaan x ja y. Tämän suorakulmion ala on tällöin xy. Tämän suorakulmion ympärysmitta on $2x + 2y$. Täten rajoitteena on ehto $2x + 2y = a$. Lagrangen funktio on tällöin

$$\mathcal{L}(x, y; \lambda) = xy + \lambda(a - 2x - 2y).$$

Kun tämä derivoidaan x:n ja y:n suhteen, saadaan ehdot

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, y; \lambda)}{\partial x} = y - 2\lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, y; \lambda)}{\partial y} = x - 2\lambda = 0.$$

Tästä puolestaan saadaan ehto $x = y$. Kun tämä sijoitetaan rajoitteeseen, saadaan tulos $x = y = a/4$. Täten suurin suorakulmio, jonka ympärysmitta on a, on neliö jonka sivun pituus on $a/4$.

Esimerkki 40.3. Etsitään Lagrangen menetelmällä suoran $y = x + 1$ se piste, joka on lähimpänä origoa. Ensinnä pitää pohtia, että mitä funktiota tässä optimoidaan. Huomataan, että tässä etsitään pisteen (x, y) pienintä etäisyyttä origosta, kun tämä piste (x, y) toteuttaa ehdon $y = x + 1$. Palautetaan mieliin, että pisteen (x, y) etäisyys origosta on

$$\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Nyt ongelma on siis minimoida funktio $\sqrt{x^2 + y^2}$ ehdolla $y = x + 1$. Yhtäpitävästi voimme kuitenkin minimoida funktion $x^2 + y^2$ ehdolla $y = x + 1$, koska funktio $x^2 + y^2$ on funktion $\sqrt{x^2 + y^2}$ kasvava muunnos. Täten saamme Lagrangen funktion

$$\mathcal{L}(x, y; \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(y - x - 1).$$

Tämän ensimmäiset derivaatat x:n ja y:n suhteen ovat

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,y;\lambda)}{\partial x} = 2x - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,y;\lambda)}{\partial y} = 2y + \lambda = 0$$

Tästä yhtälöparista saadaan ratkaistua ehto $x = -y$. Kun tämä ehto puolestaan sijoitetaan rajoitteeseen $y = x + 1$, saadaan optimikohdaksi $(x,y) = (-1/2, 1/2)$. Jos piirrät suoran $y = x + 1$ koordinaatistoon, huomaan heti että tämä piste on se piste, jossa suoran $y = x + 1$ etäisyys origosta on pienimmillään.

41 Differentiaaliyhtälöt

Olkoon $y = f(x)$ jokin yhden muuttujan funktio. Merkitään tämän funktion ensimmäistä derivaattaa $y' = f'(x)$. Puolestaan $y'' = f''(x)$ on tämän funktion toinen derivaatta ja tämän funktion n:ttä derivaattaa merkitään $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$. **Differentiaaliyhtälö** on yhtälö, joka sisältää funktion y derivaattoja. Esimerkki tällaisesta differentiaaliyhtälöstä on

$$y' = y. \tag{41.6}$$

Tämän yhtälön voi ratkaista helposti. On jo ennestään tiedossa, että funktio $y = e^x$ toteuttaa tämän yhtälön, koska $y' = \frac{d}{dx}e^x = e^x = y$. Ratkaistaan tämä differentiaaliyhtälö kuitenkin integroimalla, sillä tällä tavalla näemme miten differentiaaliyhtälöitä usein ratkaistaan. Merkitään aluksi funktion y argumentti x näkyviin, jolloin yhtälö (41.6) saadaan muotoon

$$y'(x) = y(x).$$

Nyt tämä yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $y'(x)/y(x) = 1$ kanssa[13]. Integroidaan tämä yhtälö:

$$\begin{aligned}
\frac{y'(x)}{y(x)} &= 1 \\
\ln y(x) &= x + C \\
y(x) &= e^{x+C} \\
y(x) &= e^x e^C \\
y(x) &= C_1 e^x \quad \Big| \quad C_1 = e^C
\end{aligned}$$

[13] Tämä pätee, jos $y(x) \neq 0$. Itse asiassa $y(x) = 0$ toteuttaa myös differentiaaliyhtälön $y' = y$.

Täten differentiaaliyhtälön $y' = y$ ratkaisu $y(x) = C_1e^x$ saatiin helposti myös integroimalla.

Differentiaaliyhtälö $y' = y$ on esimerkki ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöstä. Tämä tarkoittaa, että korkein y:n derivaatta mitä tämä yhtälö sisältää on y:n ensimmäinen derivaatta y'. Vastaavasti esimerkiksi

$$ay'' + by = x^2 \quad \Big| \quad a, b \in \mathbb{R}$$

on esimerkki toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöstä.

Usein helppo tekniikka ratkaista differentiaaliyhtälö on merkitä y:n derivaattaa muodossa $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ ja kertoa differentiaaliyhtälön kumpikin puoli $\mathrm{d}x$:llä.

Esimerkki 41.1. Ratkaistaan differentiaaliyhtälö $y' = yx$:

$$\begin{aligned}
y' &= yx \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= yx \\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= x\mathrm{d}x \\
\ln y &= \frac{1}{2}x^2 + C \\
y &= e^{\frac{1}{2}x^2 + C} \\
y &= C_1 e^{\frac{1}{2}x^2} \quad \Big| \quad C_1 = e^C.
\end{aligned}$$

42 Lineaariset differentiaaliyhtälöt

Yhtälö

$$y' + x^2y = \sin x$$

on esimerkki ensimmäisen kertaluvun **lineaarisesta** differentiaaliyhtälöstä. Yleinen muoto ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälölle on

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{42.7}$$

jossa $p(x)$ ja $q(x)$ ovat x:n funktioita. Nyt tämä yhtälö pitäisi muokata muotoon, josta kumpikin puoli olisi helposti integroitavissa. Tämä muokkaus tapahtuu kertomalla yhtälön (42.7) kumpikin puoli **integroivalla**

tekijällä. Tämä integroiva tekijä on ensimmäisen kertaluvun lineaarisen differentiaaliyhtälön tapauksessa funktio

$$e^{\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

Tässä funktiota $p(x)$ integroitaessa voi jättää integrointivakion pois. Täten jos esimerkiksi $p(x) = x^2$, niin $e^{\int p(x)\mathrm{d}x} = e^{x^3/3}$.

Integroiva tekijä saadaan siis integroimalla funktio $p(x)$ ja laittamalla syntynyt funktio eksponenttifunktion potenssiin. Seuraavaksi nähdään, miksi tämä tekniikka toimii. Kerrotaan yhtälön $y' + p(x)y = q(x)$ kumpikin puoli tällä integroivalla tekijällä $e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$:

$$y' + p(x)y = q(x) \quad \Big| \quad \cdot\, e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$$

$$e^{\int p(x)\mathrm{d}x}y' + e^{\int p(x)\mathrm{d}x}p(x)y = q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}. \tag{42.8}$$

Nyt tämän yhtälön vasen puoli on itse asiassa funktion $ye^{\int p(x)\mathrm{d}x}$ derivaatta. Tämä nähdään derivoimalla tämä yhtälö $ye^{\int p(x)\mathrm{d}x}$ derivoinnin tulosäännön avulla argumentin x suhteen:

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int p(x)\mathrm{d}x}\right) = y'e^{\int p(x)\mathrm{d}x} + e^{\int p(x)\mathrm{d}x}p(x)y.$$

Tämä on nyt sama kuin yhtälön (42.8) vasen puoli. Täten tämä differentiaaliyhtälö voidaan muokata seuraavasti:

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= q(x) \quad \Big| \quad \cdot\, (e^{\int p(x)\mathrm{d}x}) \\ e^{\int p(x)\mathrm{d}x}y' + e^{\int p(x)\mathrm{d}x}p(x)y &= q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x} \\ \frac{d}{dx}\left(ye^{\int p(x)\mathrm{d}x}\right) &= q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}. \end{aligned}$$

Tämän yhtälön ratkaisu saadaan integroimalla kumpikin puoli x:n suhteen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(ye^{\int p(x)\mathrm{d}x}\right) &= q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x} \\ ye^{\int p(x)\mathrm{d}x} &= \int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x} + C \\ y &= \frac{\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x} + C}{e^{\int p(x)\mathrm{d}x}} \end{aligned}$$

Käytännössä tätä kaavaa voi käyttää suoraan ensimmäisen asteen differentiaaliyhtälöä ratkaistaessa, mutta usein yllä esitetyt välivaiheet kannattaa toistaa.

Esimerkki 42.1. Rakaistaan yllä esitellyllä tekniikalla differentiaaliyhtälö

$$y' + 2y = 1.$$

Tässä yhtälössä $p(x) = 2$, joten $e^{\int p(x)\mathrm{d}x} = e^{2x}$. Kerrotaan nyt tämän differentiaaliyhtälön kumpikin puoli tällä integroivalla tekijällä ja integroidaan syntynyt lauseke:

$$\begin{aligned}
y' + 2y &= 1 \\
y'e^{2x} + 2ye^{2x} &= e^{2x} \\
\frac{d}{dx}\left(ye^{2x}\right) &= e^{2x} \\
ye^{2x} &= \frac{1}{2}e^{2x} + C \\
y &= \frac{1}{2} + \frac{C}{e^{2x}} \\
&= \frac{1}{2} + Ce^{-2x}.
\end{aligned}$$

Tässä esimerkissä integrointivakio C säilyi mukana loppuun asti. Integrointivakiosta päästään tarvittaessa eroon määrittelemällä funktiolle $y(x)$ jokin **alkuarvo**. Jos vaikka määrittelisimme yllä olevan esimerkin differentiaaliyhtälölle alkuarvon $y(0) = 10$, voitaisiin vakio C ratkaista seuraavasti:

$$\begin{aligned}
y(0) &= 10 \\
\frac{1}{2} + Ce^{-2\cdot 0} &= 10 \\
C &= \frac{19}{2}.
\end{aligned}$$

Täten differentiaaliyhtälön $y' + 2y = 1$ ratkaisu alkuarvolla $y(0) = 10$ on

$$y = \frac{1}{2} + \frac{19}{2}e^{-2x}.$$

43 Toiseen välikokeeseen valmistavia tehtäviä

43.1 Useamman muuttujan raja-arvo ja jatkuvuus

Harjoitus 43.1. Osoita, että raja-arvoa $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} 8x^2/(x^2+y^2)$ ei ole olemassa. **Ratkaisu sivulla 138.**

Harjoitus 43.2. Osoita, että $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} y^2/(x^2+y^2) = 0$. **Ratkaisu sivulla 139.**

43.2 Suunnattu derivaatta ja tangenttitason yhtälö

Harjoitus 43.3. Laske funktion $f(x, y) = x^2 y$ suunnattu derivaatta yksikkövektorin $(3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})$ suuntaan pisteessä $(1, 2)$. **Ratkaisu sivulla 139.**

Harjoitus 43.4. Laske yhtälön $x^2 yz + x^2 = 2$ tangenttitason yhtälö pisteessä $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$. **Ratkaisu sivulla 139.**

43.3 Osittaisderivoinnin ketjusääntö

Harjoitus 43.5. Olkoon $f(u, v) = uv^2 + vu^2$, $u = xy$ ja $v = e^{xy}$. Laske osittaisderivaatat $\partial f(u, v)/\partial x$ ja $\partial f(u, v)/\partial y$ ketjusäännöllä. **Ratkaisu sivulla 140.**

43.4 Implisiittinen derivointi

Harjoitus 43.6. Laske yhtälön $x^2 y + y^3 x = 2$ implisiittisesti määrittämän funktion $y(x)$ derivaatta $y'(x)$ pisteessä $(1, 1)$. Osoita, että tämä yhtälö määrittelee implisiittifunktion $y(x)$. **Ratkaisu sivulla 141.**

43.5 Neliömuodot

Harjoitus 43.7. Osoita, että neliömuoto $x^2 - xy + y^2$ on positiivisesti definiitti. **Ratkaisu sivulla 141.**

43.6 Useamman muuttujan funktion optimointi

Harjoitus 43.8. Etsi funktion $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + y^3$ lokaalit ääriarvot. **Ratkaisu sivulla 141.**

Harjoitus 43.9. Missä pisteessä suora $y = 5x + 7$ on lähimpänä origoa? **Ratkaisu sivulla 142.**

43.7 Differentiaaliyhtälöt

Harjoitus 43.10. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' = 2yx$. **Ratkaisu sivulla 143.**

Harjoitus 43.11. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' - 2yx = e^{x^2}$. **Ratkaisu sivulla 143.**

Harjoitus 43.12. Olkoon edellisessä tehtävässä alkuarvo $y(0) = 1$. Ratkaise tämä alkuarvotehtävä. **Ratkaisu sivulla 144.**

A Ratkaisut ensimmäisen välikokeen harjoituksiin

A.1 Osittaisintegrointia

Ratkaisu harjoitukseen 24.1 sivulla 79. Valitaan aluksi funktiot $f(x)$ ja $g'(x)$ seuraavasti:

$$\begin{aligned} f(x) &= x & &\Rightarrow f'(x) = 1 \\ g'(x) &= e^{2x} & &\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}e^{2x}. \end{aligned}$$

Täten integrointi sujuu osittaisintegroinnilla seuraavasti:

$$\begin{aligned} \int xe^{2x}\mathrm{d}x &= x\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\mathrm{d}x \\ &= x\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C. \end{aligned}$$

Ratkaisu harjoitukseen 24.2 sivulla 79. Valitaan funktiot $f(x)$ ja $g'(x)$ seuraavasti:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x & &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) &= x & &\Rightarrow g(x) = \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

Nyt integrointi etenee seuraavasti:

$$\begin{aligned} \int x \ln x \mathrm{d}x &= \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x}{2}\mathrm{d}x \\ &= \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + C. \end{aligned}$$

Ratkaisu harjoitukseen 24.4 sivulla 79. Valitaan tässä funktiot $f(x)$ ja $g'(x)$ seuraavasti:

$$\begin{aligned} f(x) &= (\ln x)^2 & &\Rightarrow f'(x) = \frac{2\ln x}{x} \\ g'(x) &= 1 & &\Rightarrow g(x) = x. \end{aligned}$$

Täten voimme käyttää osittaisintegroinnin kaavaa:

$$\begin{aligned}\int (\ln x)^2 \, dx &= (\ln x)^2 \cdot x - \int \left(\frac{2\ln x}{x}\right) x dx \\ &= (\ln x)^2 \cdot x - 2 \int \ln x dx + C_1\end{aligned}$$

Integraali $\int \ln x dx$ laskettiin esimerkissä 2.3 sivulla 8. Tulos on $\int \ln x dx = x \ln x - x$. Täten yllä oleva yhtälö saadaan muotoon:

$$\begin{aligned}\int (\ln x)^2 \, dx &= (\ln x)^2 \cdot x - 2 \int \ln x dx + C_1 \\ &= (\ln x)^2 \cdot x - 2\,(x \ln x - x) + C.\end{aligned}$$

Ratkaisu harjoitukseen 24.3 sivulla 79. Tämäkin ratkeaa osittaisintegroimalla. Valitaan funktiot $f(x)$ ja $g'(x)$ seuraavasti:

$$\begin{aligned}f(x) &= e^x && \Rightarrow f'(x) = e^x \\ g'(x) &= \sin x && \Rightarrow g(x) = -\cos x.\end{aligned}$$

Nyt integrointi sujuu seuraavasti

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x dx &= -e^x \cos x - \int (-\cos x) e^x dx \\ &= -e^x \cos x + \int \cos x \cdot e^x dx\end{aligned}$$

Seuraavaksi integroidaan $\int \cos x \cdot e^x dx$ vastaavanlaisella osittaisintegroinnilla:

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x dx &= -e^x \cos x + \int \cos x \cdot e^x dx \\ &= -e^x \cos x + \left(\sin x \cdot e^x - \int \sin x e^x dx\right) \\ &= -e^x \cos x + \sin x \cdot e^x - \int \sin x e^x dx\end{aligned}$$

Yhdistetään nyt yhtälön kummallakin puolella esiintyvät termit $\int \sin x e^x$:

$$\begin{aligned}2\int e^x \sin x dx &= -e^x \cos x + \sin x \cdot e^x \\ \int e^x \sin x dx &= \frac{1}{2}\left(-e^x \cos x + \sin x \cdot e^x\right)\end{aligned}$$

Tyyppiä $\int e^{ax} \sin bx \mathrm{d}x$ tai $\int e^{ax} \cos bx \mathrm{d}x$ olevat integraalit ratkeavat aina vastaavalla tekniikalla: osittaisintegroidaan kahteen kertaa ja yhdistetään samat termit.

$$\begin{aligned}\int (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x &= (\ln x)^2 \cdot x - 2 \int \ln x \mathrm{d}x \\ &= (\ln x)^2 \cdot x - 2\,(x \ln x - x) + C\end{aligned}$$

Käyttämällä kaavaa

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = \Big|_a^b (f(x)g(x)) - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

saamme laskettua arvon $\int_1^2 (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}\int_1^2 (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x &= \Big|_1^2 \left((\ln x)^2 \cdot x\right) - \Big|_1^2 2\,(x \ln x - x) \\ &= \left((\ln 2)^2 \cdot 2 - (\ln 1)^2 \cdot 1\right) - 2\,((2 \ln 2 - 2) - 2\,(1 \ln 1 - 1)) \\ &= 2 \cdot \ln 2^2 - 2\,(2 \ln 2 - 2)\end{aligned}$$

Ratkaisu harjoitukseen 24.5 sivulla 79. Tämäkin ratkeaa osittaisintegroimalla. Valitaan funktiot $f(x)$ ja $g'(x)$ seuraavasti:

$$\begin{aligned}f(x) &= \arctan x & &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ g'(x) &= 1 & &\Rightarrow g(x) = x.\end{aligned}$$

Nyt integrointi sujuu seuraavasti

$$\begin{aligned}\int_0^2 \arctan x \mathrm{d}x &= \Big|_0^2 (x \arctan x) - \int_0^2 \left(\frac{x}{1+x^2}\right) \mathrm{d}x \\ &= (2 \arctan 2) - \Big|_0^2 \left(\frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right) \\ &= (2 \arctan 2) - \frac{1}{2} \ln(5).\end{aligned}$$

A.2 Osamurtohajotelmia

Ratkaisu harjoitukseen 24.6 sivulla 80. Kirjoitetaan aluksi osamäärä $\frac{1}{x^2-x+2}$ seuraavassa muodossa:

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)}.$$

Huomataan, että tällä on kaksi erillistä nollakohtaa. Täten tälle voi tehdä seuraavanlaisen osamurtohajotelman:

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2}.$$

Ratkaistaan tästä A_1 ja A_2:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-1)(x+2)} &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2} \\
&= \frac{A_1(x+2) + A_2(x-1)}{(x-1)(x+2)} \\
&= \frac{A_1x + 2A_1 + A_2x - A_2}{(x-1)(x+2)} \\
&= \frac{(A_1 + A_2)x + (2A_1 - A_2)}{(x-1)(x+2)}
\end{aligned}$$

Laitetaan oikean ja vasemman puolen kertoimet yhtä suuriksi: saadaan

$$\begin{aligned}
A_1 + A_2 &= 0 \\
2A_1 - A_2 &= 1
\end{aligned}$$

Mistä saadaan ratkaistua $A_1 = \frac{1}{3}$ ja $A_2 = -\frac{1}{3}$. Täten integrointi sujuu seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x-1)(x+2)} \mathrm{d}x &= \int \frac{1/3}{x-1} \mathrm{d}x - \int \frac{1/3}{x+2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+2| + C.
\end{aligned}$$

A.3 Sijoituskeino

Ratkaisu harjoitukseen 24.7 sivulla 80. Tehdään sijoitus $t = x + 1 \iff x = t - 1$. Täten $dx = dt$. Integroinnin raja $x = 1$ korvautuu rajalla $t = 2$

ja raja $x = 2$ korvautuu rajalla $t = 3$:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x\sqrt{x+1}\mathrm{d}x &= \int_2^3 (t-1)\sqrt{t}\mathrm{d}t \\
&= \int_2^3 (t^{3/2} - t^{1/2})\mathrm{d}t \\
&= \Big|_2^3 \left(\frac{2}{5}t^{5/2} - \frac{3}{2}t^{3/2}\right) \\
&= \left(\frac{2}{5}3^{5/2} - \frac{3}{2}3^{3/2}\right) - \left(\frac{2}{5}2^{5/2} - \frac{3}{2}2^{3/2}\right) \\
&= \frac{7\sqrt{2}}{5} - \frac{9\sqrt{3}}{10}.
\end{aligned}$$

Ratkaisu harjoitukseen 24.8 sivulla 80. Huomataan aluksi, että integraali voidaan esittää muodossa

$$\int_1^2 \frac{x^4}{1+(x^5)^2}\mathrm{d}x.$$

Tehdään sijoitus $t = x^5$. Tällöin $\mathrm{d}t = 5x^4\mathrm{d}x$, joten $x^4\mathrm{d}x = 1/5\mathrm{d}t$ ja integroitavan lausekkeen nimittäjä $x^4\mathrm{d}x$ voidaan esittää muodossa $1/5\mathrm{d}t$.

Lisäksi pitää muistaa muuntaa integroinnin rajat: kun $x = 1$, niin $t = 5$ ja kun $x = 2$, niin $t = 32$. Täten integrointi onnistuu seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{x^4}{1+(x^5)^2}\mathrm{d}x &= \int_1^{32} \frac{1/5\mathrm{d}t}{1+t^2} \\
&= \Big|_1^{32} \frac{1}{5}\arctan t \\
&= \frac{1}{5}\left(\arctan 32 - \arctan 1\right).
\end{aligned}$$

A.4 Tasointegraalit

Ratkaisu harjoitukseen 24.9 sivulla 81. Nyt tehtävän kolmio voidaan esittää alueena, jossa $0 \le x \le 3$ ja $\frac{1}{3}x \le y \le x$. Täten integrointi sujuu seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
\iint_A xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^3 \int_{\frac{1}{3}x}^{x} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 \Big|_{\frac{1}{3}x}^{x} \left(\frac{1}{2}xy^2\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^3 x\Big|_{\frac{1}{3}x}^{x} \left(y^2\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^3 x\left(x^2 - \left(\frac{1}{3}x\right)^2\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{8}{9}x^3\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{9}\int_0^3 x^3\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{9}\Big|_0^3 \frac{1}{4}x^4 \\
&= \frac{1}{9}\cdot 3^4 \\
&= 9.
\end{aligned}
$$

Ratkaisu harjoitukseen 24.10 sivulla 81. Kun tämän kolmion piirtää, huomaa että sen voi esittää kahtena alueena: toinen alue on $-2 \leq y \leq 0$, $-\frac{1}{2}y \leq x \leq 1$. Toinen on $0 \leq y \leq 2$, $\frac{1}{2}y \leq x \leq 1$. Lasketaan nämä kaksi integraalia erikseen:

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{0}\int_{-\frac{1}{2}y}^{1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} y\Big|_{-\frac{1}{2}y}^{1} x^2\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} y\left(1+\frac{1}{2}y\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\left(y+\frac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\Big|_{-2}^{0}\left(\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{6}y^3\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}2^2+\frac{1}{6}2^3\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2+\frac{4}{3}\right) \\
&= \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

ja jälkimmäinen integraali:

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{2}\int_{\frac{1}{2}y}^{1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{0}^{2} y\Big|_{\frac{1}{2}y}^{1} x^2\mathrm{d}y \\
&= \int_{0}^{2} y\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_{0}^{2} y\left(\frac{y}{2}\right) \\
&= 2
\end{aligned}$$

Täten

$$\iint_A xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{5}{3}+2 = \frac{11}{3}.$$

A.5 Napakoordinaatit

Ratkaisu harjoitukseen 24.11 sivulla 81. Siirrytään napakoordinaatteihin, eli tehdään muunnos $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Täten tunnetusti $x^2 + y^2 = r^2$ ja koska $x^2 + y^2 \leq 4$, niin $r^2 \leq 4$ eli $0 \leq r \leq 2$.

Ehdot $y \geq 0$ ja $x \geq 0$ puolestaan määrittävät kulman θ rajat (piirrä kuva): $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Lisäksi pitää muistaa lisätä napakoordinaattimuunnoksen

Jakobin determinantti eli r mukaan:

$$\begin{aligned}
\iint_A (1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\pi/2}\int_0^2 (r)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \Big|_0^2 \frac{1}{2}r^2 \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} 2\mathrm{d}\theta \\
&= \Big|_0^{\pi/2} 2\theta \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Ratkaisu harjoitukseen 24.12 sivulla 81. Nyt integroinnin rajat ovat $2 \leq r \leq 3$ ja $0 \leq \theta \leq \pi$. Täten integrointi sujuu seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\iint_A (x^2+y^2+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\pi}\int_2^3 (r^2+1)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_2^3 \left(r^3+r\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi} \Big|_2^3 \left(\frac{1}{4}r^4+\frac{1}{2}r^2\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left(\left(\frac{1}{4}3^4+\frac{1}{2}3^2\right)-\left(\frac{1}{4}2^4+\frac{1}{2}2^2\right)\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{21}{4}\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \Big|_0^{\pi} \left(\frac{21}{4}\right)\theta \\
&= \left(\frac{21}{4}\right)\pi
\end{aligned}$$

A.6 Sylinterikoordinaatit

Ratkaisu harjoitukseen 24.13 sivulla 82. Tehdään sylinterimuunnos

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \\
y &= r\sin\theta \\
z &= z.
\end{aligned}$$

Tällöin integroitava lauseke saa muodon $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + z^2$. Integroinnin rajat ovat nyt $0 \leq r \leq 1$, $2 \leq z \leq 3$. Lisäksi Jakobin determinantti on r:

$$\begin{aligned}
\iiint_A \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_2^3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(r^2 + z^2\right) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\
&= \int_2^3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(r^3 + rz^2\right) \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\
&= \int_2^3 \int_0^{2\pi} \Big|_0^1 \left(\frac{1}{4}r^4 + z^2 \cdot \frac{1}{2}r^2\right) \mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\
&= \int_2^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}z^2\right) \mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\
&= \int_2^3 \Big|_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}z^2\right) \theta\mathrm{d}z \\
&= \int_2^3 2\pi \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}z^2\right) \mathrm{d}z \\
&= \Big|_2^3 2\pi \left(\frac{z}{4} + \frac{1}{6}z^3\right) \\
&= 2\pi \left(\left(\frac{3}{4} + \frac{3^3}{6}\right) - \left(\frac{2}{4} + \frac{2^3}{6}\right)\right) \\
&= \frac{41\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Ratkaisu harjoitukseen 24.14 sivulla 82. Tehdään jälleen sylinterimuunnos. Nyt r on edelleen välillä $0 \leq r \leq 1$. Puolestaan muuttuja z on välillä $0 \leq z \leq x^2 + y^2$ eli $0 \leq z \leq r^2$. Ehto $y \geq 0$ puolestaan pakottaa kulman θ

välille $[0, \pi]$. Täten integrointi sujuu seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
\iiint_A \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{r^2} \left(r^2 \cdot r\right) \mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{r^2} \left(r^3\right) \mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \int_0^\pi \Big|_0^{r^2} \left(r^3 z\right) \mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \int_0^\pi \left(r^5\right) \mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \Big|_0^\pi \left(r^5 \theta\right) \mathrm{d}r \\
&= \int_0^1 \left(\pi \cdot r^5\right) \mathrm{d}r \\
&= \pi \Big|_0^1 \left(\frac{1}{6} r^6\right) \\
&= \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}
$$

A.7 Pallokoordinaatit

Ratkaisu harjoitukseen 24.15 sivulla 83. Nyt integroinnin rajaksi saadaan $4 \leq r^2 \leq 25$ eli $2 \leq r \leq 5$. Kulmat θ ja φ taas saavat täydet asteensa: $0 \leq \theta \leq \pi$ ja $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Lisäksi pitää muistaa, että pallokoordinaattimuunnoksen Jakobin determinantin itseisarvo on $r^2 \sin\theta$. Täten:

$$
\begin{aligned}
\iiint_A (1)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_2^{5} \left(r^2 \sin\theta\right) \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Big|_2^5 \frac{1}{3} \left(r^3 \sin\theta\right) \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin\theta)\,(5^3 - 2^3)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin\theta)\,(117)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{117}{3} \int_0^{2\pi} \Big|_0^{\pi} (-\cos\theta)\, \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{117}{3} \int_0^{2\pi} (-\cos\pi + \cos 0)\, \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{117}{3} \int_0^{2\pi} (2)\mathrm{d}\varphi \\
&= 4\pi \left(\frac{117}{3}\right) = \pi \left(\frac{468}{3}\right).
\end{aligned}
$$

B Ratkaisut toisen välikokeen harjoituksiin

B.1 Useamman muuttujan raja-arvo ja jatkuvuus

Ratkaisu harjoitukseen 43.1 sivulla 126. Lasketaan raja-arvo

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} 8x^2/(x^2+y^2),$$

kun (x,y) lähestyy origoa eri suoria pitkin. Kun (x,y) lähestyy origoa suoraa $x = y$ pitkin, niin

$$
\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{8x^2}{x^2+y^2} &= \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{8x^2}{x^2+x^2} \\
&= \frac{8x^2}{2x^2} \\
&= 4.
\end{aligned}
$$

Eli tässä tapauksessa raja-arvo on 4. Jos taas tämä funktio lähestyy origoa suoraa $x = 0$ pitkin, niin raja-arvo on nolla:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{8x^2}{x^2+y^2} &= \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{0^3}{0^2+y^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Täten kun origoa lähestytään eri suoria pitkin, saadaan eri tuloksia. Tästä seuraa, että raja-arvoa $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} 8x^2/(x^2+y^2)$ ei voi olla olemassa.

Ratkaisu harjoitukseen 43.2 sivulla 126. Tutkitaan erotusta $\left|y^3/(x^2+y^2) - 0\right|$. Osoitetaan ensiksi, että tämä erotus on aina pienempi kuin $|y|$:

$$\begin{aligned} \left|\frac{y^3}{x^2+y^2} - 0\right| &= \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \\ &\leq \left|\frac{y^3}{y^2}\right| \\ &= |y|\,. \end{aligned}$$

Lisäksi pätee, että $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$, joten

$$\left|\frac{y^3}{x^2+y^2} - 0\right| \leq \sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow 0.$$

Tämä tarkoittaa, että kun $(x,y) \longrightarrow (0,0)$ niin $y^3/(x^2+y^2) \longrightarrow 0$. Toisin sanottuna

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

B.2 Suunnattu derivaatta ja tangenttitason yhtälö

Ratkaisu harjoitukseen 43.3 sivulla 127. Funktiolle $f(x,y) = x^2y$ pätee $\partial f(x,y)/\partial x = 2xy$ ja $\partial f(x,y)/\partial y = x^2$. Tämän funktion derivaatta vektorin $(3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})$ suuntaan on

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} v_1 + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} v_2 = 2xy\frac{3}{\sqrt{10}} + x^2\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Pisteessä $(1,2)$ tämä saa arvon $12/\sqrt{10} + 1/\sqrt{10} = 13/\sqrt{10}$.

Ratkaisu harjoitukseen 43.4 sivulla 127. Yhtälön $f(x,y,z) = k$ pisteeseen (x_0, y_0, z_0) piirretyn tangenttitason yhtälö saadaan kaavasta

$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0.$$

Lisäksi tehtävän yhtälöön pätee

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x} &= 2x_0y_0z_0 + 2x_0 \\
\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y} &= x_0^2 z_0 \\
\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} &= x_0^2 y_0.
\end{aligned}$$

Täten tangenttitason yhtälö pisteessä $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ on

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}(z - z_0) &= 0 \\
(2x_0y_0z_0 + 2x_0)(x - x_0) + (x_0^2 z_0)(y - y_0) + (x_0^2 y_0)(z - z_0) &= 0 \\
4(x-1) + (y-1) + (z-1) &= 0 \\
z &= 6 - 4x - y.
\end{aligned}$$

B.3 Osittaisderivoinnin ketjusääntö

Ratkaisu harjoitukseen 43.5 sivulla 127. Merkitään jälleen alaindekseillä osittaisderivaattoja, jolloin esimerkiksi $\partial f(u,v)/\partial x = f_x$ ja $\partial u/\partial x = u_x$. Ketjusäännön mukaan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(u,v)}{\partial x} &= f_u u_x + f_v v_x \\
&= \left(v^2 + 2vu\right) y + \left(2uv + u^2\right) y e^{xy} \\
&= \left(\left(e^{xy}\right)^2 + 2\left(e^{xy}\right)(xy)\right) y + \left(2(xy)\left(e^{xy}\right) + (xy)^2\right) y e^{xy} \\
&= \left(e^{2xy} + 2e^{xy}xy\right) y + \left(2xye^{xy} + x^2y^2\right) y e^{xy}.
\end{aligned}$$

Vastaavalla laskulla saadaan ratkaistua f_y:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(u,v)}{\partial y} &= f_u u_y + f_v v_y \\
&= \left(v^2 + 2vu\right) x + \left(2uv + u^2\right) x e^{xy} \\
&= \left(\left(e^{xy}\right)^2 + 2\left(e^{xy}\right)(xy)\right) x + \left(2(xy)\left(e^{xy}\right) + (xy)^2\right) x e^{xy} \\
&= \left(e^{2xy} + 2e^{xy}xy\right) x + \left(2xye^{xy} + x^2y^2\right) x e^{xy}.
\end{aligned}$$

B.4 Implisiittinen derivointi

Ratkaisu harjoitukseen 43.6 sivulla 127. Yhtälö $x^2y + y^3x = 2$ määrittää implisiittifunktion $y(x)$ pisteessä $(1,1)$, koska ensinnä tämä piste toteuttaa tämän yhtälön $(1^2 \cdot 1 + 1^3 \cdot 1 = 2)$ ja toisaalta $\partial(x^2y + y^3x)/\partial y$ ei ole nolla tässä pisteessä. Tämän implisiittifunktion $y(x)$ derivaatta $y'(x)$ saadaan kaavalla

$$y'(x) = -\frac{\partial F(x,y)/\partial x}{\partial F(x,y)/\partial y}.$$

Tässä tehtävässä $F(x,y) = x^2y + y^3x$, joten $\partial F(x,y)/\partial x = 2xy + y^3$ ja $\partial F(x,y)/\partial y = x^2 + 3y^2x$. Täten

$$y'(x) = -\frac{2xy + y^3}{x^2 + 3y^2x} = -\frac{3}{4}.$$

B.5 Neliömuodot

Ratkaisu harjoitukseen 43.7 sivulla 127. Lasketaan aluksi tämän neliömuodon Hessen matriisi. Se on

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tälle matriisille pätee $a_{11} = 2 > 0$ ja

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0.$$

Täten nämä determinantit kertovat, että tämä neliömuoto on positiivisesti definiitti.

B.6 Useamman muuttujan funktion optimointi

Ratkaisu harjoitukseen 43.8 sivulla 127. Etsitään aluksi tämän funktion ensimmäisten derivaattojen nollakohdat:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 6x^2 - 6y = 0$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -6x + 3y^2 = 0.$$

Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan $x^2 = y$. Kun tämä sijoitetaan toiseen yhtälöön, saadaan

$$\begin{aligned}
-6x + 3(x^2)^2 &= 0 \\
3x(-2 + x^3) &= 0 \\
x &= 0 \text{ tai } x = 2^{1/3}.
\end{aligned}$$

Koska $x^2 = y$, niin mahdolliset ääriarvopisteet ovat $(0,0)$ ja $(2^{1/3}, 2^{2/3})$. Näiden ääriarvopisteiden laadun tarkistamiseksi lasketaan funktion $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + y^3$ Hessen matriisi:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6y \end{bmatrix}$$

Tämän determinantti on $72xy - 36$. Pisteessä $(0,0)$ tämä determinantti on negatiivinen, joten kyseessä ei ole lokaali ääriarvopiste. Pisteessä $(2^{1/3}, 2^{2/3})$ Tämä determinantti saa arvon $72 \cdot 2 - 36 = 108 > 0$. Lisäksi tässä pisteessä $f_{xx} = 12x = 12 \cdot 2^{1/3} > 0$, joten piste $(2^{1/3}, 2^{2/3})$ on tämän funktion lokaali minimi.

Ratkaisu harjoitukseen 43.9 sivulla 127. Etsittäessä funktion pienintä etäisyyttä origoon minimoitava funktiona on etäisyys origosta eli $\sqrt{x^2 + y^2}$. Tätä etäisyyttä minimoidaan rajoitteella $y = 5x + 7$. Lisäksi on syytä huomata, että voimme yhtä hyvin minimoida funktiota $x^2 + y^2$, koska kyseessä on funktion $\sqrt{x^2 + y^2}$ kasvava muunnos. Tästä saadaan Lagrangen funktio

$$\mathcal{L}(x,y;\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(y - 5x - 7).$$

Asetetaan tämän derivaatat x:n ja y:n suhteen nolliksi:

$$\begin{aligned}
2x - 5\lambda &= 0 \\
2y + \lambda &= 0
\end{aligned}$$

Näistä saadaan yhtälö $2x/5 = -2y$, josta saadaan ratkaistua $x = -5y$. Sijoitetaan tämä rajoitteeseen $y = 5x + 7$:

$$\begin{aligned}
y &= 5x + 7 \\
y &= 5(-5y) + 7 \\
26y &= 7 \\
y &= \frac{7}{26}.
\end{aligned}$$

Vastaavasti $x = -5y = -35/26$. Täten haettu piste on $(-35/26, 7/26)$.

B.7 Differentiaaliyhtälöt

Ratkaisu harjoitukseen 43.10 sivulla 127. Merkitään tätä differentiaaliyhtälöä aluksi muodossa

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2yx.$$

Nyt tämä yhtälö voidaan jakaa puolittain y:llä ja kertoa puolittain dx:llä. Tällöin se saadaan muotoon

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = 2x\mathrm{d}x.$$

Nyt syntynyt lauseke voidaan integroida kummaltakin puolelta x:n suhteen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int 2x\mathrm{d}x \\
\ln y &= x^2 + C \\
y &= e^{x^2+C} \\
y &= C_1 e^{x^2} \quad \Big| \quad C_1 = e^C.
\end{aligned}$$

Ratkaisu harjoitukseen 43.11 sivulla 127. Kyseessä on lineaarinen differentiaaliyhtälö eli muotoa $y' + p(x)y = q(x)$ oleva differentiaaliyhtälö, jossa $p(x) = -2x$ ja $q(x) = e^{x^2}$. Tällainen yhtälö ratkeaa kertomalla se puolittain integroivalla tekijällä

$$e^{\int p(x)\mathrm{d}x} = e^{-x^2}.$$

Kun yhtälö kerrotaan tällä tekijällä puolittain, saadaan

$$\begin{aligned}
y' - 2yx &= e^{x^2} \\
(y' - 2yx)e^{-x^2} &= e^{x^2}e^{-x^2} \\
\frac{d}{dx}\left(ye^{-x^2}\right) &= 1 \\
ye^{-x^2} &= x + C \\
y &= (x + C)/e^{-x^2} \\
y &= (x + C)e^{x^2}.
\end{aligned}$$

Ratkaisu harjoitukseen 43.12 sivulla 127. Sijoitetaan ratkaisuun $y = (x + C)e^{x^2}$ alkuarvo $y(0) = 1$:

$$y = (x + C)e^{x^2}$$
$$1 = (0 + C)e^{0^2}$$
$$C = 1.$$

Täten alkuarvotehtävän ratkaisu on $y = (x + 1)e^{x^2}$.