

Matematiikan tukikurssi

Kurssikerta 4

1 Supremum ja infimum

Tarkastellaan aluksi avointa väliä $(-1, 1)$. Tämä on joukko, johon kuuluvat kaikki reaaliluvut miinus yhdestä yhteen. Kuitenkaan päätepisteet eli luvut -1 ja 1 eivät kuulu tähän väliin.

On huomattava, että välillä $(-1, 1)$ ei ole maksimia, koska väli sisältää lukuja, jotka ovat mielivaltaisen lähellä lukua 1 . Joukko ei sisällä myöskään minimiä.

Voidaan ajatella **supremumia** maksimin yleistykseenä ja **infimumia** minimin yleistykseenä. Alla olevia tarkasteluja varten kannattaa piirtää väli $-1, 1$ janalle.

Yllä olevassa esimerkissä supremum voidaan etsiä seuraavasti:

1. Joukko $(-1, 1)$ on ylhäältä rajoitettu: on olemassa lukuja, jotka ovat suurempia kuin mikään tämän välin luku.
2. Jos luku on suurempi tai yhtä suuri kuin kaikki tämän välin luvut, sanotaan että kyseessä on tämän välin **yläraja**. Esimerkiksi luku 2 on välin $(-1, 1)$ yläraja, koska se on suurempi kuin mikään tämän välin luku.
3. Muodostetaan joukko, joka sisältää kaikki välin $(-1, 1)$ ylärajat. Tämä joukko on selvästi

$$\{x : x \geq 1\} = [1, \infty)$$

4. Välin $-1, 1$ supremum on sen pienin yläraja eli joukon $[1, \infty)$ minimi. Tämä minimi on 1 . Eli $\sup(-1, 1) = 1$.

Eli joukon A supremum eli $\sup(A)$ on joukon A **pienin yläraja**. Tästä seuraa, että jonkin luvun a voi osoittaa olevan jonkin joukon A pienin yläraja osoittamalla, että

1. a on A :n yläraja, eli a on suurempi tai yhtä suuri kuin jokainen A :n luku
2. Mikään a :ta pienempi luku ei ole A :n yläraja.

Esimerkki 1. Joukon $A = \{1, 2, 5\}$ supremum on 5, koska ensinnäkin luku 5 on tämän joukon yläraja ja toisaalta jos meillä on mikä tahansa luku $x < 5$, niin x ei ole joukon A yläraja. Täten 5 on pakolla joukon A supremum.

Esimerkki 2. Jos joukolla on olemassa maksimi, niin $\max A = \sup A$

Täten supremum on luonteva maksimin yleistys. Kaikilla joukoilla ei ole maksimia, mutta kaikilla ylhäältä rajoitetuilla joukoilla on supremum.

Infimum on puolestaan minimin yleistys. Joukon $(-1, 1)$ infimum löydetään vastaavalla tekniikalla kuin supremum:

1. Joukko $(-1, 1)$ on alhaalta rajoitettu: on olemassa lukuja, jotka ovat pienempiä kuin mikään tämän välin luku.
2. Jos luku on pienempi tai yhtä suuri kuin kaikki tämän välin luvut, sanotaan että kyseessä on tämän välin **alaraja**. Esimerkiksi luku -3 on välin $(-1, 1)$ alaraja, koska se on pienempi kuin mikään tämän välin luku.
3. Muodostetaan joukko, joka sisältää kaikki välin $(-1, 1)$ alarajat. Tämä joukko on selvästi

$$\{x : x \leq -1\} = (-\infty, -1]$$

4. Infimum on **suurin alaraja** eli joukon $(-\infty, -1]$ maksimi. Tämä maksimi on -1 . Eli $\inf(-1, 1) = -1$.

Jos joukolla on olemassa minimi, se on myös joukon infimum.

Esimerkki 3. Joukon $A = \{1/x : x \in \mathbb{R}_+\}$ infimum on 0. Tämän voi todistaa seuraavasti:

1. Ensinnäkin 0 on tämän joukon alaraja: $0 \leq 1/x$, kun $x \in \mathbb{R}_+$.
2. Toisaalta mikään nollaa suurempi luku ϵ ei ole tämän joukon alaraja: aina on olemassa lukuja $1/x$, jotka ovat pienempiä kuin ϵ , koska $1/x < \epsilon \iff x > 1/\epsilon$.

Täten 0 on tämän joukon suurin alaraja eli infimum.

2 Funktion raja-arvo

Tutkitaan raja-arvoa

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{x-2} \right).$$

Tässä funktion $f(x) = \frac{x-2}{x-2}$ arvo ei ole määritelty pisteessä $x = 2$, koska nolllalla ei saa jakaa. Tämän funktion arvo on kuitenkin määritelty pisteen $x = 2$ läheisyydessä, itse asiassa tämä funktio on määritelty mielivaltaisen lähellä tätä pistettä. Funktion raja-arvo kun $x \rightarrow 2$ kertoo, miten funktio käyttäytyy kun x lähestyy pistettä 2. Raja-arvo ei vaadi että funktio olisi edes määritelty tässä pisteessä 2.

Täten raja-arvo voi muokata seuraavasti: kun $x \neq 2$,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{1} \right) = 1.$$

Eli kun x lähestyy pistettä 2, niin funktio $\frac{x-2}{x-2}$ lähestyy pistettä 1. Yllä tehty yhtälön muokkaus muotoon $\frac{1}{1}$ on sallittua, koska oletimme että $x \neq 2$. Pisteessä $x = 2$ yllä oleva muokkaus tarkoittaisi nolllalla jakamista, joten on oletettava että $x \neq 2$.

Tällä kurssilla olevissa raja-arvotehtävissä ideana on usein muokata raja-arvon sisällä olevaa lauseketta muotoon, josta raja-arvo on helppo laskea suoraan. Käytännössä tämä tarkoittaa usein sitä, että nimittä muokataan sellaiseksi, että se ei lähesty nolllaa.

Esimerkki 4. Laske raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right).$$

Ratkaisu. Huomataan, että $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, joten olettaen $x \neq 1$ yllä oleva raja-arvo voidaan muokata muotoon

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x + 1}{1} \right) = 2.$$

Tässä siis raja-arvo muokattiin muotoon, jossa nimittäjä ei enää lähestynyt nolllaa.

Oleellista näissä tehtävissä on osata muokata raja-arvolauseketta sopivaan muotoon. Tämä muokkaaminen on algebraa eli käytännössä yhtälön pyörittämistä. Yksi oleellisimpia asioita muistaa on se, että

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Täten esimerkiksi $25 - 4 = 5^2 - 2^2 = (5 - 2)(5 + 2) = 21$. Tämä identiteetti on helppo todistaa: kerro ainoastaan $(a - b)(a + b)$ auki. Käytännössä usein tehtävänannossa pitää tunnistaa joko osoittajan tai nimittäjän olevan muotoa $a^2 - b^2$.

Esimerkki 5. Laske raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x - 2} \right).$$

Ratkaisu. Oletetaan, että $x \neq 2$. Muokataan lauseketta ja huomataan, että osoittaja on muotoa $a^2 - b^2$, koska $x^2 - 4 = x^2 - 2^2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x + 2}{1} \right) = 4.$$

Tässä on hyvä mainita, että kun haluamme esittää lausekkeen $a^2 - b^2$ muodossa $(a - b)(a + b)$, niin ei tarvitse olettaa että a ja b olisivat kokonaisluvun neliöitä. Voidaan esimerkiksi kirjoittaa $x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.

Useissa tehtävissä kannattaa etsiä muotoa $a^2 - b^2$ olevia termejä. Näitä muokkaamalla ratkeaa moni tehtävä. Toinen yleisesti käytetty identiteetti kertoo, että

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Myöskään tässä ei ole mitään mystistä: se voidaan helposti osoittaa oikeaksi laskemalla yhtälön oikea puoli auki. Tämä identiteetti kertoo esimerkiksi, että

$$125 - 27 = 5^3 - 3^3 = (5 - 3)(5^2 + 5 \cdot 3 + 3^2) = (2)(25 + 15 + 9) = 2 \cdot 49 = 98.$$

Joskus raja-arvolausekkeen yhtälöä muokattaessa pitää käyttää useita algebran taktiikoita yhdessä.

Esimerkki 6. Laske raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 8} \right)$$

Ratkaisu. Huomataan että nimittäjä on muotoa $a^3 - b^3$, joten $x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$. Osoittaja on puolestaan toisen asteen yhtälö,

jonka nollakohdat ovat (löytyvät kokeilemalla) $x_1 = 2$ ja $x_2 = -3$, joten $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$. Täten

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(x - 2)(x + 3)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x + 3}{x^2 + 2x + 4} \right) = \frac{5}{12}.\end{aligned}$$

Tyypillinen tapaus on myös, että joko nimittäjässä tai osoittajassa on erotus $a - b$. Nyt hyvä taktiikka on kertoa sekä osoittaja että nimittäjä termillä $(a + b)$, jolloin joko osoittajaan tai nimittäjään syntyy termi $a^2 - b^2$:

Esimerkki 7. Laske raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3} \right)$$

Ratkaisu. Raja-arvo on muotoa $\frac{0}{0}$, joten hyvä taktiikka on yrittää saada nimittäjä muotoon, jossa se ei lähesty nollaa. Ajatellaan, että nimittäjä on muotoa $a - b$. Tällöin $a = \sqrt{x^2 + 9}$ ja $b = 3$. Nyt nimittäjä voidaan yksinkertaistaa muotoon $a^2 - b^2$ kertomalla lausekkeen

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3}$$

osoittaja ja nimittäjä termillä $a + b$ eli termillä $\sqrt{x^2 + 9} + 3$. Täten

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(x^2)(\sqrt{x^2 + 9} + 3)}{(\sqrt{x^2 + 9} - 3)(\sqrt{x^2 + 9} + 3)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(x^2)(\sqrt{x^2 + 9} + 3)}{x^2 + 9 - 3^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(x^2)(\sqrt{x^2 + 9} + 3)}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 9} + 3}{1} \right) \\ &= 3 + 3 = 6\end{aligned}$$

Usein argumentti x lähestyy ääretöntä eli $x \rightarrow \infty$. Tällöin oleellista on muistaa, että funktio $1/x$ lähestyy tässä tapauksessa nollaa. Laskettaessa raja-arvoa lausekkeesta, jossa on erisuuruisia potensseja on hyvä taktiikka ottaa suurin potenssi yhteiseksi tekijäksi.

Esimerkki 8. Laske raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^3}{3x^4}.$$

Ratkaisu. Raja-arvon sisässä olevan lausekkeen korkein potenssi on 4. Otetaan sekä osoittajan että nimittäjän yhteiseksi tekijäksi siis x^4 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^3}{3x^4} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4(1 + 1/x)}{x^4(3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 + 1/x)}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

3 Kuristusperiaate

Tarkastellaan funktiota f , joka on kahden muun funktion välissä, eli

$$g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x).$$

Nyt tämän funktion käyttäytymistä voi tarkastella kuristusperiaatteen avulla. Kuristusperiaate on yksinkertainen periaate, jonka mukaan funktio, joka on kahden muun funktion välissä saa raja-arvon, joka on näiden kahden funktion raja-arvojen välissä, eli

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g_1(x) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} g_2(x).$$

Yllä täytyy ainoastaan olettaa, että funktio f on funktioiden g_1 ja g_2 välissä tietyistä x -arvosta alkaen eli kun $x > x_0$.

Esimerkki 9. Laske raja-arvo $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ kun

$$\frac{x^4 + x^3}{3x^4} \leq f(x) \leq 1/3$$

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}\frac{x^4 + x^3}{3x^4} &\leq f(x) \leq 1/3 \\ &\Rightarrow \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^3}{3x^4} &\leq \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} 1/3 \\ &\Rightarrow \\ \lim_{x \rightarrow \infty} 1/3 &\leq \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq 1/3.\end{aligned}$$

Eli $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1/3$.