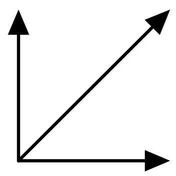
Matematiikan tukikurssi

Kurssikerta 8

1 Suunnattu derivaatta

Aluksi tarkastelemme vektoreita, koska ymmärrys vektoreista helpottaa alla olevien asioiden omaksumista. Kun liikutaan tasossa eli avaruudessa $\mathbb{R}^2$, niin vektori (x, y) on yksinkertaisesti lukupari koordinaatistossa. Se voidaan visualisoida nuolena, joka alkaa origosta ja päättyy pisteeseen (x, y). Esimerkiksi vektori $(1, 0)$ on vektori, joka alkaa origosta ja päättyy pisteeseen $(1, 0)$. Alla olevassa kuvassa on kuvattu kolme vektoria:



Vektorilla on aina suunta ja pituus. Yllä olevassa kuvassa kaikilla kolmella vektorilla on eri suunta. Kaksi näistä kulkee koordinaattiakseleiden suuntaisesti ja yksi 45 asteen kulmassa. Vektorin pituus on sen etäisyys origosta eli $\sqrt{x^2 + y^2}$. Täten siis vektorien $(1, 0)$ ja $(0, 1)$ pituus on yksi ja vektorin $(1, 1)$ pituus on $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Vektori on yksikkövektori, jos sen pituus on yksi. Toisaalta myös vektorista $(1, 1)$ saadaan muodostettua yksikkövektori jakamalla sen jokainen komponentti sen pituudella $\sqrt{2}$. Täten $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ on yksikkövektori.

Tarkastellaan nyt jälleen kahden muuttujan funktiota $f(x, y)$. Tämän funktion osittaisderivaatta $\partial f(x, y)/\partial x$ kertoo, kuinka funktion f arvo muuttuu, kun x-akselilla siirrytään "vähän" oikealle. Puolestaan $\partial f(x, y)/\partial y$ kertoo, kuinka tämä arvo muuttuu, kun y-akselilla siirrytään ylöspäin.

Funktion gradientti $\nabla f(x,y)$ esittää nämä osittaisderivaatat vektorina

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right).$$

Siispä $\partial f(x,y)/\partial x$ on funktion f muutos siirryttäessä (x,y)-tasossa oikealle *eli vektorin* $(1,0)$ *suuntaan*. Vastaavasti $\partial f(x,y)/\partial y$ on funktion f muutos siirryttäessä (x,y)-tasossa ylöspäin *eli vektorin* $(0,1)$ *suuntaan*. Tasossa voi kuitenkin siirtyä muuhunkin suuntaan kuin oikealle tai ylös. Tästä seuraa ja myös funktion f derivaatan voi laskea, kun (x,y)-tasossa siirrytään johonkin yleiseen suuntaan.

Voimme esimerkiksi laskea funktion $f(x,y)$ derivaatan, kun siirrymme (x,y)-tasossa vektorin $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ suuntaan. Tällainen derivaatta tietyn yksikkövektorin (v_1, v_2) suuntaan on nimeltään **suunnattu derivaatta** ja sen määritelmä on kahden muuttujan funktion $f(x,y)$ tapauksessa seuraava:

$$\frac{d}{dt} f((x,y) + t(v_1, v_2))\Big|_{t=0}$$

Tässä määritelmässä $f((x,y) + t(v_1, v_2))$ on funktion f arvo pisteessä $(x,y) + t(v_1, v_2) = (x + tv_1, y + tv_2)$. Tässä siis pisteestä (x,y) siirrytään vektorin (v_1, v_2) suuntaan ja t kertoo, kuinka paljon tämän vektorin suuntaan liikutaan. Derivaatta $\frac{d}{dt} f((x,y) + t(v_1, v_2))$ kertoo, miten funktion arvo muuttuu, kun t kasvaa hieman eli kun siirrytään pisteestä (x,y) kohden vektoria (v_1, v_2). Suunnattu derivaatta arvioidaan pisteessä $t = 0$: se siis kertoo paljonko funktion f arvo muuttuu, kun pisteestä (x,y) lähdetään liikkuumaan vektorin (v_1, v_2) suuntaan.

Suunnatulle derivaatalle on olemassa helppo laskukaava:

$$\frac{d}{dt} f((x,y) + t(v_1, v_2))\Big|_{t=0} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} v_1 + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} v_2.$$

Toisin sanottuna suunnattu derivaatta tietyn yksikkövektorin (v_1, v_2) suuntaan saadaan kertomalla funktion f osittaisderivaatat tämän yksikkövektorin vastaavilla komponenteilla.

Esimerkki 1.1. Lasketaan funktion $f(x,y) = xy$ derivaatta vektorin $(1,2)$ suuntaan. Koska $(1,2)$ ei ole yksikkövektori, meidän on muodostettava siitä yksikkövektori jakamalla sen jokainen komponentti sen pituudella. Vektorin $(1,2)$ pituus on $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, joten tästä vektorista saadaan muodostettua yksikkövektori $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$. Nyt funktion $f(x,y) = xy$ derivaatta tämän yksikkövektorin suuntaan on

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}v_1 + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}v_2 &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}1/\sqrt{5} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}2/\sqrt{5} \\ &= y/\sqrt{5} + 2x/\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Täten tämän funktion derivaatta tämän yksikkövektorin suuntaan esimerkiksi pisteessä $(1,1)$ on yhtä kuin $1/\sqrt{5} + 2/\sqrt{5} = 3/\sqrt{5}$. Täten jos pisteestä $(1,1)$ liikutaan yksi yksikkö vektorin $(1,2)$ suuntaan, niin funktion f arvo muuttuu noin $3/\sqrt{5}$.

Tärkeää tässä vaiheessa on ymmärtää suunnatun derivaatan intuitio. Tiedetään, että $\partial f(x,y)/\partial x$ kertoo, paljonko funktion f arvo muuttuu, kun siirrytään vektorin $(1,0)$ suuntaan ja puolestaan $\partial f(x,y)/\partial y$ kertoo paljonko funktion f arvo muuttuu, kun siirrytään vektorin $(0,1)$ suuntaan. Kuitenkin (x,y) voidaan liikkua myös moneen muuhun suuntaan ja suunnattu derivaatta antaa funktion muutoksen tietyn vektorin (v_1, v_2) suuntaan.

Esimerkki 1.2. Olkoon $U(x_1, x_2)$ hyötyfunktio. Hyödykkeen yksi rajahyöty on tunnetusti $\partial U(x_1, x_2)/\partial x_1$ ja hyödykkeen kaksi rajahyöty puolestaan on $\partial U(x_1, x_2)/\partial x_2$. Paljonko on kuluttajan rajahyöty, jos hän kasvattaa kummankin hyödykkeen kulutusta saman verran?

Ratkaisu. Jos hän kasvattaa kummankin hyödykkeen kulutusta saman verran, hän siirtyy (x_1, x_2)-avaruudessa vektorin $(1,1)$ suuntaan. Tämä rajahyöty saadaan siis laskemalla hyötyfunktion suunnattu derivaatta vektoria $(1,1)$ vastaavan yksikkövektorin $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ suuntaan. Tämä on yhtä kuin

$$\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1}1/\sqrt{2} + \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2}1/\sqrt{2}.$$

Koska suunnattu derivaatta kuvaa funktion muutoksen tiettyyn suuntaan, ja näitä suuntia on täydet 360 astetta, herää kysymys että mihin suuntaan funktion f arvo kasvaa nopeimmin. Osoittautuu, että funktio kasvaa nopeinten gradienttinsa ∇f suuntaan.

Esimerkki 1.3. Funktio $f(x,y) = x^2 + y^2$ kasvaa nopeinten vektorin $(2x, 2y)$ suuntaan. Esimerkiksi pisteessä $(1,0)$ tämä funktio kasvaa nopeinten vektorin $(2,0)$ suuntaan.

Funktio kasvaa siis nopeinten gradienttinsa suuntaan. Tämä tulos on sikäli uskottava, että jos meillä on esimerkiksi funktio $f(x,y) = y$, niin tämä kasvaa selkeästi nopeinten y-akselin suuntaan. Tämän funktion gradientti on $(0,1)$, joten selvästi tämä funktio kasvaa nopeinten gradienttinsa suuntaan. Vastaavasti funktio $f(x,y) = xy$ kasvaa nopeinten suuntaan (y,x). Täten jos olemme suoralla $x = y$, saadaan funktiota $f(x,y) = xy$ kasvatettua eniten siirtymällä yksikkövektorin $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ suuntaan.

Tarkastellaan jälleen funktiota $f(x,y) = y$, joka siis kasvaa nopeinten y-akselin suuntaan. Kyseinen funktio myös selvästi vähenee nopeinten suuntaan $(0,-1)$ eli liikuttaessa y-akselilla alaspäin. Tämä esimerkki yleistyy siten, että jokainen funktio vähenee nopeinten suuntaan $-\nabla f$ eli gradientista päinvastaiseen suuntaan.

2 Tangenttitason yhtälö

Yhden muuttujan analyysissä funktiolle $f(x)$ voitiin muodostaa tangenttisuora pisteeseen $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x)(x - x_0).$$

Yhden muuttujan funktion tangenttisuora on siis suora $a + bx$, joka approksimoi funktiota pisteen (x_0, y_0) läheisyydessä. Useamman muuttujan tapauksessa tangenttisuoraa vastaa **tangenttitaso**.

Tarkastellaan nyt kolmen muuttujan funktiota $f(x,y,z)$. Tällaiselle funktiolle voi muodostaa tasa-arvopinnan $f(x,y,z) = k$. Tämä pinta koostuu siis kaikista pisteistä (x,y,z), joilla f saa arvon k. Esimerkki tällaisesta tasa-arvopinnasta on

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

joka siis sisältää esimerkiksi pisteet $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ja $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Tällaisen tasa-arvopinnan pisteeseen (x_0, y_0, z_0) voidaan piirtää tangenttitaso. Tasa-arvopinnan $f(x,y,z) = k$ pisteeseen (x_0, y_0, z_0) piirretyn tangenttitason yhtälö on yhtä kuin

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0,$$

jossa esimerkiksi $\partial f(x_0,y_0,z_0)/\partial x$ tarkoittaa osittaisderivaattaa $\partial f(x,y,z)/\partial x$ arvioituna pisteessä (x_0, y_0, z_0).

Toisin sanottuna tangenttitason yhtälö saadaan laskemalla funktion f osittaisderivaatat pisteessä (x_0, y_0, z_0) ja kertomalla nämä erotuksilla $x - x_0$, $z - z_0$ ja $z - z_0$.

Esimerkki 2.1. Tasa-arvopinnalle $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ voidaan määrittää yllä olevalla kaavalla tangenttitaso. Sen kaava pisteessä (x_0, y_0, z_0) on

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0$$

Täten esimerkiksi pisteeseen $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ piirretyn tangenttitason yhtälö on yhtä kuin

$$\begin{aligned}
2\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2\frac{1}{\sqrt{3}}\left(y - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2\frac{1}{\sqrt{3}}\left(z - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= 0 \\
\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(y - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(z - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= 0 \\
z &= \frac{3}{\sqrt{3}} - z - y \\
z &= \sqrt{3} - z - y.
\end{aligned}$$

Pisteen (x_0, y_0, z_0) tangenttitason vastainen **normaalisuora** on yksinkertaisesti gradientti $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$. Tämä ei ole yllättävää, sillä pisteen (x_0, y_0, z_0) läheisyydessä funktion $f(x, y, z)$ arvo tangenttitasolla on kutakuinkin k eli vakio, kun taas gradientti kertoo mihin suuntaan funktio kasvaa nopeinten. Funktio siis kasvaa nopeinten gradienttinsa suuntaan eli kohtisuoraan pois päin tangenttitasostaan.

Täten yllä olevassa esimerkissä pisteeseen $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ piirretty normaalisuora on vektorin $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = (2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$ suuntainen.

Esimerkki 2.2. Ratkaistaan yhtälön $xyz = 2$ määrittämän tasa-arvopinnan tangenttitaso ja normaalisuora pisteessä $(1, 1, 2)$. Tangenttitaso saadaan yhtälöstä

$$y_0z_0(x - x_0) + x_0z_0(y - y_0) + x_0y_0(z - z_0) = 0.$$

Kun tähän sijoitetaan $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 2)$, saadaan

$$\begin{aligned}
y_0z_0(x - x_0) + x_0z_0(y - y_0) + x_0y_0(z - z_0) &= 0 \\
2(x - 1) + 2(y - 1) + (z - 1) &= 0 \\
z &= 5 - 2x - 2y.
\end{aligned}$$

Normaalisuora on puolestaan gradientin $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = (2, 2, 1)$ suuntainen.

3 Hessen matriisi

Tarkastellaan n:n muuttujan funktiota $f(x_1, \ldots, x_n)$. Merkitään tämän funktion derivaattaa muuttujan x_i suhteen f_i. Tällöin siis esimerkiksi $f_1 = \partial f(x_1, \ldots, x_n)/\partial x_1$. Huomataan, että myös näitä osittaisderivaattoja voi derivoida edelleen, eli osittaisderivaatasta voi itsestään ottaa osittaisderivaatan. Täten esimerkiksi

$$f_{12} = \frac{\partial^2 f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Täten jos meillä on esimerkiksi funktio $f(x, y) = x^2 y$, niin $f_1 = 2xy$ ja $f_{12} = 2x$ ja $f_{11} = 2y$. Nyt näistä toisista osittaisderivaatoista voi muodostaa Hessen matriisin, joka on kahden muuttujan funktion $f(x, y)$ tapauksessa yhtä kuin

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}.$$

Toisin sanottuna Hessen matriisi sisältää ainoastaan funktion toisen derivaatat tietyssä järjestyksessä.

Esimerkki 3.1. Funktion $f(x, y) = e^x y + y^2$ Hessen matriisi on yhtä kuin

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^x y & e^x \\ e^x & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tässä huomataan, että $f_{12} = f_{21}$ eli ristikkäisderivaatat ovat samoja. Tämä tulos itse asiassa pätee aina, kun osittaisderivaatat ovat jatkuvia.

Hessen matriisilla ja erityisesti sen determinantilla on suurta käyttöä useamman muuttujan funktioita optimoitaessa. Hessen matriisin determinantti on yhtä kuin $f_{11} f_{22} - f_{12}^2$, joten edellisessä tehtävässä tämä determinantti saa arvon $2e^x y - (e^x)^2 = 2e^x y - e^{2x}$.

4 Kokonaisdifferentiaali

Palautetaan mieliin, että yhden muuttujan funktion tapauksessa **differentioituvuus** tarkoitti sitä, että funktion $f(x)$ muutosta $\Delta f(x_0) = f(x_0 + dx) - f(x_0)$ voitiin approksimoida "hyvin" pisteen x_0 läheisyydessä luvulla $f'(x_0)dx$. Tässä dx on argumentin x "pieni" muutos ja differentioituvuus tarkoittaa siis sitä, että funktion muutos $f(x_0 + dx) - f(x_0)$ on kutakuinkin funktion derivaatta tässä pisteessä x_0 kerrottuna muutoksella dx.

Usean muuttujan funktion tapauksessa differentioituvuuden määritelmä on vastaava. Tarkastellaan tässä kahden muuttujan funktiota $f(x,y)$, jonka argumentti (x,y) muuttuu pisteestä (x_0,y_0) pisteeseen (x_0+dx, y_0+dy). Tällöin tämän funktion muutos on yhtä kuin

$$f(x_0+dx, y_0+dy) - f(x_0,y_0).$$

Mikäli tämä funktio on differentioituva, tätä muutosta voidaan approksimoida funktion f osittaisderivaattojen avulla seuraavasti:

$$f(x_0+dx, y_0+dy) - f(x_0,y_0) \approx \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy.$$

Tämä on funktion $f(x,y)$ **kokonaisdifferentiaali**. Se siis approksimoi funktio f muutosta, kun siirrytään pisteestä (x_0,y_0) pisteeseen (x_0+dx, y_0+dy).

Esimerkki 4.1. Funktion $f(x,y) = x^2y + y^2x$ kokonaisdifferentiaali on

$$2xydx + 2yxdy.$$

Täten tämän funktion kokonaisdifferentiaali esimerkiksi pisteessä $(1,5)$ on yhtä kuin $10dx + 10dy$. Täten jos liikumme pisteestä $(1,5)$ pienen matkan siten, että x muuttuu arvoon $x+dx$ ja y muuttuu arvoon $y+dy$, niin funktion f muutos on kutakuinkin $10dx + 10dy$. Esimerkiksi jos sekä x että y kasvavat kymmenesosan, niin tämä funktio kasvaa kutakuinkin määrän $10dx + 10dy = 2$.

Esimerkki 4.2. Kokonaisdifferentiaalilla on runsaasti sovelluksia kansantaloustieteessä. Jos meillä on tarkasteltavana esimerkiksi rahan kysyntäfunktio $L(i,Y)$, niin tämän funktion muutosta approksimoi sen kokonaisdifferentiaali

$$dL(i,Y) = \frac{\partial L(i,Y)}{\partial i}di + \frac{\partial L(i,Y)}{\partial Y}dY$$

eli rahan kysynnän muutos on kutakuinkin rahan kysynnän derivaatta koron i suhteen eli $\partial L(i,Y)/\partial i$ kerrottuna koron muutoksella di plus rahan kysynnän muutos tulojen Y suhteen $\partial L(i,Y)/\partial Y$ kerrottuna tulojen Y muutoksella dY.

Tästä voidaan johtaa myös LM-käyrän kulmakerroin: rahamarkkinat ovat tasapainossa, kun

$$L(i, Y) = M/P.$$

Nyt kun M/P on vakio, niin yllä olevasta tasapainoehdosta voidaan ottaa kummaltakin puolelta kokonaisderivaatta:

$$\begin{aligned} dL(i,Y) &= d(M/P) \\ \frac{\partial L(i,Y)}{\partial i} di + \frac{\partial L(i,Y)}{\partial Y} dY &= 0, \end{aligned}$$

jossa $d(M/P) = 0$, koska M/P on vakio. Yllä olevasta yhtälöstä saadaan muokattua LM-käyrän kulmakerroin di/dY:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(i,Y)}{\partial i} di + \frac{\partial L(i,Y)}{\partial Y} dY &= 0 \\ \frac{\partial L(i,Y)}{\partial i} di &= -\frac{\partial L(i,Y)}{\partial Y} dY \\ \frac{di}{dY} &= -\left(\frac{\partial L(i,Y)/\partial Y}{\partial L(i,Y)/\partial i} \right). \end{aligned}$$

Esimerkki 4.3. Toinen kokonaisdifferentiaalin sovellus on, että sillä saadaan laskettua indifferenssikäyrän kulmakerroin. Indifferenssikäyrä on hyötyfunktion samanarvonkäyrä. Jos hyötyfunktio on $U(x_1, x_2)$, niin indifferenssikäyrä on muotoa

$$U(x_1, x_2) = k.$$

Huomataan aluksi, että indifferenssikäyrä on määritelty (x_1, x_2)-avaruudessa. Indifferenssinkäyrän kulmakerroin on siis kulmakerroin $\partial x_2/\partial x_1$. Otetaan nyt kokonaisdifferentiaali yllä olevan yhtälön kummaltakin puolelta:

$$\begin{aligned} dU(x_1,x_2) &= dk \\ \frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_2} dx_2 &= 0 \\ \frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_2} dx_2 &= -\frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_1} dx_1 \\ \frac{dx_2}{dx_1} &= -\frac{\partial U(x_1,x_2)/\partial x_1}{\partial U(x_1,x_2)/U(x_1,x_2)x_2}. \end{aligned}$$

Indifferenssikäyrän kulmakerroin on siis $-\frac{\partial U(x_1,x_2)/\partial x_1}{\partial U(x_1,x_2)/U(x_1,x_2)x_2}$.

5 Osittaisderivoinnin ketjusääntö

Yhden muuttujan yhdistetyn funktion $f(g(x))$ derivoinnin ketjusääntö kertoo, että tämän funktion derivaatta on $f'(g(x))g'(x)$. Täten esimerkiksi funktion $f(g(x)) = (1+x^2)^2$ derivaatta on yhtä kuin $f'(g(x))g'(x) = 2(1+x^2)\cdot 2x$.

Usean muuttujan ketjusääntö vastaa jossain määrin yhden muuttujan vastaavaa sääntöä. Tutkitaan jälleen kahden muuttujan funktiota $f(u,v)$, mutta oletetaan nyt, että sekä u että v ovat joiden muuttujien x, y, ja z funktioita. Tutkittavana on siis funktio

$$f(u,v) = f(u(x,y,x), v(x,y,x)).$$

Nyt haluamme laskea tämän funktion osittaisderivaatan $\partial f/\partial x$. Huomataan, että kun muuttajaa x muutetaan niin funktion f argumentit u ja v kumpikin muuttuvat. Nyt funktio f muuttuu siis kahdesta syystä: koska u muuttuu ja v muuttuu. Tarkka kaava funktion f osittaisderivaatalle x:n suhteen on seuraava:

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial x} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Tämä usean muuttujan ketjusääntö siis kertoo osittaisderivaatan $\partial f/\partial x$ olevan yhtä kuin muuttujien u ja v osittaisderivaatat x:n suhteen kerrottuna funktion f derivaatoilla u:n ja v:n suhteen.

Esimerkki 5.1. Olkoon $f(u,v) = uv^2 + e^u$ ja lisäksi $u = 2yx^2$ ja $v = x^2y^3$. Lasketaan nyt osittaisderivaatat $\partial f/\partial x$ ja $\partial f/\partial y$. Ketjusäännöllä saadaan:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(u,v)}{\partial x} &= \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\ &= (v^2+e^u)\cdot 4yx + 2uv\cdot 2xy^3.\end{aligned}$$

Lopulliseen vastaukseen sijoitetaan vielä u:n ja v:n tilalle $u = 2yx^2$ ja $v = x^2y^3$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(u,v)}{\partial x} &= (v^2+e^u)\cdot 4yx + 2uv\cdot 2xy^3\\ &= ((x^2y^3)^2 + e^{2yx^2})\cdot 4yx + 2(2yx^2)(x^2y^3)\cdot 2xy^3\\ &= (x^4y^6 + e^{2yx^2})\cdot 4yx + 8yx^2x^2y^3\cdot xy^3\\ &= 4x^5y^7 + 4xye^{2yx^2} + 8x^5y^7.\end{aligned}$$

Sama vastaus saadaan sijoittamalla funktioon $f(u,v) = uv^2 + e^u$ arvot $u = 2yx^2$ ja $v = x^2y^3$ ja osittaisderivoimalla tämän jälkeen normaalisti.

Esimerkki 5.2. Tutkitaan jälleen taloustieteellistä esimerkkiä. Olkoon

$$Y = F(K, AL)$$

perinteinen makrotaloudellinen tuotantofunktio. Tutkitaan nyt, miten tuotanto kasvaa ajassa t. Merkitään yllä olevaan yhtälöön, että kaikki muuttujan ovat ajan t funktioita:

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)).$$

Nyt voidaan laskea tuotannon muutos ajan suhteen eli $Y'(t)$. Tämä onnistuu ketjusäännöllä

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \frac{\partial F}{\partial K} K'(t) + \frac{\partial F}{\partial AL} \frac{d}{dt} \left(A(t)L(t) \right) \\ &= \frac{\partial F}{\partial K} K'(t) + \frac{\partial F}{\partial AL} (A'(T)L(t) + L'(t)A(t)). \end{aligned}$$