Matematiikan tukikurssi

Syksy 2009

Sisältö

Osa I

Ensimmäinen välikoe

1 Matemaattisesta päättelystä

Matemaattisen analyysin kurssin (kuten minkä tahansa matematiikan kurssin) seuraamista helpottaa huomattavasti, jos opiskelija ymmärtää matemaattisen ajattelun rakenteen. Matemaattinen ajattelu lähtee tietyistä oletuksista ja *päättelee* näiden perusteella johtopäätöksiä. Tämä päättely on tiukan loogista eli deduktiivista päättelyä, jossa ei ole sijaa virheille.

Matemaattisen päättelyn rakenteen voi oppia tunnistamaan seuraavasti:

1. Tunnista, mitkä ovat tietyn väitteen oletukset.

2. Tunnista, mitkä ovat tämän väitteen johtopäätökset.

Esimerkki 1.1. Tyypillinen esimerkki matemaattisesta väitteestä (eli *lauseesta*, englanniksi *theorem*) on

Jos $f : A \to B$ on aidosti monotoninen, f on injektio.[1]

Tässä oletus on, että $f : A \to B$ on aidosti monotoninen funktio. Johtopäätös on, että f on injektio. Tässä vaiheessa ei vielä tarvitse tajuta, mitä esimerkiksi injektio tarkoittaa, mutta oleellista on oppia tunnistamaan tämä matemaattisen päättelyn rakenne: lähdetään liikkeelle oletuksista ja päätellään näistä johtopäätökset. Kun tämän rakenteen tunnistaa, helpottuu matemaattisen tekstin lukeminen selvästi.

Merkitään seuraavassa tietyn lauseen oletuksia kirjaimella P ja tämän lauseen johtopäätöksiä kirjaimella Q. Tällöin matemaattinen päättely voidaan tiivistää muotoon: ”jos P, niin Q”. Jos oletukset ovat voimassa niin johtopäätökset seuraavat. Tämän voi esittää implikaationuolen avulla

$$P \Rightarrow Q,$$

jossa $\Rightarrow$ on implikaationuoli. Tämän lauseen voi lukea muodossa ”jos P, niin Q”.

[1] Juha Partasen kurssimonisteen lause 1.16. sivulla 12.

Implikaationuolen $\Rightarrow$ idea on, että se "tuottaa" tosista väitteistä P tosia johtopäätöksiä Q.[2]

Esimerkki 1.2. Jos P on väite "n on luonnollinen luku" ja Q on väite n^2 on luonnollinen luku, niin väite $P \Rightarrow Q$ (eli "luonnollisen luvun neliö on luonnollinen luku" on pätevä päättelyketju. Se tuottaa tosista väitteistä P tosia väitteitä Q. Eli tässä tapauksessa luonnollisista luvuista luonnollisia lukuja.

Jos sekä $P \Rightarrow Q$ että $Q \Rightarrow P$ pätevät, niin merkitään $P \iff Q$. Tällöin väitteet P ja Q ovat **yhtäpitäviä** eli **ekvivalentteja**.

2 Toisen asteen yhtälöistä

Toisen asteen polynomi

$$ax^2 + bx + c$$

lienee kaikille lukiosta tuttu. Yleisimmin tavoitteena on laskea tämän polynomin **juuret**, eli nollakohdat. Ne saadaan yhtälöstä

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{2.1}$$

jossa merkki $\pm$ tarkoittaa "*plusmiinus*". Toisen asteen yhtälöllä on maksimissaan kaksi reaalilukujuurta, siis juuret

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \; x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Tarkastellaan nyt neliötä $(x+u)^2$. Yksinkertaisella laskulla saadaan $(x+u)^2 = (x+u)(x+u) = x^2 + 2ux + u^2$. Tässä neliön $(x+u)^2$ purkaminen on helppoa. Mutta kun meillä on toisen asteen polynomi $ax^2 + bx + c$, on tämä mahdollista *täydentää neliöksi*, eli tehdä yllä oleva lasku päinvastaiseen suuntaan. Otetaan esimerkki.

Esimerkki 2.1. Olkoon toisen asteen yhtälö $x^2 + 10x + 1 = 0$. Muokataan sitä aluksi siten, että yhtäsuuruusmerkin vasemmalla puolella on pelkästään x:ää sisältäviä termejä:

[2]Jos P sattuu olemaan epätosi väite, niin implikaationuoli voi tuottaa tästä joko tosia tai epätosia väitteitä. Tällä ei ole väliä: idea on että implikaationuoli tuottaa tosista väitteistä tosia. Muulla ei ole väliä.

$$x^2 + 10x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 10x = -1.$$

Seuraavaksi tutkitaan yhtäsuuruutta $(x+u)^2 = x^2+2ux+u^2$ ja yritetään muokata x^2+10x muotoon $x^2+2ux+u^2$. Tämä tapahtuu huomaamalla, että $10x = 2 \cdot 5x$ jolloin $u = 5$. Nyt voidaan lisätä 5^2 kummallekin puolelle:

$$x^2 + 2 \cdot 5x = -1 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot 5x + 5^2 = 24 \Rightarrow (x+5)^2 = 24.$$

Tässä siis toisen asteen yhtälö täydennettiin neliöksi. Kun tästä ottaa kummaltakin puolelta neliöjuuren ja vähentää kummaltakin puolelta 5, saadaan että $x = \pm\sqrt{24} - 5$.

Esimerkki 2.2. Täydennä $x^2 + 6x - 5 = 0$ neliöksi. Lasket tästä yhtälön juuret.

Ratkaisu. $x^2 + 6x - 5 = x^2 + 2 \cdot 3x - 5$, joten lisätään $3^2 = 9$ kummallekin puolelle: $x^2 + 6x - 5 = 0 \iff x^2 + 6x + 9 - 5 = 9$.

Nyt $x^2+6x+9 = (x+3)^2$, joten $x^2+6x+9-5 = 9 \iff (x+3)^2 - 5 = 9 \iff (x+3)^2 = 14$. Täten $x + 3 = \pm\sqrt{14}$ ja juuret ovat $x_1 = \sqrt{14} - 3$ ja $x_2 = -\sqrt{14} - 3$.

Esimerkki 2.3. Todista toisen asteen yhtälön kaava (2.1) täydentämällä yllä olevaa esimerkkiä seuraten $ax^2 + bx + c = 0$ neliöksi.

Ratkaisu. Jaetaan yhtälö a:lla:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 \iff \\ x^2 + (b/a)x + (c/a) = 0. \end{aligned}$$

Tämä voidaan nyt täydentää neliöksi:

$$\begin{aligned} x^2 + (b/a)x + (c/a) &= x^2 + 2 \cdot \left(\frac{b}{2a}\right) x + \left(\frac{c}{a}\right) \\ &= x^2 + 2 \cdot \left(\frac{b}{2a}\right) x + \underbrace{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{=0} + \frac{c}{a} \\ &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Tämän nollakohdat ratkeavat nyt seuraavasti:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0 \iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)=\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}$$
$$x=\frac{-b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$$
$$=\frac{-b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2}}$$
$$=\frac{-b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$
$$=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$
$$=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Tutkitaan nyt polynomia x^2-4x+3. Jos yhtälöön kokeilee eri arvoja x:n paikalle, huomaa pian että polynomin nollakohdat ovat $x_1=1$ ja $x_2=3$. Huomataan myös, että $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)=(x-x_1)(x-x_2)$. Tämä tulos pätee yleisesti: jos toisen asteen polynomin juuret ovat d ja e, niin tämä polynomi voidaan esittää muodossa $(x-d)(x-e)$.

Esimerkki 2.4. Laske yhtälön $2x^2+4x-6$ nollakohdat x_1 ja x_2, ja ilmaise tämän jälkeen polynomi tulomuodossa $(x-x_1)(x-x_2)$.

Ratkaisu. Kokeilemalla eri x:n arvoja saadaan, että nollakohdat ovat $x_1=1$ ja $x_2=-3$, joten $2x^2+4x-6=(x-1)(x-(-3))=(x-1)(x+3)$.

3 Joukko-oppia

Matematiikassa **joukko** on mikä tahansa kokoelma objekteja. Esimerkiksi joukkoa[3] A, jonka jäsenet ovat numerot 1, 2 ja 5 merkitään $A=\{1,2,5\}$. Joukon jäsenet määrittävät joukon täydellisesti eli joukko on yhtä kuin jäsenensä. Täten joukot $A=\{1,2,5\}$ ja $B=\{1,2,1,5,2\}$ ovat samoja, sillä niillä on samat jäsenet. Sillä kuinka monta kertaa kyseiset jäsenet luetellaan kaarisulkeiden välissä ei ole merkitystä.

[3]Matematiikassa joukkoa merkitään yleensä aakkosten alkupään isoilla kirjaimilla, kuten A tai B.

Esimerkki 3.1. Joukkoa johon kuuluu kaikki positiiviset kokonaisluvut voidaan merkitä $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, 4, ...\}$. Vastaavasti kaikkien kokonaislukujen joukkoa $\mathbb{Z}$ voidaan merkitä $\{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, ...\}$.

Esimerkki 3.2. Joukkoa, johon ei kuulu yhtään jäsentä, eli **tyhjää joukkoa** merkitään yleensä symbolilla $\emptyset$ tai pelkillä kaarisulkeilla: $\{\}$. Tällainen joukko on siis matematiikan maailmassa olemassa, ja se aiheuttaa paljon hankaluuksia. Moni matemaattinen lause alkaa oletuksella "olkoon A epätyhjä joukko". **Epätyhjä joukko** on siis mikä tahansa muu joukko kuin $\{\}$. Huomautus: esimerkiksi joukko $\{0\}$ ei siis ole tyhjä joukko, vaan joukko jonka ainoa jäsen on luku 0.

Esimerkki 3.3. Jos $A = \{2, 7, e\}$ ja $B = \{7, 8, 12\}$, niin joukkoa C joka sisältää A:n ja B:n voidaan merkitä $C = \{A, B\} = \{\{2, 7, e\}, \{7, 8, 12\}\}$. Siispä joukkojen jäsenet voivat myös itse olla joukkoja.

Joukkoon kuulumista merkitään symbolilla $\in$. Jos $A = \{1, 2, 5\}$, $1 \in A$ ja $2 \in A$, mutta $75 \notin A$ (eli "75 ei sisälly joukkoon A").

Esimerkki 3.4. Esimerkissä 3.3 ei päde että $2 \in C$. Sen sijaan $\{2, 7, e\} \in C$.

Joukko B on joukon A **osajoukko** (merkitään $B \subset A$), jos jokainen B:n jäsen on myös A:n jäsen eli "jos $x \in B$ niin $x \in A$".

Esimerkki 3.5. Jos $A = \{1, 2, 7\}$ ja $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, niin selvästi jokainen A:n alkio on myös B:n alkio eli $A \subset B$.

Esimerkki 3.6. Jos $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, , ...\}$ on luonnollisten lukujen joukko, niin nämä luonnollisesti sisältyvät reaalilukuihin $\mathbb{R}$ eli $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

Esimerkki 3.7. Joukko on aina oma osajoukkonsa eli $A \subset A$ (yritä perustella tämä itsellesi).

Esimerkki 3.8. Joukot A ja B ovat samoja (merkitään $A = B$), jos niillä on samat jäsenet, eli jos jokainen A:n jäsen on B:n jäsen ja jokainen B:n jäsen on A:n jäsen. Yritä perustella itsellesi, että "$A = B$ " tarkoittaa täsmälleen samaa kuin "$A \subset B$ ja $B \subset A$ ". [4]

Joukkoa A voi merkitä luettelemalla kaarisulkeiden välissä kaikki sen jäsenet, kuten edellisissä esimerkeissä. Usein joukossa on kuitenkin niin monta

[4] Yleinen todistustekniikka matematiikassa on osoittaa kahden joukon A ja B yhtäsuuruus $A = B$ osoittamalla ensiksi, että $A \subset B$ ja tämän jälkeen että $B \subset A$.

jäsentä, että tämä on mahdotonta. Tällöin joukkoa merkitään yleensä kuvaamalla sen jäsenet jollain "kaavalla". Täten esimerkiksi parillisten lukujen joukkoa A voidaan merkitä $A = \{x \mid x \text{ on parillinen } \} = \{0, 2, -2, 4, -4, \dots\}$ ja alkulukujen joukkoa voidaan merkitä $P = \{2, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\} = \{x \mid x \text{ on alkuluku}\} = \{y \mid y \in \mathbb{Z}_+ \text{ on jaollinen ainoastaan itsellään ja yhdellä}\}$.

Esimerkki 3.9. Täten väite $b \in \{x \mid x \text{ on parillinen } \}$ tarkoittaa, että b kuuluu parillisten lukujen joukkoon, eli että b on parillinen.

Esimerkki 3.10. Väite $S \subset \{x \mid x \text{ on parillinen } \}$ puolestaan tarkoittaa, että S on joukko parillisia lukuja. Voi olla esimerkiksi, että $S = \{2\}$ tai $S = \{2, 4, 8888\}$.

Esimerkki 3.11. Kirjoita yllä olevalla tavalla ("kaavatavalla") joukko $A = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$.

Ratkaisu: Selkeästi A koostuu viidellä jaollisista positiivisista kokonaisluvuista eli $A = \{x \mid x \text{ on viidellä jaollinen positiivinen kokonaisluku}\}$.

Kirjain x on tässä kirjain, jolla ei ole itsessään mitään erityistä merkitystä. Täten edelliseen esimerkkiin kelpaa yhtä hyvin vastaukseksi vaikkapa $A = \{y \mid y \text{ on viidellä jaollinen}\}$ tai $A = \{l \mid l \text{ on viidellä jaollinen}\}$ tai $A = \{\xi \mid \xi \text{ on viidellä jaollinen}\}$.

Joukkojen A ja B **yhdiste** $A \cup B$ on joukko, johon kuuluu kaikki jäsenet, jotka kuuluvat A:han, B:hen tai kumpaankin.

Esimerkki 3.12. Jos $A = \{1, 2, 5\}$ ja $B = \{1, 2, 7\}$, $A \cup B = \{1, 2, 5, 7\}$.

Esimerkki 3.13. Jos joukko A sisältää maailman kaikki naiset ja B maailman kaikki miehet, $A \cup B$ sisältää maailman kaikki miehet ja naiset.

Joukkojen A ja B **leikkaus** $A \cap B$ on yksinkertaisesti joukko, joka sisältää kaikki jäsenet, jotka kuuluvat sekä A:han että B:hen.

Esimerkki 3.14. Jos edelleen $A = \{1, 2, 5\}$ ja $B = \{1, 2, 7\}$, $A \cap B = \{1, 2\}$

Esimerkki 3.15. Jos $\mathbb{N}$ on luonnollisten lukujen joukko ja $\mathbb{R}$ on reaalilukujen joukko, on $\mathbb{N} \cap \mathbb{R} = \mathbb{N}$. Siis aina kun $A \subset B$, $A \cap B = A$ (yritä todistaa asia itsellesi).

Kenoviivalla $\setminus$ voidaan poistaa joukosta alkioita. Esimerkiksi joukko $C = A \setminus B$ on joukko joka sisältää kaikki joukon A alkiot, jotka eivät kuulu joukkoon B.

Esimerkki 3.16. Jos joukosta $\{1, 2, 3\}$ poistetaan alkio 1, niin tätä merkitään $\{1, 2, 3\} \setminus \{1\} = \{2, 3\}$. Samoin reaaliluvuista voi poistaa kokonaisluvut merkinnällä $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

4 Funktiokäsitteestä

Funktio on sääntö, joka liittää kahden eri joukon alkioita toisiinsa. Ollakseen funktio tämän säännön on liitettävä jokaiseen **lähtöjoukon** A alkioon jokin **maalijoukon** B alkioon. Matemaattisin symbolein se näyttää seuraavalta:

$$f : A \longrightarrow B.$$

Eli: "f on funktio joukosta A joukkoon B." Siis lähtöjoukko, tässä A, on joukko, jonka alkioita liitetään B:n eli maalijoukon alkioihin.

Esimerkki 4.1. Lähtöjoukko voi olla vaikkapa $A = \{1, 2, 3\}$ ja maalijoukko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$. Eräs funktio $f : A \longrightarrow B$ voidaan määritellä kaavalla $f(x) = 2x$. Tässä x on siis lähtöjoukon A alkio eli x on 1,2 tai 3. Toinen funktio voisi olla $g(x) = 1$, joka liittää jokaiseen A:n alkioon numeron 1. Eli esimerkiksi $g(3) = 1$ ja $f(2) = 4$.

Tarkempi tapa ilmaista, että f on funktio A:sta B:hen on seuraava:

$$\forall x \in A \ \exists! \ y \ \in B, f(x) = y$$

Eli: *kaikille* ($\forall$) alkioille A:ssa on olemassa *tasan yksi* ($\exists!$) alkio y B:ssä siten että $f(x) = y$. Funktio siis liittää jokaiseen A:n alkioon yhden alkion B:stä. Tätä määritelmää kannattaa pohtia kunnes sen tajuaa.

Esimerkki 4.2. Funktio $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1$ on funktio, sillä se toteuttaa edellä mainitun määritelmän. Lähtöjoukko on tässä koko reaalilukujen joukko, kuten maalijoukkokin. Huomaa, että maalijoukko voi sisältää arvoja y joita funktio ei saa millään x:n arvolla.

Esimerkki 4.3. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ ei ole funktio, sillä se ei liitä *jokaiseen* lähtöjoukon $\mathbb{R}$ alkioon maalijoukon alkiota: kyseinen lauseke ei ole nollalla määritelty, joten kaikille lähtöjoukon alkioille (nimenomaan nollalle) se ei liitä maalijoukon alkiota.

Esimerkki 4.4. Sen sijaan jos edellisen esimerkin lähtöjoukosta poistetaan nolla, saamme funktion:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1/x.$$

Esimerkki 4.5. Funktio-käsitettä lienee syytä valaista ei-numeerisilla esimerkeillä. Jos vaikkapa A sisältää kaikki maailman valtiot ja B kaikki maailman pääkaupungit funktio $f : A \longrightarrow B$ voidaan määrittää funktioksi, joka ilmaisee jokaisen maan pääkaupungin. Esimerkiksi f(Suomi)= Helsinki ja

$f(\text{Vietnam}) = \text{Hanoi}$.

Onko kyseessä funktio? Yllä mainittu "funktio" ei itse asiassa olekaan funktio, jos:

1. Kaikilla mailla ei ole pääkaupunkia (miksi?) tai
2. Joillain mailla on monta pääkaupunkia (miksi?)[5]

Funktion **määrittelyjoukko** on helppo ymmärtää. Kyseessä on niiden x-arvojen joukko, joilla funktio on määritelty. Laajin mahdollinen määrittelyjoukko taas sisältää kaikki ne arvot, joilla funktion määrittelevä lauseke on määritelty. Esimerkiksi funktio $f(x) = 1/x$ ei ole määritelty nollassa, koska nollalla ei saa jakaa. Se on kuitenkin määritelty kaikissa muissa pisteissä paitsi nollassa, joten sen laajin mahdollinen määrittelyjoukko on $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Vastaavasti $\sqrt{x}$ ei ole määritelty kun $x < 0$. Se on määritelty kuitenkin muulloin, joten sen laajin määrittelyjoukko on $x \geq 0$.

Esimerkki 4.6. Lähtöjoukon saa määrittää vapaasti, kunhan funktio on lähtöjoukon alkioilla määritelty. Esimerkiksi $f : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ on eri funktio kuin $g : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 1/x$, koska niiden lähtöjoukot ei ole samoja. Tämä osoittaa, kuinka pelkkä funktion kaava $f(x)$ ei määritä funktiota, vaan myös lähtö- ja maalijoukot on mainittava. Usein nämä jätetään kuitenkin mainitsematta, jolloin lähtöjoukoksi oletetaan suurin mahdollinen lähtöjoukko.

Funktio on **injektio**, jos se maalaa eri lähtöjoukon alkioille ("x-arvoille") eri maalijoukon alkiot ("y-arvot"). Eli f on injektio, jos

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Yllä oleva kaava sanoo, että "jos valitaan kaksi erisuuruista x-arvoa, niin funktion arvo näissä pisteissä ei ole sama".

Sen että tietty funktio on injektio voi todistaa valitsemalla kaksi eri lähtöjoukon arvoa, x_1 ja x_2, ja osoittamalle että funktio saa näissä pisteissä eri arvon, eli että $f(x_1) \neq f(x_2)$. Toinen tapa todistaa injektiivisyys on valita kaksi pistettä, x_1 ja x_2 siten että $f(x_1) = f(x_2)$ ja todistaa, että tästä seuraa $x_1 = x_2$.[6]

[5] Wikipedian mukaan tämä ei ole funktio: "Valtioilla saattaa olla useita pääkaupunkeja, kuten Alankomailla (Amsterdam, Haag), Bolivialla (La Paz, Sucre) ja Etelä-Afrikalla (Pretoria, Kapkaupunki, Bloemfontein). Toisaalta Naurun tasavallalla ei ole pääkaupunkia lainkaan."

[6] Tämä johtuu siitä logiikan säännöstä, että väite "jos P, niin Q" on yhtäpitävä väitteen "jos ei Q, niin ei P" kanssa.

Esimerkki 4.7. $f(x) = x^2$ ei ole injektio, sillä esimerkiksi $f(1) = 1 = f(-1)$. Näin siis yllä oleva ehto ei toteudu: $1 \neq -1$, mutta $f(1) = f(-1)$.

Helppo tapa tarkistaa onko jokin funktio injektio on piirtää sen kuvaaja ja katsoa leikkaako mikään vaakasuora viiva funktion kuvaajaa *useammin kuin kerran*. Jos leikkaa, funktio ei ole injektio.

Funktio f on **surjektio**, jos se maalaa koko maalijoukkonsa, eli jos jokaisella maalijoukon alkiolla y on olemassa lähtöjoukon alkio x siten että $f(x) = y$.

Esimerkki 4.8. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ei ole surjektio, sillä jos valitaan vaikkapa maalijoukon alkio $y = -1$, niin ei ole olemassa lukua x jolla $f(x) = -1$. Toisaalta $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$ on surjektio (jossa $\mathbb{R}_+$:n katsotaan sisältävän nollan).

Jos funktio on sekä injektio, että surjektio, se on **bijektio**. Bijektiolla on aina **käänteisfunktio** f^{-1}. Käänteisfunktion idea on se, että jos $f(x) = y$, niin $x = f^{-1}(y)$. Alla selviää, kuinka käänteisfunktio ratkaistaan.

Esimerkki 4.9. Valitaan funktio $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^3$. Todista että tällä on käänteisfunktio. Etsi se.

Ratkaisu. Funktiolla on käänteisfunktio, jos se on bijektio (eli surjektio ja injektio). Todistetaan että f on bijektio:

1. **Injektio**. Valitaan $x_1 \neq x_2$. On todistettava, että $f(x_1) \neq f(x_2)$. Jos x_1 ja x_2 ovat erimerkkisiä (eli toinen positiivinen ja toinen negatiivinen), on selvästi $f(x_1) \neq f(x_2)$, koska silloin myös näistä toinen on negatiivinen ja toinen positiivinen. Oletetaan siis, että x_1 ja x_2 ovat samanmerkkisiä. Muokataan kyseistä yhtälöä:

   $$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 \neq 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) \neq 0 \Rightarrow x_1^3 \neq x_2^3 \Rightarrow 4x_1^3 \neq 4x_2^3.$$

   Tässä siis valittiin kaksi erillistä x-arvoa, ja osoitettiin, että funktio saa näillä arvoilla eri y-arvot. Tämä on sama asia kuin että funktio on injektio.

2. **Surjektio**. Valitaan jokin y, joka kuuluu maalijoukkoon, eli $y \in \mathbb{R}$. On todistettava, että on olemassa x siten, että $y = 4x^3$. Mikä tämä x on? Muokataan yhtälö: $y = 4x^3 \iff y/4 = x^3 \iff (y/4)^{1/3} = x$. Nyt $f((y/4)^{1/3}) = y$ eli jokaisella maalijoukon alkiolla y on olemassa jokin lähtöjoukon alkio x, nimenomaan alkio $x = (y/4)^{1/3}$, jolla $f(x) = y$. Tämä on sama asia kuin että funktio on surjektio.

3. **Käänteisfunktio**. Käänteisfunktion etsimiseksi yhtälö $y = 4x^3$ pitää ratkaista x:n suhteen. Tämä tehtiin jo äskeisessä kohdassa, saatiin $(y/4)^{1/3} = x$. Siispä käänteisfunktioksi on ehdolla $f^{-1}(x) = (x/4)^{1/3}$. Tämän todistamiseksi on osoitettava, että

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

ja

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x.$$

Toisin sanottuna: kun funktion lauseke sijoitetaan käänteisfunktion lausekkeeseen, pitäisi saada x, samoin kuin jos käänteisfunktion lauseke sijoitetaan funktion lausekkeeseen. Tehdään näin:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left((4x^3)\right) = \left(4x^3/4\right)^{1/3} = (x^3)^{1/3} = x.$$

Ja:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = f\left((x/4)^{1/3}\right) = 4\left((x/4)^{1/3}\right)^3 = 4(x/4) = x.$$

Täten f ja f^{-1} ovat toistensa käänteisfunktioita.

Huomioi, että jos jotain ei-injektiivistä funktiota yritetään yllä käytetyllä menetelmällä todistaa injektioksi, jokin menee pieleen. Jos esimerkiksi $f(x) = x^2$, edellinen todistus menisi pieleen:

Valitaan $x_1 \neq x_2$. Muokataan kyseistä yhtälöä: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^2 \neq x_2^2$ on epäpätevä päättelyketju, sillä se ei päde esimerkiksi arvoilla $x_1 = 1, x_2 = -1$. Samoin jos ei-surjektiivista funktiota yrittää todistaa surjektiiviseksi, käytetty päättelyketju ei etene loogisesti jossain kohdassa.

Esimerkki 4.10. Osoita, että funktio $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f(x) = 3x + 1$ on injektio.

Ratkaisu. Valitaan $x_1 \neq x_2$. Nyt $3x_1 \neq 3x_2$ ja $3x_1 + 1 \neq 3x_2 + 1$ eli $f(x_1) \neq f(x_2)$, joten funktio on injektio.

Esimerkki 4.11. Funktio $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f(x) = 1$ ei ole injektio. Kokeile kuitenkin todistaa se injektioksi, ja katso miksi todistus ei onnistu.

Ratkaisu. Esimerkiksi $f(1) = f(2) = 1$, joten eri lähtöjoukon arvoilla funktio saa saman arvon eli se ei ole injektio. Jos tätä yrittää todistaa injektioksi, pitäisi päätyä oletuksesta $x_1 \neq x_2$ tulokseen $f(x_1) \neq f(x_2)$, joka kuitenkaan ei päde millään x_1 ja x_1:n valinnoilla.

Kahden funktion, $f : B \longrightarrow C$ ja $g : A \longrightarrow B$, **yhdistetty kuvaus**, $f \circ g = f\left(g(x)\right) : A \longrightarrow C$ on funktio, joka kuvaa g:n lähtöjoukon alkion x ensin g:n maalijoukon alkioksi $g(x)$ ja tämän jälkeen kuvaa kyseisen maalijoukon alkion f:n maalijoukon alkioksi $f(g(x))$. Esimerkki valaisee asiaa.

Esimerkki 4.12. Jos $f(x) = 2x^5$ ja $g(x) = 4x$ (kummankin määrittely- ja maalijoukot ovat koko reaalilukujen joukko), voidaan muodostaa yhdistetty kuvaus $f \circ g = f\left(g(x)\right) = f(4x) = 2(4x)^5 = 1024x^5$. Tässä siis x matkaa seuraavasti $x \to 4x \to 1024x^5$. Toisaalta $g \circ f$ määritellään vastaavasti: $g \circ f = g\left(f(x)\right) = g(2x^5) = 4(2x^5) = 8x^5$. Yleensä siis $f \circ g \neq g \circ f$.

Esimerkki 4.13. Jos $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, f(x) = 2x$ ja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$, niin yhdistetty kuvaus $f \circ g$ ei ole määritelty, koska funktion g maalijoukko on eri kuin funktion funktion f lähtöjoukko. Tämä johtu siitä, että kun funktio g maalaa esimerkiksi alkiosta $1/2$ alkion $1/4$, niin funktio f, jonka lähtöjoukkoon kuuluvat vain kokonaisluvut, ei ole määritelty pisteessä $1/4$. Täten yhdistetyssä funktiossa $f \circ g$ funktion g:n maalijoukon on aina oltava yhtä kuin f:n lähtöjoukko.

Esimerkki 4.14. Yhtälö joka määritellään implisiittisesti $y^2 = x$ ei määritä yksikäsitteisesti funktiota $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f(x) = y$. Miksi ei?

Ratkaisu. Jos $y^2 = x$, niin $y = \pm\sqrt{x}$. Täten esimerkiksi kun $x = 1$, niin $y = 1$ tai $y = -1$ eli kyseessä ei voi olla funktio, koska tietyille x-arvolle annetaan useampi y-arvo.

Esimerkki 4.15. Edellisen tehtävän käyrä voidaan jakaa kahteen funktioon f_1 ja f_2. Tee näin (käytä graafista laskinta apuna). Muodosta kyseisten funktioiden lausekkeet.

Ratkaisu. Ensimmäinen funktio f_1 on $y = \sqrt{x}, x \geq 0$ ja toinen funktio f_2 vastaavasti $y = -\sqrt{x}, x \geq 0$.

Esimerkki 4.16. Miksi $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ ei ole funktio? Kuinka lähtöjoukkoa pitäisi rajoittaa, jotta siitä saataisiin funktio?

Ratkaisu. Yllä oleva lauseke ei ole määritelty lähtöjoukossaan (neliöjuuri ei ole määritelty negatiivisilla arvoilla), joten se ei määritä funktiota. Lähtöjoukoksi voi rahoittaa esimerkiksi positiiviset reaaliluvut $\mathbb{R}_+$.

Esimerkki 4.17. Olkoon $f(x) = x^2$ ja $g(x) = 5x + 12$. Etsi $f \circ g$ ja $g \circ f$. Mitä rajoituksia lähtö- ja maalijoukoille vaaditaan?

Ratkaisu. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(5x+12) = (5x+12)^2$. Tässä f:n lähtöjoukon ja g:n maalijoukon pitää täsmätä. Puolestaan $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 5x^2+12$, missä f:n maalijoukon on oltava yhtä kuin g:n lähtöjoukko.

Esimerkki 4.18. Onko $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ surjektio? Injektio?

Ratkaisu. Se selvästi ei ole surjektio, koska x^4 on aina ei-negatiivinen, vaikka maalijoukkoon kuuluu myös negatiiviset luvut. Sen sijaan se on injektio, koska lähtöjoukon alkiot ovat positiiviset reaaliluvut ja jos $x_1, x_2 > 0$ ja $x_1 \neq x_2$ niin $x_1^4 \neq x_2^4$.

Esimerkki 4.19. Onko $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^4$ surjektio? Injektio?

Ratkaisu. Tämä puolestaan ei ole injektio, koska esimerkiksi $f(1) = 1 = f(-1)$.

Esimerkki 4.20. Osoita, että $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x + 5$ on bijektio. Etsi sen käänteisfunktio.

Ratkaisu. Se on injektio, koska jos $x_1 \neq x_2$ niin $4x_1 \neq 4x_2$ joten $4x_1 + 5 \neq 4x_2 + 5$. Se on myös surjektio, koska jos y on jokin maalijoukon alkio, niin $y = 4x + 5$ ratkeaa muotoon $x = (y - 5)/4$ eli tällä alkiolla y on lähtöjoukon alkio $(y - 5)/4$, jolla tämä y maalautuu. Täten funktio on bijektio. Käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = (x - 5)/4$.

5 Määrittelyjoukoista

Tarkastellaan funktiota, jonka määrittelevä yhtälö on $f(x) = \sqrt{x}$. Jos funktion lähtöjoukoksi määrittelee vaikkapa suljetun välin $[0, 1]$, on funktio määritelty tällä välillä. Sen sijaan jos lähtöjoukkoa yrittää valita välin $[-1, 1]$, ei tämä onnistu koska neliöjuurifunktio ei ole negatiivisilla arvoilla määritelty.

Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ **suurin mahdollinen määrittelyjoukko** on sellainen joukko A, joka sisältää kaikki mahdolliset x-arvot, joilla tämä funktio on määritelty. Siispä koska neliöjuuri on määritelty, kun x ei ole negatiivinen niin tämä laajin mahdollinen märittelyjoukko on väli nollasta äärettömään eli joukko $A = [0, \infty)$.

Esimerkki 5.1. Vastaavasti funktio $g(x) = 1/x$ on määritelty kaikilla reaaliluvuilla, paitsi nollalla. Täten sen laajin mahdollinen määrittelyjoukko on $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Jos funktio f on edelleen määritelty yhtälöllä $f(x) = \sqrt{x}$, on yhdistetyn funktion $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 1/\sqrt{x}$ laajin mahdollinen määrittelyjoukko kaikki positiiviset reaaliluvut eli reaaliluvut $x > 0$.

6 Relaatioista

Oletetaan kaksi alkiota, a ja b. Näistä kumpikin kuuluu johonkin tiettyyn joukkoon, mahdollisesti ne kuuluvat eri joukkoihin. Merkitään $a \in A$ ja $b \in B$. Voidaan ajatella a:n ja b:n välillä olevan **relaation**, jota merkitään aRb, mikä luetaan "a relaatio b". Mitä tämä tarkoittaa? Osoittautuu, että relaatio R voi olla melkein mikä tahansa, kuten seuraavat esimerkit osoittavat.

Esimerkki 6.1. Oletetaan, että A ja B ovat reaalilukujoukkoja. Merkitään aRb, jos $a > b$. Eli kyseessä on relaatio, "suurempi kuin" relaatio. Huomaa, että aRb ei tarkoita samaa kuin bRa: edellinen tarkoittaa tässä esimerkissä $a > b$, jälkimmäinen $b > a$.

Esimerkki 6.2. Voidaan ajatella, että a ja b eivät ole numeroita, vaan vaikkapa ihmisiä (eli $a \in I$ ja $b \in I$, jossa I on ihmisten joukko). Tällöin voidaan määritellä vaikkapa relaatio aRb tarkoittamaan, että a on sukua b:lle. Nyt vaikkapa Ilkka$R$Tomi tarkoittaa, että Ilkka on sukua Tomille.

Relaatiota a:sta b:hen voidaan ilmaista aRb, mutta myös lukuparina (a, b), joka siis tarkoittaa samaa kuin aRb (kyseessä on vain eri merkintätapa). Relaation virallinen määritelmä löytyy alta:

Määritelmä 6.1. Relaatio R lukujoukkojen A ja B välillä on yksinkertaisesti joukko lukupareja, jonka ensimmäinen alkio kuuluu joukkoon A ja toinen joukkoon B. Toisin sanottuna:

$$R \subset A \times B.$$

Relaatio on siis mikä tahansa $A \times B$:n osajoukko. $A \times B$ on puolestaan joukko kaikista luvupareista (x, y), joista $x \in A$ ja $y \in B$. Vaikkapa tuossa sukulaisuusesimerkissä A oli sama kuin B eli kaikkien ihmisten joukko I (siis $A = B = I$).

Esimerkki 6.3. Jos $A = \{1, 2, 3\}$ ja $B = \{4, 5, 6\}$, niin yksi relaatio näiden välillä on $R_1 = \{(1, 4), (2, 6)\}$, koska $R_1 \subset A \times B$. R_1 on joukon $A \times B$ osajoukko, koska sen kummankin jäsenen ensimmäinen koordinaatti kuuluu joukkoon A ja toinen koordinaatti joukkoon B.

Joukko, jossa relaatio on määritelty, on erittäin tärkeä. Kuten yllä ehkä kävikin selväksi, on relaatio erittäin yleinen ja abstrakti käsite: se on mikä tahansa $A \times B$:n osajoukko. Alla hieman lisää määritelmiä tuomaan kyseiselle käsitteelle käyttöarvoa.

Määritelmä 6.2. Relaatio joukossa $A \times B$ on **täydellinen**, jos se on määritelty kaikkien A:n ja B:n alkioiden välillä. Eli: kaikilla $a \in A$ ja $b \in B$, joko aRb tai bRa. (Lukuparimerkinnöin tämä menee seuraavasti: joko (a, b) tai (b, a)).

Esimerkki 6.4. Esimerkin 1 relaatio $>$ ei ole täydellinen, sillä kaikilla luvuilla a, b ei päde $a > b$ tai $b > a$. (Tämä ei päde, jos $a = b$).

Esimerkki 6.5. Esimerkin 2 relaatio joukossa $I \times I$ ei ole täydellinen, sillä jos se olisi, tarkoittaisi tämä että kaikki ihmiset ovat toisilleen sukua.

Esimerkki 6.6. Relaatio $\geq$ joukossa $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on täydellinen sillä kaikilla luvuilla x, y pätee, joko $x \geq y$ tai $y \geq x$ (yritä perustella tämä itsellesi).

Toinen tärkeä relaatioiden mahdollinen ominaisuus on **transitiivisuus**. Alla määritelmä:

Määritelmä 6.3. Relaatio joukossa $A \times B$ on transitiivinen jos siitä, että aRb ja bRc, seuraa että aRc.

Eli: tiedetään, että a:sta b:hen on relaatio (aRb) ja että b:stä c:hen on relaatio (bRc). Jos tästä voi päätellä, että a:sta c:hen on relaatio (aRc), on R transitiivinen.

Esimerkki 6.7. Tutkitaan relaatiota $>$. Valitaan kolme mielivaltaista lukua: a, b ja c. Oletetaan että tiedämme, että aRb ja bRc eli että $a > b$ ja $b > c$. Laittamalla nämä yhteen saadaan $a > b > c$, mistä luonnollisesti seuraa, että $a > c$. Eli aRc. Joten $>$ on transitiivinen.

Edellisessä esimerkissä lähdettiin olettamalla relaatio a:sta b:hen, (aRb), ja relaatio b:stä c:hen, (bRc). Tästä pääteltiin relaatio a:sta c:hen, aRc. Vastaavalla tavalla relaatio voidaan osoittaa transitiiviseksi. Toisaalta relaation voi osoittaa ei-transitiiviseksi löytämällä kolme alkiota, a, b ja c, jolla yllä oleva implikaatio aRb ja $bRc \Rightarrow aRc$ ei päde.

Esimerkki 6.8. Jos jälleen tarkastellaan kaikkien ihmisten joukkoa I, voidaan määritellä aRb, jos a on b kaveri. Nyt jos a ja b on kavereita ja b ja c on kavereita aRb ja bRc, ei voida päätellä, että aRc, eli että a on c:n kaveri. Joten R ei ole transitiivinen.

Yllä joukot A ja B koostuivat kuvuista kuten 1,2 tai 3. Nämä joukot voivat kuitenkin koostua myös lukupareista. Oletetaan, että A koostuu kaikista reaalilukupareista eli $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Olkoon myös $B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Merkitään A:n yleistä jäsentä (x, y) ja B:n yleistä jäsentä (u, v). Nyt yksi relaatio näiden joukkojen välillä voidaan määrittää $(x, y)R(u, v) \iff x + y > u + v$. Nyt esimerkiksi $(1, 1)R(1, 0)$, koska $1 + 1 > 1 + 0$.

Esimerkki 6.9. Määritellään relaatio R siten, että aRb tarkoittaa ”a on b:n (biologinen) sisar”. Onko R täydellinen? Transitatiivinen?

Ratkaisu. Jos relaatio R määritellään vaikkapa kaikkien ihmisten joukossa I, niin se on transitiivinen, sillä jos a on b:n sisar (eli heillä on samat vanhemmat) ja b on c:n sisar, niin a ja c ovat myös sisaria. Relaatio ei kuitenkaan ole täydellinen joukossa I, sillä täydellisyys tarkoittaisi tässä että kaikki ihmiset ovat toistensa sisaria.

Esimerkki 6.10. Onko ”on yhtä kuin” (”=”) -relaatio täydellinen? Transitiivinen?

Ratkaisu. Jos tämä relaatio määritellään reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$, niin se ei ole täydellinen sillä täydellisyys tarkoittaisi, että kaikki reaaliluvut olisivat yhtä suuria. Sen sijaan tämä relaatio on transitiivinen, sillä jos $a = b$ ja $b = c$ niin $a = c$.

Esimerkki 6.11. Olkoon $A = \{(1,1),(1,5),(1,0)\}$ ja $B = \{(1,5),(1,9),(0,0)\}$. Kirjoita relaatio $R \subset A \times B$, joka määritellään siten, että $(x,y)R(u,v) \iff x + y = u + v$

Ratkaisu. Eli toisin sanottuna alkioiden (x,y) ja (u,v) välillä on relaatio jos niiden koordinaattien summa on sama. Ainoa tapa jolla tämä pätee on ottaa kummastakin joukosta alkio $(1,5)$ eli $(1,5)R(1,5)$. Täten relaatio $R \subset A \times B$ on yhtä kuin $R = \big\{\big((1,5),(1,5)\big)\big\}$, joka koostuu siis yhdestä alkiosta $\big((1,5),(1,5)\big)$.

7 Induktiotodistus

Induktiotodistusta on loogista käyttää, kun halutaan todistaa jokin väite P siten, että se pätee kaikilla luonnollisissa luvuilla n. Eli halutaan todistaa, että $P(n)$ on tosi kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Esimerkki 7.1. Esimerkiksi $P(n)$ voisi olla väite

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Kyseinen väite siis väittää, että $P(n)$ on tosi kaikilla luonnollisilla luvuilla. On tietenkin mahdoton todistaa kyseistä lauseketta erikseen jokaisella luonnollisella luvulla, sillä näitä on ääretön määrä.

Induktiotodistuksen ideana onkin välttää tämä ongelma todistamalla väite $P(n)$ kaikilla n seuraavasti:

1. Todistamalla väite arvolla 1. Toisin sanottuna todistamalla väite $P(1)$.

2. Todistamalla, että jos kyseinen väite pätee arvolla $P(n)$, se pätee myös sitä seuraavalla arvolla. Toisin sanottuna todistamalla väite

$$P(n) \Rightarrow P(n+1).$$

Miksi tämä toimii? Oletetaan, että olemme osoittaneet, että kohdat 1. ja 2. pätevät. Nyt kohdasta 1. tiedämme, että $P(1)$ on tosi. Toisaalta sijoittamalla arvon 1 kohtaan 2. huomaamme, että jos $P(1)$ on tosi, myös $P(2)$ on tosi. Nyt tiedämme siis, että $P(2)$ on tosi. Sijoittamalla arvon 2 kohtaan 2., saamme tietää että $P(3)$ on tosi. Sijoittamalla arvon 3 kohtaan 2. saamme tietää, että $P(4)$ on tosi. Tätä prosessia toistamalla huomataan, että näin väite on tosi jokaisella luonnollisella luvulla. Mikä oli juurikin mitä halusimme todistaa.

Seuraava esimerkki valaisee kuinka induktiota käytetään käytännössä.

Esimerkki 7.2. Todista $P(n)$:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Ratkaisu:

1. Arvolla 1 $P(1)$ on tosi, sillä yhtälö pätee tällä arvolla: vasemmalle puolelle jää 1 ja oikealle puolelle $1(1+1)/2 = 1$.

2. Oletetaan että yhtälö pätee arvolla n, eli oletetaan $P(n)$ todeksi. Tällöin
$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$
Tästä pitäisi pystyä päättelemään $P(n+1)$ todeksi. On todistettava: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Ennen kuin teen näin, on syytä tarkistaa, minkä

lopputuloksen haluamme: lopputuloksen $P(n+1)$. Sijoittamalla $P(n)$:n lausekkeeseen n:n paikalle arvon $n+1$, saamme

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Meidän pitää siis saada muokattua $P(n)$ tähän muotoon. Aloitetaan jälleen $P(n)$:stä:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Lisätään kummallekin puolelle $n+1$:

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1).$$

Nyt lausekkeen vasen puoli on samassa muodossa kuin $P(n+1)$:n oikea puoli. Enää pitää saada oikeat puolet samanlaisiksi. Pitää siis osoittaa että

$$\frac{n(n+1)}{2}+n+1=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Tämä on osoitettavissa muokkaamalla seuraavasti:

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)}{2}+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2}+2\frac{(n+1)}{2}\\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2},\end{aligned}$$

mikä on sama kuin $P(n+1)$:n oikea puoli. Täten väite pätee kaikilla luonnollisilla luvuilla.

Huomaa tämän tuloksen hyödyllisyys: se kertoo esimerkiksi, että summa $1+2+3+\cdots+100$ on yhtä kuin $100(101)/2=5050$.

Esimerkki 7.3. Osoita, että jos $n>3$,

$$n!>2^n.$$

Ratkaisu:

1. Tällä kertaa väite päteekin vain arvoilla $4,5,6,\ldots$ Eli luku 4 on ensimmäinen jolla se pätee: sijoitetaan 4 yhtälöön: vasemmalta puolelta tulee $4!=24$ ja oikealta puolelta saadaan $2^4=16$, joten väite pätee arvolla 4.

2. Tehdään induktio-oletus: väite pätee arvolla $P(n)$, eli

$$n! > 2^n.$$

Meidän pitäisi saada muokattua tämä yhtälö muotoon $P(n+1)$, toisin sanottua muotoon $(n+1)! > 2^{n+1}$. Kuinka edetä? Hyvä idea on jälleen yrittää saada edes $P(n)$:n toinen puoli oikean näköiseksi; eli tehdään näin: kerrotaan kumpikin puoli $(n+1)$:llä. Saadaan:

$$(n+1)! > (2^n)(n+1).$$

Enää pitäisi saada oikea puoli muokattua muotoon 2^{n+1}. Sitä ei itse asiassa voi *muokata* tähän muotoon, mutta voimme käyttää epäyhtälöä

$$(2^n)(n+1) > (2^n)(1+1),$$

joka pätee koska $n > 1$. Mutta nyt

$$(2^n)(1+1) = (2^n)(2) = (2^{n+1}).$$

Yhdistämällä nämä saadaan:

$$(n+1)! > 2^n(n+1) > (2^n)(1+1) = (2^n)(2) = (2^{n+1}).$$

Eli

$$(n+1)! > (2^{n+1}),$$

mikä oli todistettava. Eli väite pätee induktion nojalla.

Esimerkki 7.4. Osoita induktiolla, että

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Ratkaisu:

1. Pätee, kun $n = 1$ (kokeile, jos et usko).

2. $P(n)$:

$$
\begin{aligned}
1^3+2^3+\cdots+n^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\
1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+\frac{4(n+1)^2(n+1)}{4} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{4(n+1)^2(n+1)}{4} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^2(n+1)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{2^2} \\
&= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2,
\end{aligned}
$$

mikä on $P(n+1)$.

Esimerkki 7.5. Osoita induktiolla, että

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

Ratkaisu. $P(0)$ on selvästi tosi, sillä $1/(1\cdot 2)=1/2$. Oletetaan, että $P(n)$ pätee. Tästä pitää johtaa, että $P(n+1)$ eli

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$

pätee. Muokataan väitettä $P(n)$ seuraavasti

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} &= \frac{n}{n+1}\\
\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{(n+2)n}{(n+2)(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{(n+2)n+1}{(n+2)(n+1)}\\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+2)(n+1)}\\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+2)(n+1)}\\
&= \frac{n+1}{n+2}.
\end{aligned}$$

Mikä on juurikin haluamme tulos.

Esimerkki 7.6. Osoita induktiolla, että kaikilla $n > 1$ ja $x > -1$, $x \neq 0$,

$$(1+x)^n > 1+nx.$$

Ratkaisu. Alkuarvolta vaaditaan tällä kertaa, että $n > 1$. Huomaa, että jos $n = 1$, niin väite ei päde. Sen sijaan $P(2)$ pätee: se tarkoittaa että

$$\begin{aligned}
(1+x)^2 &> 1+2x\\
x^2+2x+1 &> 1+2x\\
x^2 &> 0,
\end{aligned}$$

mikä selvästi pätee tehtävän x-arvoilla. Oletetaan nyt, että $P(n)$ pätee. Tästä tulisi johtaa tulos $P(n+1) : (1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x = 1+nx+x$. Lähdetään muokkaamaan lauseketta $P(n)$:

$$\begin{aligned}
(1+x)^n &> 1+nx\\
(1+x)^{n+1} &> (1+x)(1+nx)
\end{aligned}$$

Vielä on todistettava epäyhtälö

$$\begin{aligned}(1+x)(1+nx) &> 1+nx+x\\ 1+nx+x+nx^2 &> 1+nx+x\\ nx^2 &> 0.\end{aligned}$$

Tämä alin rivi pitää paikkansa, koska kumpikin n ja x^2 ovat positiivisia. Yllä olevan päättelyn voi suorittaa molempiin suuntiin: eli voidaan lähteä (todesta) oletuksesta $nx^2 > 0$, päätellä tästä että $1+nx+x+nx^2 > 1+nx+x$, josta taas voidaan päätellä $(1+x)(1+nx) > 1+nx+x$. Täten voidaan päätellä

$$(1+x)^{n+1} > (1+x)(1+nx) \qquad \text{ja} \qquad (1+x)(1+nx) > 1+nx+x$$

joten

$$(1+x)^{n+1} > 1+nx+x.$$

Eli $P(n+1)$ on tosi. Väite on täten tosi kaikilla luonnollisilla luvuilla.

8 Lisää induktiota

Jatketaan induktion tarkastelua esimerkin avulla. Yritetään löytää kaava n:n ensimmäisen (positiivisen) parittoman luvun summalle eli summalle $1+3+5+7+\cdots$ Huomaa, että n:s pariton luku on $2n-1$ (esimerkiksi kun tähän kaavaan laitetaan $n=3$, niin huomataan että kolmas pariton luku on $6-1=5$). Eli ideana on löytää "helppo" kaava summalle

$$1+3+\cdots+(2n-1).$$

Ensin pitäisi keksiä, mikä tämä kaava voisi olla. Hyvä taktiikka on aina kokeilla kaavaan eri n:n arvoja ja katsoa avautuuko tästä jokin "rakenne". Sijoitetaan n:n paikalle luvut 1,2,3,4 ja 5:

$$\begin{aligned}1 &= 1\\ 1+3 &= 4\\ 1+3+5 &= 9\\ 1+3+5+7 &= 16\\ 1+3+5+7+9 &= 25\end{aligned}$$

Kun näitä numeroita hetken katselee, huomaa että jokainen näistä on luonnollisen luvun neliö eli muotoa n^2. Täten voisimme arvata, että

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Tämä on toistaiseksi pelkkä arvaus, koska emme ole todistaneet sitä. Voi nimittäin olla, että tämä kaava ei toteudu tietyillä n:n arvoilla, vaikka se selvästi onkin tosi arvoilla 1,2,3,4,5. Mutta kaavan totuusarvon voi tarkistaa yrittämällä todistaa se induktiolla. Eli merkitään väitteenä $P(n)$ sitä että $1+2+3+\cdots+(2n-1) = n^2$. Induktiolla todistettaessa pitää ensin todistaa, että tämä pätee jollakin alkuarvolla. Seuraavaksi pitää todistaa implikaation $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pätevyys. Yritetään tätä:

1. $P(1) : 1 = 1^2$ pätee.

2. Nyt pitää todistaa implikaatio $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Kuten aina, on ensin helpointa kirjoittaa muoto johon halutaan päästä. Eli kirjoitetaan mitä $P(n+1)$ tarkoittaa:

$$\begin{aligned} P(n+1) : 1 + 3 + \cdots + (2(n+1) - 1) &= (n+1)^2 \\ \text{eli } 1 + 3 + \cdots + (2n+1) &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

   Lähdetään liikkeelle $P(n)$:stä. Meidän pitää todistaa implikaatio

$$\begin{aligned} &1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2 \Rightarrow \\ &1 + 3 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2 \end{aligned}$$

   Jälleen hyvä idea on saada yhtälön toinen puoli aluksi oikean näköiseksi. Lisätään yhtälön $1 + 2 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$ kummallekin puolelle $(2n+1)$, jolloin vasen puoli näyttää miltä pitääkin:

$$\begin{aligned} &1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2 \\ \Rightarrow &1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + (2n+1) \end{aligned}$$

   Enää pitää todistaa, että yhtälön oikea puoli on yhtä kuin $(n+1)^2$ eli että $n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$. Tämä tapahtuu esimerkiksi avaamalla neliö $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$. Täten väite pätee induktion nojalla kaikilla luonnollisilla luvuilla.

Yllä esiteltiin yksi tapa käyttää induktiota: löydetään kokeilemalla jokin ”rakenne” ja yritetään todistaa tämä oikeaksi induktiolla.

9 Rationaaliluvut ja irrationaaliluvut

Esimerkiksi luvut $5/3$, $27/5$ ja $-1/100$ ovat **rationaalilukuja**: ne voidaan esittää kahden kokonaisluvun osamääränä. Täten esimerkiksi 5 on rationaaliluku, koska $5 = 5/1$. Samalla tavalla voidaan järkeillä, että jokainen kokonaisluku on rationaaliluku.

Määritelmä 9.1. Rationaaliluku on luku, joka on muotoa p/q, jossa p ja q ovat kokonaislukuja eli $p \in \mathbb{Z}$ ja $q \in \mathbb{Z}$. Rationaalilukujen joukko koostuu kaikista ratonaaliluvuista:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x : x = \frac{p}{q} \text{ ja } p, q \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Huomaa, että koska esimerkiksi $4/5$ ja $7/1000$ ovat rationaalilukuja, niin niiden summa ja tulokin ovat rationaalilukuja eli $4/5 + 7/1000$ on rationaaliluku samoin kuin $4/5 \cdot 7/1000$. Yleisemmin mikä tahansa äärellinen summa tai äärellinen tulo rationaalilukuja on rationaaliluku. Myös vaikkapa $(p/q)^2 = p^2/q^2$ on rationaaliluku.

Kaikki reaaliluvut eivät kuitenkaan ole rationaalilukuja. Eli on olemassa lukuja x, joita ei voida esittää muodossa $x = p/q$ millään kokonaisluvuilla $p, q \in \mathbb{Q}$. Nämä ovat **irrationaalilukuja**. Jos x on irrationaaliluku, merkitään $x \in \mathbb{I}$. Esimerkiksi e (Neperin luku) ja π ovat irrationaalilukuja. Reaaliluvut koostuvat rationaali- ja irrationaaliluvuista. Eli:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Huomaa, että $1/10 = 2/20 = 3/30 = \cdots$, joten minkään rationaaliluvun esitys kahden kokonaisluvun osamääränä ei ole uniikki. Kuitenkin jokainen rationaaliluku voidaan esittää uniikisti muodossa (p^*/q^*) siten että p^*:llä ja q^*:lla ei ole yhteisiä tekijöitä. Yllä $1/10$ on tällainen esitys, jossa $p^* = 1$ ja $q^* = 10$. Taas $2/20$ ei ole tällainen esitys, koska luvuilla 2 ja 20 on yhteinen tekijä (luku 2).

Näitä ideoita käytetään seuraavassa, kun todistetaan että $\sqrt{2}$ ei ole rationaaliluku. Todistuksessa tehdään vastaoletus, että $\sqrt{2}$ on muotoa p/q. Sen jälkeen osoitetaan, että näillä luvuilla p ja q on pakosti yhteisiä tekijöitä. Tästä seuraa, että lukua $\sqrt{2}$ ei voi esittää muodossa (p^*/q^*), jossa p^*:llä ja q^*:lla ei ole yhteisiä tekijöitä.

Esimerkki 9.1. $\sqrt{2}$ ei ole rationaaliluku.

Todistus. Tehdään vastaoletus: oletetaan, että $\sqrt{2}$ on muotoa p/q. Yllä todetiin, että tällöin on olemassa muoto p/q, jossa p:llä ja q:lla ei ole yhteisiä tekijöitä. Eli $\sqrt{2} = p/q$. Nostetaan nämä toiseen potenssiin: $2 = p^2/q^2 \iff 2q^2 = p^2$. Nyt p^2 on kaksi kertaa kokonaisluku q^2. Täten p^2 on kahdella jaollinen. Ainoa tapa jolla p^2 voi olla kahdella jaollinen on se, että p on myös kahdella jaollinen. Tällöin p^2 on neljällä jaollinen. Nyt $q^2 = p^2/2$ on myös kahdella jaollinen ja täten q on kahdella jaollinen. Täten luku 2 on sekä p:n että q:n tekijä, joten lukua $\sqrt{2}$ ei voi esittää kahden kokonaisluvun osamääränä. Se ei siis ole rationaaliluku.

Tässä siis päättelyketju etenee seuraavasti:

1. Oletetaan, että $\sqrt{2}$ on muotoa p/q, jossa luvuilla p ja q ei ole yhteisiä tekijoitä.

2. Osoitetaan, että tästä seuraa että luvuilla p ja q on yhteinen tekijä, 2. Tämä on ristiriidassa kohdan 1. kanssa, joten $\sqrt{2}$ ei voi olla muotoa p/q.

Esimerkki 9.2. Osoita, että jos x on irrationaaliluku, ja r on rationaaliluku niin $x + r$ on irrationaaliluku.

Ratkaisu: Tehdään jälleen vastaoletus: oletetaan että $x + r = p/q$, jossa p/q on rationaaliluku. Nyt $x = p/q - r$ eli x on kahden rationaaliluvun erotus, mutta koska kahden rationaaliluvun erotus on rationaaliluku, niin tämä tarkoittaisi, että x olisi rationaaliluku.

Täten koska esimerkiksi π on irrationaaliluku, niin myös esimerkiksi $\pi + 1$ irrationaaliluku.

Esimerkki 9.3. Osoita, että jos x on irrationaaliluku ja r on rationaaliluku, niin rx on myös irrationaaliluku.

Ratkaisu. Tehdään vastaoletus: $rx = p/q$, jossa p/q on rationaaliluku. Nyt

$$x = \frac{1}{r}\frac{p}{q},$$

eli nyt x on kahden rationaaliluvun tulona rationaalinen. Tämä on ristiriita, ja on pakko olla että rx on irrationaalinen.

Täten koska π on irrationaaliluku, niin myös esimerkiksi 2π on irrationaaliluku.

10 Binomikaava

Luvun n **kertoma** on tulo kaikista luvuista yhdestä lukuun n asti: $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. Tätä merkitään $n!$. Täten esimerkiksi $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Kertomaa voidaan käyttää esimerkiksi seuraavasti: se kertoo kuinka monella tavalla kirjainsarjan ABC voi järjestellä: ensimmäisen kirjaimen voi valita kolmesta vaihtoehdosta, toisen kirjaimen kahdesta jäljellä olevasta vaihtoehdosta ja kolmanneksi kirjaimeksi on jäljellä vain yksi kirjain. Täten järjestyksiä on $3! = 6$ kappaletta:

ABC	ACB
BAC	BCA
CAB	CBA

Kertoma $n!$ kertoo esimerkiksi myös, kuinka monella tavalla n ihmisiä voi laittaa jonoon. Täten 5 ihmistä voi laittaa jonoon peräti $5! = 120$ eri tavalla. $0!$ määritellään siten että $0! = 1$

Binomikerroin $\binom{n}{k}$ ("n yli k:n") puolestaan vastaa kysymykseen: kuinka monella tavalla n:stä objektista voi valita k objektia. Esimerkiksi $\binom{5}{1}$ kertoo kuinka monella tavalla viidestä objektista voi valita yhden objektin (vastaus: viidellä tavalla). Binomikerroin määritellään kertomien avulla:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{10.2}$$

Täten voidaan varmentaa esimerkiksi, että $\binom{5}{1} = 1$ koska

$$\frac{n!}{k!(n-k!)} = \frac{5!}{1!4!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5.$$

Täten $\binom{5}{2} = 10$ kertoo että viidestä ihmisestä voi valita kaksi henkeä kymmenellä eri tavalla. Huomaa erityisesti $\binom{n}{0} = 1$ eli n:stä ihmisestä voi valita 0 ihmistä yhdellä tavalla.

Huomaa, että jos n:n objektin joukosta valitaan k objektia, niin samalla tulee automaattisesti valittua loput $n-k$ objektia. Täten

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Eli jos esimerkiksi valmentaja valitsee viidestä hengestä joukkueeseen kaksi pelaajaa, niin $\binom{5}{2}$ kertoo kuinka monella tavalla tämän voi tehdä. Valmentaja voi kuitenkin yhtäpitävästi valita myös ne henkilöt, jotka eivät pääse joukkueeseen, he voidaan valita $\binom{5}{5-2} = \binom{5}{3}$ tavalla, joka on yhtä kuin $\binom{5}{2}$.

Esimerkki 10.1. Todista kaava $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ käyttämällä binomikertoimen määrittävää yhtälöä .

Ratkaisu. Määritelmän mukaisesti

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k!(n-k)!} \qquad \text{ja} \qquad \binom{n}{n-k} = \frac{n}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n}{(n-k)!k!}$$

Nämä ovat selvästi samoja.

Binomikaava käyttää näitä ideoita löytääkseen kaavan kahden luvun summan potenssille

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{n \text{ kertaa } (x+y)}.$$

Kirjoitetaan aluksi tämä ensimmäisillä n:n arvoilla:

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2\\ (x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\\ (x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4\end{aligned}$$

Nämä kaikki noudattavat kaavaa:

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + nxy^{n-1} + y^n$$

eli

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

Esimerkki 10.2. Varmenna, että yllä olevat yhtälöt noudattavat tätä kaavaa.

Ratkaisu. Laske esimerkiksi kaavassa $(x+y)^4$ termit $\binom{4}{r}$, $r = 0, 1, 2, 3, 4$.

Kaava

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

on binomikaava. Se kertoo, että termin $x^{n-r}y^r$ kerroin kaavassa $(x+y)^n$ on yhtä kuin $\binom{n}{r}$.

Esimerkki 10.3. Etsi termin x^3y^2 kerroin lausekkeessa $(x+y)^5$.

Ratkaisu: Binomikaavan mukaan termin $x^{n-r}y^r$ kerroin kaavassa $(x+y)^n$ on yhtä kuin $\binom{n}{r}$. Koska selvästi $n = 5$ ja $r = 2$, niin tämä kerroin on $\binom{5}{2} = 10$.

Esimerkki 10.4. Etsi termin x^3y^2 kerroin lausekkeessa $(2x+y)^5$.

Ratkaisu. Termin $(2x)^3y^2$ kerroin on $\binom{5}{2} = 10$. Toisaalta termin x^3y^2 kerroin on tällöin $2^3 \cdot 10 = 80$.

Esimerkki 10.5. Osoita binomikaavan avulla, että

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Vihje: valitse x ja y sopivasti.

Ratkaisu. Binomikaava kertoo, että

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n.$$

Kun tähän sijoittaa $x = y = 1$, vasen puoli on $(1+1)^n = 2^n$. Oikealla puolella x^ry^{n-r} on aina 1, mistä tulos seuraa.

11 Epäyhtälöistä

Luvun x **itseisarvo** $|x|$ määritellään kaavalla

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0, \\ -x, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Eli esimerkiksi $|3| = 3$ ja $|-10| = 10$. Seuraavassa listaus siitä, mitä epäyhtälöille saa tehdä.

1. Jos meillä on epäyhtälö $a > b$, voidaan se kertoa positiivisella luvulla, jolloin sen suunta säilyy. Eli jos $c > 0$, $c \cdot a > c \cdot b$. Täten esimerkiksi $5 > -2$, joten $2 \cdot 5 > 2 \cdot (-2)$, eli $10 > -4$.

2. Jos epäyhtälön kertoo negatiivisella luvulla, sen suunta muuttuu: jos $a > b$ ja $c < 0$, niin $c \cdot a < c \cdot b$. Tätä voi testata esimerkillä: $5 > 1$, mutta $-5 < -1$, jossa siis epäyhtälön kumpikin puoli on kerrottu luvulla -1.

Itseisarvolle pätee sääntö $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ eli tulon itseisarvo on itseisarvojen tulo. Täten esimerkiksi $|-5 \cdot x| = |-5| \cdot |x| = 5 \cdot |x|$.

Itseisarvo $|x| = |x - 0|$ kertoo pisteen x etäisyyden origosta. Samoin itseisarvo $|x - c|$ kertoo pisteen x etäisyyden pisteestä c. Täten esimerkiksi epäyhtälö $|x - 5| < 1$ kysyy niitä pisteitä x, joiden etäisyys pisteestä 5 on alle yhden. Tällöin vastauksena on avoin väli $x \in (4, 6)$.

Tarkastellaan epäyhtälöä $|x| < c$. Jos $x \geq 0$, niin $|x| = x$, joten epäyhtälö kertoo, että $0 < x < c$. Jos $x < 0$, niin $|x| = -x$ ja epäyhtälö kertoo että $-x < c \iff x > -c$. Kun nämä kaksi tapausta laittaa yhteen, saadaan

$$|x| < c \iff -c < x < c.$$

Esimerkki 11.1. Epäyhtälö $|x - 3| < c$ on yhtäpitävä epäyhtälön $-c < x - 3 < c$ kanssa. Tästä saadaan (lisäämällä 3) epäyhtälö muotoon $-c + 3 < x < c + 3$

Esimerkki 11.2. Yllä olevassa esimerkissä vastaukseksi tuli tietty yksi väli x-akselista. Kun epäyhtälön suunta on toisin päin, vastaukseksi tulee kaksi erillistä palasta x-akselia: sievennetään $|x + 1| > 3$:

$$\begin{array}{rcr} & |x+1| > 3 & \\ & \text{eli} & \\ x + 1 > 3 & \text{tai} & -(x+1) > 3 \\ x > 2 & \text{tai} & -x - 1 > 3 \\ x > 2 & \text{tai} & -4 > x \end{array}$$

Jos meillä on epäyhtälö $0 < a < 1/x < b$, jossa a ja b ovat suurempia kuin nolla, miten tästä saa x:n kätevästi osoittajasta nimittäjään? Vastaus paljastuu muokkaamalla kumpaakin epäyhtälöä erikseen:

$$\begin{array}{rcr} 1/x < b & \qquad & a < 1/x \\ 1 < bx & & ax < 1 \\ 1/b < x & & x < 1/a. \end{array}$$

Kolmioepäyhtälö kertoo meille seuraavaa:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Epäyhtälön pitävyys tulee selväksi, kun sen paikalle sijoittaa eri arvoja: jos $x = 1$ ja $y = -1$, se näyttää seuraavalta:

$$|1 + (-1)| \leq |1| + |-1|$$

mikä on sama asia kuin $0 \leq 2$, mikä tietenkin pitää paikkansa. Jos x ja y ovat kumpikin suurempia kuin nolla, kyseinen epäyhtälö pätee yhtälönä.

Esimerkki 11.3. Osoita kolmioepäyhtälön avulla, että $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$

Ratkaisu. Kolmioepäyhtälössä on vain kaksi termiä, mutta tässä tehtävässä on kolme: kolmioepäyhtälö sanoo

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Tehdään lausekkeeseen $|x + y + z|$ sijoituksia:

$$|\underbrace{x + y}_{=a} + \underbrace{z}_{=b}|,$$

jolloin voimme sijoittaa epäyhtälöön $|a + b| \leq |a| + |b|$ arvot $a = x + y$ ja $b = z$:

$$\begin{aligned} |a + b| &\leq |a| + |b| \iff \\ |x + y + z| &\leq |x + y| + |z| \end{aligned}$$

Jälkimmäiseen epäyhtälöön voi soveltaa kolmioepäyhtälöä vielä kerran:

$$\begin{aligned} |x + y + z| &\leq |x + y| + |z| \\ &\leq |x| + |y| + |z|, \end{aligned}$$

koska $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Käytännössä kolmioepäyhtälön käytössä kannattaa käyttää luovuutta a:n ja b:n valinnassa. Luovuutta voi käyttää myös "lisäämällä älykkäästi nollan" kyseiseen epäyhtälöön:

Esimerkki 11.4. Osoita, että $|a + b| \leq |a + c| + |b - c|$.

Ratkaisu: Ensinnä $|a + b|$ voidaan muokata muotoon

$$|a + \underbrace{c - c}_{=0} + b|.$$

Nyt kolmioepäyhtälöä voi soveltaa sijoituksilla $x = a + c$ ja $y = -c + b$:

$$|\underbrace{(a + c)}_{=x} + \underbrace{(-c + b)}_{=y}| \leq |\underbrace{a + c}_{=x}| + |\underbrace{-c + b}_{=y}|.$$

Tässä tuli siis todistettua:

$$\begin{aligned} |a + b| &= |a + c - c + b| \\ &\leq |a + c| + |b - c|. \end{aligned}$$

12 Supremum ja infimum

Tarkastellaan aluksi avointa väliä $(-1, 1)$. Tämä on joukko, johon kuuluvat kaikki reaaliluvut miinus yhdestä yhteen. Kuitenkaan päätepisteet eli luvut -1 ja 1 eivät kuulu tähän väliin.

On huomattava, että välillä $(-1, 1)$ ei ole maksimia, koska väli sisältää lukuja, jotka ovat mielivaltaisen lähellä lukua 1. Joukko ei sisällä myöskään minimiä.

Voidaan ajatella **supremumia** maksimin yleistyksenä ja **infimumia** minimin yleistyksenä. Alla olevia tarkasteluja varten kannattaa piirtää väli $-1, 1$ janalle.

Yllä olevassa esimerkissä supremum voidaan etsiä seuraavasti:

1. Joukko $(-1, 1)$ on ylhäältä rajoitettu: on olemassa lukuja, jotka ovat suurempia kuin mikään tämän välin luku.

2. Jos luku on suurempi tai yhtä suuri kuin kaikki tämän välin luvut, sanotaan että kyseessä on tämän välin **yläraja**. Esimerkiksi luku 2 on välin $(-1, 1)$ yläraja, koska se on suurempi kuin mikään tämän välin luku.

3. Muodostetaan joukko, joka sisältää kaikki välin $(-1, 1)$ ylärajat. Tämä joukko on selvästi
$$\{x : x \geq 1\} = [1, \infty)$$

4. Välin $-1, 1$ supremum on sen pienin yläraja eli joukon $[1, \infty)$ minimi. Tämä minimi on 1. Eli $\sup(-1, 1) = 1$.

Eli joukon A supremum eli $\sup(A)$ on joukon A **pienin yläraja**. Tästä seuraa, että jonkin luvun a voi osoittaa olevan jonkin joukon A pienin yläraja osoittamalla, että

1. a on A:n yläraja, eli a on suurempi tai yhtä suuri kuin jokainen A:n luku

2. Mikään a:ta pienempi luku ei ole A:n yläraja.

Esimerkki 12.1. Joukon $A = \{1, 2, 5\}$ supremum on 5, koska ensinnäkin luku 5 on tämän joukon yläraja ja toisaalta jos meillä on mikä tahansa luku $x < 5$, niin x ei ole joukon A yläraja. Täten 5 on pakolla joukon A supremum.

Esimerkki 12.2. Jos joukolla on olemassa maksimi, niin $\max A = \sup A$

Täten supremum on luonteva maksimin yleistys. Kaikilla joukoilla ei ole maksimia, mutta kaikilla ylhäältä rajoitetuilla joukoilla on supremum.

Infimum on puolestaan minimin yleistys. Joukon $(-1,1)$ infimum löydetään vastaavalla tekniikalla kuin supremum:

1. Joukko $(-1,1)$ on alhaalta rajoitettu: on olemassa lukuja, jotka ovat pienempiä kuin mikään tämän välin luku.
2. Jos luku on pienempi tai yhtä suuri kuin kaikki tämän välin luvut, sanotaan että kyseessä on tämän välin **alaraja**. Esimerkiksi luku -3 on välin $(-1,1)$ alaraja, koska se on pienempi kuin mikään tämän välin luku.
3. Muodostetaan joukko, joka sisältää kaikki välin $(-1,1)$ alarajat. Tämä joukko on selvästi
$$\{x : x \leq -1\} = (-\infty, -1]$$
4. Infimum on **suurin alaraja** eli joukon $(-\infty,-1]$ maksimi. Tämä maksimi on -1. Eli $\inf(-1,1) = -1$.

Jos joukolla on olemassa minimi, se on myös joukon infimum.

Esimerkki 12.3. Joukon $A = \{1/x : x \in \mathbb{R}_+\}$ infimum on 0. Tämän voi todistaa seuraavasti:

1. Ensinnäkin 0 on tämän joukon alaraja: $0 \leq 1/x$, kun $x \in \mathbb{R}_+$.
2. Toisaalta mikään nollaa suurempi luku ϵ ei ole tämän joukon alaraja: aina on olemassa lukuja $1/x$, jotka ovat pienempiä kuin ϵ, koska $1/x < \epsilon \iff x > 1/\epsilon$.

Täten 0 on tämän joukon suurin alaraja eli infimum.

13 Funktion raja-arvo

Tutkitaan raja-arvoa
$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{x-2}\right).$$

Tässä funktion $f(x) = \frac{x-2}{x-2}$ arvo ei ole määritelty pisteessä $x = 2$, koska nollalla ei saa jakaa. Tämän funktion arvo on kuitenkin määritelty pisteen $x = 2$ läheisyydessä, itse asiassa tämä funktio on määritelty mielivaltaisen lähellä tätä pistettä. Funktion raja-arvo kun $x \to 2$ kertoo, miten funktio käyttäytyy kun x *lähestyy* pistettä 2. Raja-arvo ei vaadi että funktio olisi edes määritelty tässä pisteessä 2.

Täten raja-arvo voi muokata seuraavasti: kun $x \neq 2$,

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x-2}{x-2} \right) = \lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{1} \right) = 1.$$

Eli kun x lähestyy pistettä 2, niin funktio $\frac{x-2}{x-2}$ lähestyy pistettä 1. Yllä tehty yhtälön muokkaus muotoon $\frac{1}{1}$ on sallittua, koska oletimme että $x \neq 2$. Pisteessä $x = 2$ yllä oleva muokkaus tarkoittaisi nollalla jakamista, joten on oletettava että $x \neq 2$.

Tällä kurssilla olevissa raja-arvotehtävissä ideana on usein muokata raja-arvon sisällä olevaa lauseketta muotoon, josta raja-arvo on helppo laskea suoraan. Käytännössä tämä tarkoittaa usein sitä, että nimittä muokataan sellaiseksi, että se ei lähesty nollaa.

Esimerkki 13.1. Laske raja-arvo

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2-1}{x-1} \right).$$

Ratkaisu. Huomataan, että $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, joten olettaen $x \neq 1$ yllä oleva raja-arvo voidaan muokata muotoon

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2-1}{x-1} \right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{x+1}{1} \right) = 2.$$

Tässä siis raja-arvo muokattiin muotoon, jossa nimittäjä ei enää lähestynyt nollaa.

Oleellista näissä tehtävissä on osata muokata raja-arvolauseketta sopivaan muotoon. Tämä muokkaaminen on algebraa eli käytännössä yhtälön pyörittämistä. Yksi oleellisimpia asioita muistaa on se, että

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Täten esimerkiksi $25 - 4 = 5^2 - 2^2 = (5-2)(5+2) = 21$. Tämä identiteetti on helppo todistaa: kerro ainoastaan $(a-b)(a+b)$ auki. Käytännössä usein tehtävänannossa pitää tunnistaa joko osoittajan tai nimittäjän olevan muotoa $a^2 - b^2$.

Esimerkki 13.2. Laske raja-arvo

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right).$$

Ratkaisu. Oletetaan, että $x \neq 2$. Muokataan lauseketta ja huomataan, että osoittaja on muotoa $a^2 - b^2$, koska $x^2 - 4 = x^2 - 2^2$:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2}{1}\right) = 4.$$

Tässä on hyvä mainita, että kun haluamme esittää lausekkeen $a^2 - b^2$ muodossa $(a-b)(a+b)$, niin ei tarvitse olettaa että a ja b olisivat kokonaisluvun neliöitä. Voidaan esimerkiksi kirjoittaa $x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.

Useissa tehtävissä kannattaa etsiä muotoa $a^2 - b^2$ olevia termejä. Näitä muokkaamalla ratkeaa moni tehtävä. Toinen yleisesti käytetty identiteetti kertoo, että

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Myöskään tässä ei ole mitään mystistä: se voidaan helposti osoittaa oikeaksi laskemalla yhtälön oikea puoli auki. Tämä identiteetti kertoo esimerkiksi, että

$$125 - 27 = 5^3 - 3^3 = (5-3)(5^2 + 5\cdot 3 + 3^2) = (2)(25+15+9) = 2\cdot 49 = 98.$$

Joskus raja-arvolausekkeen yhtälöä muokattaessa pitää käyttää useita algebran taktiikoita yhdessä.

Esimerkki 13.3. Laske raja-arvo

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+x-6}{x^3-8}\right)$$

Ratkaisu. Huomataan että nimittäjä on muotoa $a^3 - b^3$, joten $x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2+2x+4)$. Osoittaja on puolestaan toisen asteen yhtälö, jonka nollakohdat ovat (löytyvät kokeilemalla) $x_1 = 2$ ja $x_2 = -3$, joten $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$. Täten

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+x-6}{x^2-4}\right) &= \lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x^2+2x+4)}\right)\\ &= \lim_{x\to 2}\left(\frac{x+3}{x^2+2x+4}\right) = \frac{5}{12}.\end{aligned}$$

Tyypillinen tapaus on myös, että joko nimittäjässä tai osoittajassa on erotus $a - b$. Nyt hyvä taktiikka on kertoa sekä osoittaja että nimittäjä termillä $(a + b)$, jolloin joko osoittajaan tai nimittäjään syntyy termi $a^2 - b^2$:

Esimerkki 13.4. Laske raja-arvo

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3} \right)$$

Ratkaisu. Raja-arvo on muotoa $\frac{0}{0}$, joten hyvä taktiikka on yrittää saada nimittäjä muotoon, jossa se ei lähesty nollaa. Ajatellaan, että nimittäjä on muotoa $a - b$. Tällöin $a = \sqrt{x^2 + 9}$ ja $b = 3$. Nyt nimittäjä voidaan yksinkertaistaa muotoon $a^2 - b^2$ kertomalla lausekkeen

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3}$$

osoittaja ja nimittäjä termillä $a + b$ eli termillä $\sqrt{x^2 + 9} + 3$. Täten

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3} \right) &= \lim_{x \to 0} \left(\frac{(x^2)(\sqrt{x^2 + 9} + 3)}{(\sqrt{x^2 + 9} - 3)(\sqrt{x^2 + 9} + 3)} \right) \\
&= \lim_{x \to 0} \left(\frac{(x^2)(\sqrt{x^2 + 9} + 3)}{x^2 + 9 - 3^2} \right) \\
&= \lim_{x \to 0} \left(\frac{(x^2)(\sqrt{x^2 + 9} + 3)}{x^2} \right) \\
&= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 9} + 3}{1} \right) \\
&= 3 + 3 = 6.
\end{aligned}$$

Usein argumentti x lähestyy ääretöntä eli $x \to \infty$. Tällöin oleellista on muistaa, että funktio $1/x$ lähestyy tässä tapauksessa nollaa. Laskettaessa raja-arvoa lausekkeesta, jossa on erisuuruisia potensseja on hyvä taktiikka ottaa suurin potenssi yhteiseksi tekijäksi.

Esimerkki 13.5. Laske raja-arvo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^4 + x^3}{3x^4}.$$

Ratkaisu. Raja-arvon sisässä olevan lausekkeen korkein potenssi on 4. Otetaan sekä osoittajan että nimittäjän yhteiseksi tekijäksi siis x^4:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^3}{3x^4} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^4(1+1/x)}{x^4(3)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{(1+1/x)}{3}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

14 Kuristusperiaate

Tarkastellaan funktiota f, joka on kahden muun funktion välissä, eli

$$g_1(x)\le f(x)\le g_2(x).$$

Nyt tämän funktion käyttäytymistä voi tarkastella kuristusperiaatteen avulla. Kuristusperiaate on yksinkertainen periaate, jonka mukaan funktio, joka on kahden muun funktion välissä saa raja-arvon, joka on näiden kahden funktion raja-arvojen välissä, eli

$$\lim_{x\to\infty}g_1(x)\le\lim_{x\to\infty}f(x)\le\lim_{x\to\infty}g_2(x).$$

Yllä täytyy ainoastaan olettaa, että funktio f on funktioiden g_1 ja g_2 välissä tietystä x-arvosta alkaen eli kun $x>x_0$.

Esimerkki 14.1. Laske raja-arvo $\lim_{x\to\infty}f(x)$ kun

$$\frac{x^4+x^3}{3x^4}\le f(x)\le 1/3$$

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}\frac{x^4+x^3}{3x^4}\le& f(x)\le 1/3\\ &\Rightarrow\\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^3}{3x^4}\le&\lim_{x\to\infty}f(x)\le\lim_{x\to\infty}1/3\\ &\Rightarrow\\ \lim_{x\to\infty}1/3\le&\lim_{x\to\infty}f(x)\le 1/3.\end{aligned}$$

Eli $\lim_{x\to\infty}f(x)=1/3$.

15 Jatkuvuus

Tarkastellaan funktiota $f(x)$ jossakin tietyssä pisteessä x_0. Tämä funktio on tässä pisteessä joko **jatkuva** tai **epäjatkuva.**

Jatkuvuuden ymmärtää parhaiten tarkastelemalla epäjatkuvaa funktiota. Otetaan esimerkki.

Esimerkki 15.1. Tarkastellaan funktiota

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x < 0 \\ x^2 + 2, & \text{kun } x \geq 0 \end{cases}$$

Tämä funktio on pisteessä $x = 0$ epäjatkuva: tämän näkee selvästi, kun piirtää funktion kuvaajan: siinä on hyppy pisteessä $x = 0$. Toisaalta tämä funktio on kaikissa muissa pisteissä x jatkuva.

Graafisesti ilmaistuna jatkuva funktio on sellainen, jonka kuvaajan voi piirtää nostamatta kynää paperilta. Täsmällisempi määritelmä kertoo, että funktio f on jatkuva pisteessä x_0, jos funktion raja-arvo on tässä pisteessä sama kuin funktion arvo tässä pisteessä.

Määritelmä 15.1. Funktio f on jatkuva pisteessä x_0, jos

1. Sillä on tässä pisteessä raja-arvo eli $\lim_{x \to x_0} f(x)$ on olemassa.
2. Funktion arvo tässä pisteessä eli $f(x_0)$ on olemassa ja
3. Funktion arvo tässä pisteessä on yhtä kuin tämä raja-arvo.

Eli funktio f on jatkuva pisteessä x_0, jos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Jatkuvuudesta on ensinnä hyvä huomata, että se on funktion ominaisuus *tietyssä pisteessä*. Funktion voi myös sanoa olevan jatkuva tietyssä joukossa A, mikä tarkoittaa sitä, että se on jokaisessa tämän joukon pisteessä jatkuva.

Funktion f jatkuvuus pisteessä x_0 kertoo siis sen, että funktion arvo $f(x)$ saadaan lähelle arvoa $f(x_0)$, kun valitaan arvo x riittävän läheltä arvoa x_0. Eli kun välimatka $|x - x_0|$ on pieni, niin myös välimatka $|f(x) - f(x_0)|$ on pieni.

Jatkuvuus on hyvinkin oleellinen käsite, ja useimmat kansantaloustieteen ja matematiikan kursseilla tavattavat funktiot ovat jatkuvia. Esimerkiksi polynomit, kuten ax^3+bx^2+cx+d ovat jatkuvia. Kansantaloustieteessä taas esimerkiksi hyötyfunktio oletetaan jatkuvaksi. Hyötyfunktion tapauksessa jatkuvuus tarkoittaa intuitiivisessa mielessä sitä, että pienet muutokset kulutuksessa eivät aiheuta suhteettomia hyppyjä hyödyssä.

Kun meillä on kaksi funktiota $f(x)$ ja $g(x)$, jotka ovat jatkuvia pisteessä x_0, niin näiden tietyt muunnokset ovat myös jatkuvia:

1. Näiden summa $f(x) + g(x)$ on jatkuva.
2. Näiden tulo $f(x)g(x)$ on jatkuva.
3. Näiden osamäärä $\frac{f(x)}{g(x)}$ on jatkuva.
4. Yhdistetyt kuvaukset $f \circ g = f(g(x))$ ja $g \circ f = g(f(x))$ ovat jatkuvia.

Nämä ovat erittäin hyödyllisiä tuloksia. Koska esimerkiksi funktiot $f(x) = |x|$ ja $g(x) = \sqrt{x}$ ovat jatkuvia, niin

1. Näiden summa $|x| + \sqrt{x}$ on jatkuva.
2. Näiden tulo $|x|\sqrt{x}$ on jatkuva.
3. Näiden osamäärä $\frac{|x|}{\sqrt{x}}$ on jatkuva.
4. Yhdistetyt kuvaukset $f \circ g = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = |\sqrt{x}|$ ja $g \circ f = g(f(x)) = \sqrt{|x|}$ ovat jatkuvia.

Voidaan siis lähteä kahdesta jatkuvasta funktiosta, ja todeta että näiden tietyt muunnokset ovat myös jatkuvia. Vastaavanlaista päättelyä voidaan suorittaa myös toiseen suuntaan. Oletetaan, että haluamme osoittaa funktion $f(x)$ jatkuvaksi. Jos $f(x)$ on vaikkapa kahden funktion osamäärä, niin yllä olevan perusteella riittää osoittaa, että tämän osamäärän osoittaja ja nimittäjä ovat jatkuvia. Tämän f on kahden jatkuvan funktion osamääränä jatkuva.

Esimerkki 15.2. Osoita, että funktio

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 5x + 100}{\sqrt{x}}}$$

on jatkuva.

Ratkaisu. Ensinnäkin sisäfunktion osamäärän osoittaja $x^2 + 5x + 100$ on polynomifunktiona jatkuva. Samoin nimittäjä $\sqrt{x}$ on jatkuva määrittelyjoukossaan $x \geq 0$, joten osamäärä $\frac{x^2+5x+100}{\sqrt{x}}$ on jatkuva, kunhan $x > 0$. Nyt $f(x)$ voidaan esittää muodossa $g \circ h$, jossa $h(x) = \frac{x^2+5x+100}{\sqrt{x}}$ ja $g(x) = \sqrt{x}$. Täten f on kahden jatkuvan kuvauksen yhdistettynä kuvauksena jatkuva.

Jatkuville funktiolle pätee monia hyödyllisiä tuloksia. Näistä optimointiteorian kannalta hyödyllinen on tulos, että jos funktio f on määritelty suljetulla välillä $[a, b]$, niin se saa tällä välillä minimin ja maksimin. Eli jos määrittelemme vaikapa funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$, niin voimme todeta että koska tämä on suljetulla välillä määritelty jatkuva funktio, niin se saa minimin ja maksimin tällä välillä $[-1, 1]$.

Huomaa, että tässä vaaditaan kaksi ehtoa: funktion jatkuvuus ja se että määrittelyjoukko on suljettu väli[7]. Esimerkiksi avoimella välillä määritelty funktio $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ ei saa määrittelyjoukossaan $(-1, 1)$ ollenkaan maksimia, koska se saa arvoja, jotka ovat mielivaltaisen lähellä pistettä 1, muttei kuitenkaan itse arvoa 1. Täten siis pelkkä funktion jatkuvuus ei ole riittävä ehto sille, että funktio saavuttaisi määrittelyjoukossaan minimin ja maksimin.

Toisaalta funktio

$$f : [-1, 1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1/x, \text{ kun } x \neq 0 \\ 0 \text{ kun } x = 0 \end{cases}$$

ei saa märittelyjoukossaan minimiä eikä maksimia. Tässä tapauksessa tämä johtuu siitä, että funktio ei ole määrittelyjoukossaan jatkuva.

Tulosta jonka mukaan *suljetulla välillä määritelty funktio saavuttaa tällä välillä minimin ja maksimin* voidaan soveltaa myös joihinkin funktioihin, jotka on määritelty jollain muulla kuin ei-suljetulla välillä. Tämä onnistuu esimerkiksi toteamalla, että funktion minimi/maksimi on pakosti tietyllä suljetulla välillä.

Tarkastellaan esimerkiksi funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$. Jo ennestään tiedetään, että tämä funktio saa minimin pisteessä 0. Sen että tämä funktio

[7] Tai yleisemmin määriteltynä kompakti joukko.

ylipäänsä saavuttaa minimin voi todistaa monella tavalla. Alla sovelletaan jatkuvuutta ja rajoitetaan funktion minimi tietylle suljetulle välille:

1. Funktio f on jatkuva. Se kasvaa rajatta, kun x kasvaa rajatta. Se myös kasvaa rajatta, kun x vähenee rajatta. Eli
$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \lim_{x\to-\infty} x^2 = \infty$$
2. Toisaalta esimerkiksi pisteessä $x = 2$ funktio f saavuttaa arvon 4.
3. Koska funktio kasvaa rajatta, kun x kasvaa tai vähenee rajatta, niin on pakko olla arvo x_0 siten että $f(x) > 100$ silloin, kun $x > x_0$ tai $x < -x_0$.
4. Nyt voidaan valita suljettu väli $[-x_0, x_0]$. Tämän välin ulkopuolella funktio f saavuttaa ainoastaan arvoja, jotka ovat yli 100. Toisaalta pisteessä $x = 2$ funktio f saavuttaa arvon 4. Täten piste $x = 2$ kuuluu pakolla välille $[-x_0, x_0]$.
5. Nyt jos funktiolla f on minimi, se on oltava välillä $[-x_0, x_0]$.
6. Toisaalta jatkuvana funktiona f saavuttaa pakolla tällä suljetulla välillä minimin. Tämä on myös koko funktion minimi.

Tässä siis funktion minimi ”vangittiin” tietylle suljetulle välille. Tämä vangitseminen tapahtui siten, että osoitettiin että tämän välin ulkopuolella funktio saa pelkästään suurempia arvoja kuin *yhdessä tietyssä* tämän välin pisteessä. Täten funktion minimin oli pakko olla tällä välillä. Toisaalta koska funktio oli jatkuva, se saavutti pakolla tällä suljetulla välillä minimin.

Esimerkki 15.3. Osoita vastaavalla päättelyllä, että reaaliluvuilla määritelty funktio
$$f(x) = \frac{x}{x^4 + 5}$$
saa sekä maksimin, että minimin määrittelyjoukossaan.

Ratkaisu. Funktion raja-arvo on nolla, kun x lähestyy ääretöntä tai miinus ääretöntä. Tällöin on mahdollista valita luvut a ja b, että suljetun välin $[a, b]$ ulkopuolella funktio on halutun lähellä nollaa: voidaan esimerkiksi valita a ja b siten, että $-1/10 \leq f(x) \leq 1/10$. Nyt pätee
$$\begin{cases} f(1) = 1/6 > 1/10 \text{ ja} \\ f(-1) = -1/6 < -1/10. \end{cases}$$

Täten funktion minimi ja maksimi ovat pakosti suljetulla välillä $[a, b]$, mikäli minimi ja maksimi ovat olemassa. Koska funktio on jatkuva tällä suljetulla välillä, ne myös ovat olemassa.

Eli tässä käytettiin seuraavaa tekniikkaa:

1. Valittiin suljettu väli $[a, b]$ siten, että funktion minimi ja maksimi *eivät ainakaan sijaitse tämän välin ulkopuolella.* Tämä todettiin siten, että huomattiin funktion olevan hyvin lähellä (alle etäisyyden $1/10$ verran) nollaa tämän välin ulkopuolella *ja toteamalla* että välillä $[a, b]$ funktio saavuttaa
   (a) Suurempia arvoja kuin $1/10$.
   (b) Pienempiä arvoja kuin $-1/10$.
2. Todettiin, että funktio saa jatkuvana funktiona minimin ja maksimin avoimella välillä $[a, b]$.

16 Jonot ja sarjat

Analyysissä jono $\{x_n\}$ on päättymätön, järjestetty lista lukuja: $\{x_n\} = (x_1, x_2, x_3, \cdots)$. Esimerkiksi $\{1/n\} = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots)$ on jono. Samoin $\{n^2\} = (1, 2, 4, 9, \cdots)$ on jono. Toisin sanottuna jono on funktio $f(n) = x_n$, jossa lähtöjoukkona on luonnolliset luvut $1, 2, 3, \dots$.

Jonosta $\{x_n\}$ voidaan muodostaa **sarja** summaamalla tämän jonon termit yhteen: lasketaan siis summa

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$$

Tämä summa ei tietenkään aina ole olemassa. Jos meillä on esimerkiksi jono $\{n^2\} = (1, 2, 4, 9, \cdots)$, niin tämän termien summa

$$1 + 2 + 9 + \cdots$$

on ääretön. Mielenkiinnon kohteena ovat sarjat, joilla tämä summa on äärellisenä olemassa. Sanotaan, että sarja **suppenee** jos tämä summa on olemassa äärellisenä. Jos sarja ei suppene, se **hajaantuu**.

Yksi tärkeimmistä sarjatyypeistä on **geometrinen sarja**. Tällaisia sarjoja ovat esimerkiksi seuraavat sarjat:

$$1 + 1/10 + 1/100 + 1/1000 + \cdots$$
$$e + e/2 + e/4 + e/8 + e/16 + \cdots$$
$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$$

Huomataan, että geometrisessa sarjassa jokainen termi on aina edellinen termi kertaa jokin suhdeluku. Merkitään tätä lukua q. Yllä havaitaan, että ensimmäisessä sarjassa $q = 1/10$, toisessa $q = 1/2$ ja kolmannessa $q = 2$. Esimerkiksi sarja $1+1/10+1/100+1/1000+\cdots$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$1 + 1/10 + 1/100 + 1/1000 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i$$

Samoin sarja $e + e/2 + e/4 + e/8 + e/16 + \cdots$ voidaan kirjoittaa

$$e + e/2 + e/4 + e/8 + e/16 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} e \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

Muodostetaan tästä geometrisen sarjan määritelmä.

Määritelmä 16.1. Sarja joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i$$

on geometrinen sarja. a on sarjan ensimmäinen termi ja q on sarjan **suhdeluku**.

Esimerkiksi sarjassa $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$

$$\begin{cases} a & = 1, \\ q & = 2. \end{cases}$$

Geometrisia sarjoja on helppo käsitellä, sillä niiden summille on olemassa helppo kaava.

Lause 1. Geometrinen sarja

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i$$

suppenee jos $-1 < q < 1$. Sarjan summa on

$$\frac{a}{1-q} = \frac{\text{ensimmäinen termi}}{1 - \text{suhdeluku}}$$

Tämä lause on yllättävän helppo todistaa: Merkitään geometrisen sarjan summaa A:lla. Kirjoitetaan geometrinen sarja ja sen alle tämä sarja kerrottuna suhdeluvulla q:

$$\begin{aligned} A &= a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots \\ Aq &= aq + aq^2 + aq^3 + \cdots \end{aligned}$$

Nyt voidaan vähentää tämä alempi rivi ylemmästä rivistä, jolloin oikealle puolelle jää pelkkä a:

$$\begin{aligned} A - Aq &= a \\ A &= \frac{a}{1-q}. \end{aligned}$$

Esimerkki 16.1. Sarja $2 + 1 + 1/2 + 1/4 + \cdots$ suppenee sillä $q = 1/2 < 1$. Lisäksi $a = 2$, joten sarjan summa on

$$\frac{a}{1-q} = \frac{2}{1-1/2} = 4.$$

Geometrisilla sarjoilla on valtava määrä sovelluksia. Alla esitetään tapa ratkaista vanha kiista siitä onko $0,999999\cdots = 1$.

Esimerkki 16.2. Osoita, että $0,9999\overline{99} = 1$.

Ratkaisu: $0,9999\overline{99}$ voidaan muodostaa geometriseksi sarjaksi. Kirjoitetaan se muotoon

$$0,9999\overline{99} = 0,9 + 0,09 + 0,009\cdots$$

Tämän sarjan ensimmäinen termi on $0,9$ ja suhdeluku on $1/10$. Koska suhdeluvun itseisarvo on pienempi kuin yksi, sarja suppenee. Summana on

$$\frac{a}{1-q} = \frac{0,9}{1-1/10} = \frac{0,9}{0,9} = 1.$$

Esimerkki 16.3. Esitä $1,657777777\overline{77}$ kahden kokonaisluvun osamääränä.

Ratkaisu:

$$1,657777777\overline{77} = 1 + 0,6 + 0,05 + 0,007 + 0,0007 + \cdots$$

Tässä kolme ensimmäistä termiä eivät ole osa geometrista sarjaa. Sen sijaan

$$0,007 + 0,0007 + \cdots$$

muodostaa geometrisen sarjan jonka summa on

$$\frac{a}{1-q} = \frac{0,007}{1-1/10} = \frac{7/1000}{9/10} = 7/900.$$

Täten koko sarjan summa on

$$\begin{aligned} 1,657777777\overline{77} &= 1 + 0,6 + 0,05 + 7/900 \\ &= 900/900 + 549/900 + 45/900 + 7/900 \\ &= 1501/900. \end{aligned}$$

Esimerkki 16.4. Esitä luku $0,44\overline{44}$ murtolukuna.

17 Luku e

Neperin luku e on matematiikassa erittäin tärkeä luku. Se on irrationaaliluku, joka on noin 2,72. Se määritellään raja-arvona

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Tämän tiedon avulla voi laskea tämänkaltaisia raja-arvoja.

Esimerkki 17.1. Etsi raja-arvo

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{100}{x}\right)^x.$$

Ratkaisu. Muokataan lauseketta kunnes se palautuu e:n määritelmään:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{100}{x}\right)^x &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/100}\right)^x \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x/100}\right)^{x/100}\right)^{100} \\ &= \lim_{x/100\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x/100}\right)^{x/100}\right)^{100} \\ &= e^{100} \end{aligned}$$

Tässä käytettiin myös tietoa $x/100 \to \infty$ kun $x \to \infty$.

Esimerkki 17.2. Laske raja-arvo

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4/5}{y}\right)^{y/2}.$$

18 Potenssifunktiot

Potenssifunktio kuten 5^n on eri asia kuin **polynomifunktio** kuten n^5, sillä potenssifunktiossa potenssi on muuttuja, kun polynomifunktiossa potenssi on vakio. Kuitenkin nämä kaksi funktiotyyppiä menevät usein sekaisin[8], etenkin derivoitaessa. Tyypillisin potenssifunktio on e^x. Myöhemmin kurssi todetaan, että tämä funktio on oma derivaattansa: $\frac{d}{dx}e^x = e^x$.

Potenssifunktioiden raja-arvojen laskeminen muistuttaa tekniikaltaan polynomifunktioiden raja-arvojen laskemista: pyritään ottamaan ”suurin” termi yhteiseksi tekijäksi.

Esimerkki 18.1. Laske raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^n+5^n}{8^n}.$$

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{7^n+5^n}{8^n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{7^n\left(1+\frac{5^n}{7^n}\right)}{8^n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^n\left(1+\left(\frac{5}{7}\right)^n\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

Tulos johtuu siitä että kun luvusta, joka on alle yhden, otetaan suurempia ja suurempia potensseja, niin syntyvä luku lähestyy nollaa.

Esimerkki 18.2. Laske raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^n+9^n}{9^n}.$$

[8] Toki sekä potenssi että kanta voivat kumpikin olla muuttujia, kuten funktiossa $f(x) = x^x$.

19 Sarjojen suppeneminen

Kiinnostuksen kohteena on edelleen sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

Tämä summa on mahdollisesti äärellisenä olemassa, jolloin sanotaan että sarja suppenee. Jos tämä summa ei ole olemassa, sarja hajaantuu. Sarja hajaantuu esimerkiksi silloin, kun yllä oleva summa on ääretön eli

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty.$$

Näin käy esimerkiksi sarjoille[9]

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots \quad \text{ja}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

On suoraan selvää, että näistä sarjoista ylemmän summa on ääretön. Yllättävämpää on, että myös alemman sarjan summa on ääretön. Näin on siis siitäkin huolimatta, että sarjan n:s summattava termi $1/n$ lähestyy nollaa kun n kasvaa rajatta. Tässä vaiheessa kannattaa siis huomata, että se että sarjan n:s termi a_n lähestyy nollaa ei takaa sarjan suppenemista.

Aiemmin tutkittiin geometrisia sarjoja

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots$$

Tällainen geometrinen sarja suppenee aina silloin, kun suhdeluku q on yhden ja miinus yhden välissä eli $-1 < q < 1$. Täten esimerkiksi sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdots$$

[9]Alla käytän sarjan termien indekseinä kirjainta n kun taas yllä tämä indeksi oli k (laskuharjoituksissa tapahtuu sama vaihto). Tällä indeksillä ei ole varsinaisesti mitään merkitystä. Merkintä n korostaa sitä, että tähän n:n paikalle laitetaan luonnollisia lukuja.

suppenee. Geometrisen sarjan summa on $a/(1-q)$ eli yllä $(2/3)/(1-2/3) = (2/3)/(1/3) = 2$.

On vielä syytä huomata, että jos mikä tahansa sarja leikataan jostain kohdasta poikki siten, että lasketaan ainoastaan j:n ensimmäisen termin summa

$$\sum_{n=1}^{j} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{j-1} + a_j$$

niin tämä summa on aina äärellisenä olemassa, koska siinä on summattavana äärellinen määrä termejä. Tästä seuraa, että sarjan hajaantuminen tai suppeneminen riippuu ainoastaan sen "hännästä" eli loppusummasta $a_j + a_{j+1} + a_{j+2} + \cdots$ Tästä seuraa, että esimerkiksi sarja

$$\sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{j} + \frac{1}{j+1} + \cdots$$

hajaantuu riippumatta siitä, kuinka suuri luku j:ksi valitaan.

20 Majorantti- ja minoranttiperiaate

Tässä vaiheessa on hyvä määritellä sarjojen suppeneminen tarkemmin kuin että "summa $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ on olemassa". Ajatellaan nyt jäsenten **osasummia** eli n:n ensimmäisen termin summaa

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Esimerkiksi sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ensimmäiset osasummat ovat

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{1} \\ S_2 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \\ S_3 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Nyt saadaan sarjojen suppenemiselle ja hajaantumiselle tarkka määritelmä:

Määritelmä 20.1. Olkoon

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \cdots$$

sarja. Merkitään S_n:llä sen n:ttä osasummaa. Eli esimerkiksi

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{aligned}$$

ja niin edelleen. Muodostetaan näistä osasummista $S_1, S_2, S_3, \ldots$ jono $(S_1, S_2, S_3, \ldots)$. Nyt sarja

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

suppenee jos sen osasummien jono suppenee ja hajaantuu jos sen osasummien jono hajaantuu.

Esimerkki 20.1. Sarja

$$\sum_{i=1}^{\infty} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$$

hajaantuu, sillä sen osasummien jono on muotoa $(1, 3, 6, 10, \ldots)$ eikä selvästi lähesty mitään tiettyä reaalilukua, joten sarja hajaantuu.

Esimerkki 20.2. Sarja

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

suppenee, sillä sen osasummien jono on muotoa $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots)$ ja lähestyy lukua 1.

Huomaa kuitenkin, että osasummien kirjoittaminen kuten yllä ei ole todistus suppenemisesta. Näistä osasummista on kuitenkin se hyöty, että niiden avulla saadaan pääteltyä yksi kriteeri sarjojen suppenemiselle. Ensinnä oletetaan, että meillä on sarja, jonka termit ovat positiivisia eli $a_i > 0$ kaikilla i. Tästä seuraa se, että osasummat $(S_1, S_2, S_3, \ldots)$ muodostavat **kasvavan jonon**, koska $S_j - S_{j-1} = a_j$. Keskeinen lause tällaisille kasvaville jonoille on, että kasvava jono suppenee jos se on ylhäältä rajoitettu. Osasummien kohdalla tämä tarkoittaa seuraavaa:

Lause 2. Osasummien jono $(S_1, S_2, S_3, \ldots)$ suppenee, jos

1. Nämä osasummat muodostavat kasvavan jonon eli jos kaikki termit a_i ovat positiivisia.

2. Tämä osasummien jono on ylhäältä rajoitettu eli on olemassa luku M siten että $S_n < M$ eli jokainen osasumma on aina alle M:n.

Osasummien jonon suppeneminen tarkoittaa, että summa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ on äärellisenä olemassa. Täten yllä oleva lause antaa riittävät ehdot sarjan suppenemiselle.

Esimerkki 20.3. Sarjan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

n:s osasumma on

$$\begin{aligned} &1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+\cdots\cdot n} \\ <&1+1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\frac{1}{2^{n-1}}<3. \end{aligned}$$

Eli osasummat ovat ylhäältä rajoitettuja: S_n on aina pienempi kuin 3. Koska lisäksi sarjan termit $\frac{1}{n!}$ ovat positiivisia, niin sarja suppenee lauseen 1 nojalla.

Tässä vaiheessa on syytä palauttaa mieleen, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hajaantuu ja että geometriset sarjat $\sum_{k=0}^{\infty} aq^k$ suppenevat, kun $-1 < q < 1$. Näiden avulla voimme osoittaa useiden muiden sarjojen suppenemisen tai hajaantumisen *vertailemalla* näitä sarjoja sellaisiin sarjoihin, joiden tiedämme suppenevan tai hajaantuvan.

Tarkastellaan esimerkiksi sarjaa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$$

Tehtävänä on nyt osoittaa tämän sarjan suppeneminen. Kuinka edetä? Ensinnä pitää huomata, että tämän sarjan termit ovat positiivisia, joten sarjan osasummat muodostavat kasvavan jonon. Toisaalta pitää huomata, että vaikka tämä sarja ei itse asiassa ole geometrinen sarja, niin se muistuttaa aika paljon geometrista sarjaa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}.$$

Kirjoitetaan nämä kaksi sarjaa allekkain:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{28} + \cdots$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots$$

Huomataan, että pakolla

$$S_j = \sum_{n=1}^{j} \frac{1}{3^n+1} < \sum_{n=1}^{j} \frac{1}{3^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2},$$

koska sarjojen jokaiselle termille pätee

$$\frac{1}{3^n+1} < \frac{1}{3^n}.$$

Tässä sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ on sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$ **majoranttisarja**. Täten sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$ suppenee majoranttiperiaatteen nojalla. Tätä periaatetta voi soveltaa sarjoille, joiden termit a_n ovat positiivisia ja joille löydetään suppeneva majoranttisarja ("suurempi sarja"). Tarkka matemaattinen perustelu tälle periaatteelle perustuu siihen, että osasummien jono on ylhäältä rajoitettu ja kasvava:

1. Sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$ yleinen termi $\frac{1}{3^n+1}$ on positiivinen, joten tämän sarjan osasummat S_j muodostavat kasvavan jonon.
2. Osasummat ovat ylhäältä rajoitettuja:
$$S_j = \sum_{n=1}^{j} \frac{1}{3^n+1} < \sum_{n=1}^{j} \frac{1}{3^n} < 1/2.$$
3. Täten sarja suppenee, koska sen osasummat muodostavat kasvavan, ylhäältä rajoitetun jonon.

Esimerkki 20.4. Todista vastaavalla tekniikalla, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$$

suppenee.

Majoranttiperiaatteessa siis etsittiin positiivistermiselle sarjalle suppeneva, osasummiltaan suurempi sarja. Kun tällainen sarja löytyi, voitiin vedota siihen että alkuperäisen sarjan osasummat muodostavat kasvavan, rajoitetun jonon, jolloin tämä sarja suppenee.

Minoranttiperiaatteen avulla puolestaan yritetään todistaa että jokin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuu. Tämä periaate on tavallaan majoranttiperiaatteen peilikuva, sillä nyt pyritään löytämään sarjaa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *pienempi sarja, joka hajaantuu.* Idea avautuu esimerkin kautta

Esimerkki 20.5. Osoita, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-1}$$

hajaantuu.

Ratkaisu. Sarjan n:s termi on $\frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$. Toisaalta sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

hajaantuu. Täten

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-1} \longrightarrow \infty$$

Eli sarja hajaantuu, koska sillä on hajaantuva minoranttisarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Jos tehtävänä on todistaa jonkin positiivistermisen sarjan suppeneminen, niin usein majoranttiperiaate auttaa: etsitään majoranttisarja, joka on

1. jokaiselta termiltään suurempi kuin tehtävän sarja ja
2. jonka tiedetään suppenevan.

Näissä tehtävissä hankaluutena on usein löytää tämä suppeneva majoranttisarja. Hyvä idea on tällöin katsoa muistuttaako tehtävän sarja jotain tunnettu sarjaa, kuten geometrista sarjaa. Tämän jälkeen osoitetaan, että sarjan jokainen termi on pienempi kuin tämän majoranttisarjan vastaava termi. Tämä taas tapahtuu esimerkiksi osoittamalla että tämän sarjan osoittaja on pienempi kuin majoranttisarjan osoittaja ja/tai että tämän sarjan nimittäjä on suurempi kuin majoranttisarjan nimittäjä.

Huomaa että majoranttiperiaatetta käytettäessä saadaan ainoastaan tieto, että sarja suppenee. Tällä tavalla ei saada kuitenkaan tietoa siitä, mikä tämä summa on.

Minoranttiperiaatetta käytettäessä puolestaan on syytä tarkkailla, muistuttaako tehtävän sarja mitään tiettyä sarjaa joka hajaantuu. Jos muistuttaa, niin on osoitettava että tämän sarjan jokainen termi on suurempi kuin minoranttisarjan vastaava termi. Tämä tapahtuu esimerkiksi osoittamalla, että tämän jokaisen termin osoittaja on suurempi tai nimittäjä on pienempi kuin minoranttisarjassa.

21 Osamäärätesti

Osamäärätesti perustuu kahteen ideaan:

1. Geometrinen sarja suppenee, jos $-1 < q < 1$. Jos positiivistermiselle sarjalle löydetään suppeneva geometrinen majoranttisarja, niin tämä sarja suppenee.

2. Sarjan suppeneminen määräytyy ainoastaan "loppusumman"

$$\sum_{n=j}^{\infty} a_n = a_j + a_{j+1} + \cdots$$

   perusteella (koska ensimmäisen $(j-1)$:den termin summa on äärellinen). Jos tälle loppusummalle löydetään suppenevat majoranttisarja, niin koko sarja suppenee.

Tutkitaan nyt positiivistermistä sarjaa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jolle pätee

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1.$$

Eli tämän sarjan termien suhde lähestyy jotain lukua $q < 1$, kun n kasvaa rajatta. Oleellista on, että tämä luku q on alle yhden. Tästä seuraa, että jostain termistä a_N lähtien suhde $\frac{a_{N+1}}{a_N}$ on pakolla alle yhden. Täten voidaan valita jokin ykköstä pienempi (mutta q:ta suurempi) luku c, siten että suhde $\frac{a_{N+1}}{a_N}$ on jostain termistä lähtien alle luvun c. Verrataan tämän sarjan loppusummaa geometriseen sarjaan jonka yleinen termi on Ac^n:

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} Ac^n = A + Ac + Ac^2 + Ac^3 + \cdots$$

Nyt tämän alle olevan geometrisen sarjan summa on $Ac/(1-c)$, mikä on äärellinen koska c on alle yhden.

Tästä geometrisesta sarjasta saadaan yllä olevalle loppusummalle majoranttisarja:

1. Aina voidaan valita tarpeeksi suuri luku A siten, että $A > a_N$.
2. Koska $a_{N+1}/a_N < c$, niin $a_{N+1} < ca_N < cA$. Täten tuon suppenevan geometrisen sarjan jokainen termi on suurempi kuin summan $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ vastaava termi.

Täten tämä geometrinen sarja on tuon loppusumman majoranttisarja. Tässä tuli todistettua seuraava tulos:

Lause 3. Oletetaan, että positiivistermiselle sarjalle $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pätee, että $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$. Tällöin sarja suppenee majoranttiperiaatteen nojalla.

Tulos johtuu siitä, että sarjan loppusummalle on mahdollista löytää geometrinen majoranttisarja, jonka suhdeluku c on jossain yhden ja q:n välissä. Koska loppusumman häntä määrää sen suppenemisen, niin tämä toimii. Kun testataan osamäärän raja-arvoa $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, tehdään **osamäärätesti**. Jos tämä raja arvo $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ on alle yhden, sarja suppenee. Jos se on yli yhden, sarja hajaantuu. Jos se on tasan yksi, osamäärätesti ei kerro suppeneeko vai hajaantuuko sarja.

Esimerkki 21.1. Testaa, suppeneeko vai hajaantuuko sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{7}\right)^n.$$

Ratkaisu. Lasketaan osamäärän raja-arvo:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}}{n\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{1}{7}\right) = 1\cdot\left(\frac{1}{7}\right) < 1\end{aligned}$$

Täten sarja suppenee osamäärätestin nojalla.

Esimerkki 21.2. Osoita osamäärätestin avulla, että sarja

$$n^{100}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

suppenee.

22 Itseinen suppeneminen

Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **suppenee itseisesti** jos sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

suppenee eli jos sarjan termien itseisarvoista muodostuva sarja suppenee. Usein on helpompi todeta sarjan itseisarvoista muodostuvan sarjan suppeneminen. Tästä on hyötyä suppenemista tutkittaessa, sillä itseinen suppeneminen implikoi suppenemista

Lause 4. Jos sarja suppenee itseisesti, se suppenee. Eli jos $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ suppenee, niin myös $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee.

Esimerkki 22.1. Sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$$

suppenee itseisesti, sillä sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

suppenee.

23 Kertausta 1. välikokeeseen

23.1 Algebraa

Tämänkertainen kurssimoniste sisältää runsaasti harjoitustehtäviä. Syynä tähän on se, että matematiikkaa oppii parhaiten itse tekemällä ja laskemalla. Vastaukset tehtävin käsitellään osin kertausluennolla, mutta kaikkiin tehtäviin tulee myös tukikurssin kotisivulle vastaukset.

Koetehtävät ovat usein olleen harjoitustehtävien variaatioita. Harjoitustehtävät taas ovat käsitelleet (pääosin) seuraavia aiheita:

1. Funktiot (eli kuvaukset): injektiot, surjektiot ja bijektiot. Käänteisfunktiot. Määrittelyjoukot.

2. Relaatiot.

3. Induktiotodistus.
4. Rationaali- ja irrationaaliluvut.
5. Binomikaava.
6. Epäyhtälöt. Kolmioepäyhtälö.
7. Supremum ja infimum.
8. Raja-arvot. Kuristusperiaate.
9. Jatkuvuus. Jatkuvien funktioiden ominaisuudet: ne saavat suljetulla välillä maksimin ja minimin.
10. Potenssifunktiot. Neperin luku e ja sen esitys sarjana.
11. Geometriset sarjat. Sarjojen suppeneminen/hajaantuminen. Majorantti/minoranttiperiaate. Osamäärätesti. Itseinen suppeneminen.

Kaikkia näitä aihe-alueita ei tässä monisteessa käydä läpi. Aloitamme algebralla, koska usein kokeessa käy niin, että ymmärtää tehtävän idean mutta oma laskutekninen osaaminen ei vaan riitä. Kaikissa yllä luetelluilla aiheissa hyötyy suuresti algebran osaamisesta. Tarvittavat laskutekniikat yhtälöiden ja epäyhtälöiden pyörittämiseen oppii kuitenkin varsin nopeasti.

Kokeessa on siis oleellista osata

1. Manipuloida lausekkeita kuten
$$\frac{7^n - 5^{n+1}}{7^{n-2} - 6^n}$$
2. Manipuloida epäyhtälöitä kuten $|1 - \frac{2}{x}| < 1$.

Tämän monisteen tehtävissä käytetään kaikissa jonkinlaista algebraa: esimerkiksi induktiotehtävissä otetaan yleensä yhteisiä tekijöitä ja raja-arvotehtävissä usein osoittaja ja nimittäjä kerrotaan jollakin luvulla. Kiinnitä jokaisen tehtävän kohdalla huomiota käytettyihin tekniikoihin, sillä niiden osaaminen on kokeessa erityisen oleellista.

23.2 Funktiot

Yleensä helpoimpia funktiotehtäviä on laajimpien mahdollisten määrittelyjoukkojen etsiminen.

Esimerkki 23.1. Esitä seuraavien funktioiden laajin mahdollinen määrittelyjoukko (eli mahdollisimman suuri joukko A siten, että f on funktio $A \to B$ jollekin maalijoukolle B):

$$
\begin{aligned}
&(a)\ f(x) = x^2 \\
&(b)\ f(x) = 1/x \\
&(c)\ f(x) = \sqrt{x} \\
&(d)\ f(x) = 1/\sqrt{x} \\
&(e)\ f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{x+4} \\
&(f)\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x^2+1}
\end{aligned}
$$

Ratkaisu: Tässä oleellista on muistaa, että nollalla ei saa jakaa ja että neliöjuuri ei ole määritelty negatiivisilla luvuilla.

(a) x^2 on määritelty kaikilla reaaliluvuilla, joten $A = \mathbb{R}$

(b) $1/x$ on määritelty kaikilla reaaliluvuilla paitsi nollalla, joten $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(c) $\sqrt{x}$ on määritelty kaikilla ei-negatiivisilla reaaliluvuilla, joten $A = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$

(d) $1/\sqrt{x}$ on määritelty kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla, joten $A = \mathbb{R}_+$

(e) $\frac{\sqrt{x+5}}{x+4}$ on määritelty kun $x \geq -5$ ja $x \neq -4$

(f) $\frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x^2+1}$ on määritelty kaikilla reaaliluvuilla, koska $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ ja $x^2 + 1 \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Usein tehtävänä on todistaa tietty funktio injektioksi ja/tai surjektioksi. Jos funktio on sekä injektio, että surjektio, se on bijektio ja sillä on täten käänteiskuvaus. Jatkotehtävänä on yleensä löytää tämä käänteiskuvaus.

Esimerkki 23.2. Mitkä seuraavista funktioista ovat injektioita? Osoita jokaisen kohdalla, miksi kyseinen funktio on tai ei ole injektio.

$$
\begin{aligned}
&(a)\ f(x) = x^2,\ \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\\
&(b)\ f(x) = x^2,\ \ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\\
&(c)\ f(x) = x^2,\ \ f : [-3, 3] \to \mathbb{R}\\
&(d)\ f(x) = \sqrt{x},\ \ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\\
&(e)\ f(x) = x^3,\ \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\\
&(f)\ f(x) = x^{1/3},\ \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Ratkaisu: Sen todistaminen, että jokin funktio ei ole injektio on usein helppoa: valitaan kaksi x-arvoa, joilla funktio saa saman arvon. Sen sijaan sen todistaminen, että jokin funktio on injektio, on vaikeampaa. Pitää valita kaksi erisuurta x-arvoa x_1 ja x_2, ja osoittaa että funktion arvo on näissä pisteissä erisuuri.

Ratkaisu: Sen todistaminen, että jokin funktio ei ole injektio on usein helppoa: valitaan kaksi x-arvoa, joilla funktio saa saman arvon. Sen sijaan sen todistamine, että jokin funktio on injektio, on vaikeampaa. Pitää valita kaksi erisuurta x-arvoa x_1 ja x_2 ja osoittaa että funktion arvo on näissä pisteissä erisuuri.

(a) ei ole injektio, sillä esimerkiksi $f(1) = f(-1)$, vaikka $1 \neq -1$.

(b) on injektio. Tämä todistetaan seuraavasti: valitaan $x_1 \neq x_2$. Koska määrittelyjoukkona on $\mathbb{R}_+$, sekä x_1, että x_2 ovat positiivisia. Täten $x_1 + x_2 \neq 0$, joten

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 \neq 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \neq 0 \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 \neq 0 \Rightarrow x_1^2 \neq x_2^2$$

(c) ei ole injektio samasta syystä kuin (a)-kohdan funktio.

(d) on injektio. Tämä todistetaan seuraavasti: valitaan $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 \neq 0 \Rightarrow (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \neq 0$ eli $\sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2}$, sillä lausekkeen $(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})$ kummankin tekijän on oltava erisuuria kuin nolla, sillä muuten koko lausekekin olisi nolla.

(d), (e) ja (f) ovat injektioita. Todistukset etenevät samaan malliin.

Esimerkki 23.3. Mitkä seuraavista funktioista ovat surjektioita? Osoita jokaisen kohdalla, miksi kyseinen funktio on tai ei ole surjektio.

$$
\begin{aligned}
&(a)\ f(x) = x^2,\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
&(b)\ f(x) = x^2,\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\
&(c)\ f(x) = x^2,\ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\
&(d)\ f(x) = \sqrt{x},\ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\
&(e)\ f(x) = x^3,\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
&(f)\ f(x) = x^{1/3},\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Ratkaisu: Funktio on surjektio, jos jokaisella sen maalijoukon alkiolla y on jokin alkio x lähtöjoukossa siten että $f(x) = y$.

(a) ei ole surjektio, sillä negatiivisilla alkiolla y ei ole alkiota x siten että $y = x^2$. Sen sijaan jokaisella ei-negatiivisella alkiolla y on jokin alkio x (eli alkio $\sqrt{y}$) siten että $y = x^2$. Täten (b)-kohdan funktio on surjektio. Samoin (c)-kohdan funktio. (d)-kohdan funktio ei ole surjektio, koska sekään ei saa negatiivisia arvoja. Kohtien e ja f funktiot ovat surjektioita.

Esimerkki 23.4. Muodosta yhdistetyt kuvaukset $f \circ g$ ja $g \circ f$ (oleta, että määrittelyjoukot on rajattu siten, että kyseiset kuvaukset ovat olemassa), kun:

$$
\begin{aligned}
&(a)\ f(x) = x^3,\ g(x) = 5x \\
&(b)\ f(x) = x^{1/3},\ g(x) = \sqrt{x} \\
&(c)\ f(x) = x^2 + 6x + 1,\ g(x) = x^2 + 2 \\
&(d)\ f(x) = x,\ g(x) = 1/x
\end{aligned}
$$

Ratkaisu:

$$
\begin{aligned}
(a)\ & f \circ g = f(g(x)) = f(5x) = (5x)^3 = 125x^3 \\
& g \circ f = g(f(x)) = g(x^3) = 5x^3 \\
(b)\ & f \circ g = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^{1/3} = x^{1/6} \\
& g \circ f = g(f(x)) = g(x^{1/3}) = \sqrt{x^{1/3}} = x^{1/6} \\
(c)\ & f \circ g = f(g(x)) = f(x^2 + 2) = (x^2 + 2)^2 + 6(x^2 + 2) + 1 \\
& g \circ f = g(f(x)) = g(x^2 + 6x + 1) = (x^2 + 6x + 1)^2 + 2 \\
(d)\ & f \circ g = f(g(x)) = f(1/x) = 1/x \\
& g \circ f = g(f(x)) = g(x) = 1/x
\end{aligned}
$$

Esimerkki 23.5. Osoita että seuraavilla funktioilla f on käänteiskuvaus $f^{-1}(x)$ todistamalla, että ne ovat bijektioita (eli injektioita ja surjektioita). Etsi kyseinen käänteiskuvaus. Tarkista että $f \circ f^{-1} = x = f^{-1} \circ f$ (eli että kyseiset yhdistetyt kuvaukset ovat identtisiä kuvauksia).

$$\begin{aligned}
&(a)\ f(x) = x^3,\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
&(b)\ f(x) = x^{1/3},\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
&(c)\ f(x) = 1/x,\ f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \\
&(d)\ f(x) = x^2,\ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\
&(e)\ f(x) = x^3 + 10,\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ratkaisu: Esitän tässä ainoastaan käänteiskuvaukset. Bijektiivisyyden voi osoittaa todistamalla, että jokaisella $y \in B$ on tasan yksi $x \in A$ siten, että $f(x) = y$

$$\begin{aligned}
&(a) f^{-1}(x) = x^{1/3} \\
&(b) f^{-1}(x) = x^3 \\
&(c) f^{-1}(x) = 1/x \\
&(d) f^{-1}(x) = \sqrt{x} \\
&(e) f^{-1}(x) = (x - 10)^{1/3}
\end{aligned}$$

Esimerkki 23.6. Etsi mahdollisimman suuret reaaliakselin välit A ja B siten, että $f(x) = x^2 + 6x$ on injektio A:ssa ja B:ssä.

Ratkaisu: Ratkaistaan yhtälö $y = x^2 + 6x$ x:n suhteen:

$$y = x^2 + 6x \iff x^2 + 6x - y = 0 \iff x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 4y}}{2}.$$

Tällä on reaalisia ratkaisuja ainoastaan, kun $36 + 4y \geq 0$ eli kun $y \geq -9$. Tehtävän paraabeli $f(x) = x^2 + 6x$ saavuttaa pohjansa kohdassa $x = -3$. Valitaan välit A ja B siten, että

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 4y}}{2}$$

on yksikäsitteinen näillä väleillä. Kun x kuuluu välille $(-\infty, -3]$, on kyseinen kuvaus yksikäsitteisesti:

$$x = \frac{-6 - \sqrt{36 + 4y}}{2}$$

Samoin jos x kuuluu välille $(3, \infty)$, on kuvaus yksikäsitteinen:

$$x = \frac{-6 + \sqrt{36 + 4y}}{2}.$$

Täten mahdollisimman laajat välit A ja B ovat[10]:

$$A = (-\infty, -3], B = (3, \infty)$$

23.3 Induktiotodistus

Esimerkki 23.7. Todista induktiolla, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Ratkaisu:

1. Kun $n = 1$, $\frac{1}{1 \cdot 2} = 1/2$ eli kumpikin puoli ovat samoja, joten yhtälö pätee arvolla $n = 1$.

2. Oletetaan yhtälö todeksi arvolla n. Päätellään tästä yhtälö todeksi arvolla $n+1$ lisäämällä kummallekin puolelle termi $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ ja sieventämällä vasen puoli haluttuun muotoon:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{n}{n+1} \\
\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n+1}{n+2},
\end{aligned}$$

joten väite pätee arvolla $n+1$. Induktion nojalla väite pätee kaikilla luonnollisilla luvuilla.

[10]Tai vastaavasti $A = (-\infty, -3), B = [3, \infty)$: tuo numero 3 voi kuulua kumpaan tahansa väliin.

Esimerkki 23.8. Todista induktiolla, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ratkaisu:

1. Arvolla 1 $P(1)$ on tosi, sillä yhtälö pätee tällä arvolla: vasemmalle puolelle jää 1 ja oikealle puolelle $1(1+1)/2 = 1$.

2. Oletetaan että yhtälö pätee arvolla n. Tällöin

   $$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

   Lisätään kummallekin puolelle $n+1$, ja muokataan yhtälön oikeaa puolta:

   $$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + 2\frac{(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

   joten väite pätee kaikilla luonnollisilla luvuilla.

Esimerkki 23.9. Todista induktiolla, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$,

$$n < 2^n$$

Ratkaisu:

1. Kun $n = 1$, $1 < 2^1$, eli väite pätee.

2. Tehdään induktio-oletus: $n < 2^n$ on tosi.

   Induktioväite: $n + 1 < 2^{n+1}$

   Eli meidän pitää päätellä oletuksesta $n < 2^n$ väite $n+1 < 2^{n+1}$. Aloitetaan muokkaamalla epäyhtälön oikea puoli haluttuun muotoon Tämä tapahtuu kertomalla kumpikin puoli kahdella:

   $$\begin{aligned} n &< 2^n \\ 2n &< 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Induktioväite on todistettu, jos voidaan päätellä, että $n+1 \leq 2n$, koska tällöin $n+1 \leq 2n < 2^{n+1} \Rightarrow n+1 < 2^{n+1}$. Väite $n+1 \leq 2n$ on helppo todistaa: vähennetään kummaltakin puolelta n ja saadaan $1 \leq n$ mikä on selkeästi tosi, sillä n kuuluu luonnollisiin lukuihin. Täten väite on todistettu.

Esimerkki 23.10. Todista induktiolla, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Esimerkki 23.11. Todista induktiolla, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

Esimerkki 23.12. Todista induktiolla, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

23.4 Kolmioepäyhtälö

Esimerkki 23.13. Kolmioepäyhtälö kertoo, että $|a+b| \leq |a| + |b|$. Todista tämän avulla, että

$$|a-b| \leq |a-c| + |b-c|$$

Mitä tämä tarkoittaa intuitiivisesti, kun itseisarvo tulkitaan etäisyytenä?

Ratkaisu. Tässä tehtävässä on ideana lisätä $c - c$ eli nolla tuohon itseisarvon sisälle ja soveltaa kolmioepäyhtälöä;

$$|a-b| = |a-c+c-b| \leq |a-c| + |c-b| = |a-c| + |b-c|$$

Tämän voi tulkita siten, että kahden pisteen a ja b etäisyys $|a-b|$ on pienempi kuin etäisyys kuljettuna pisteen c kautta eli $|a-c|+|b-c|$ joka on siis etäisyys a:sta c:hen plus etäisyys c:stä b:hen.

Esimerkki 23.14. Osoita, että

$$|a+b+c| \leq |a| + 2|b| + |c|$$

Ratkaisu. Kolmioepäyhtälöä voi soveltaa suoraan lukuihin $a+b$ ja c: $|a+b+c| \leq |a+b| + |c|$. Nyt sovelletaan kolmioepäyhtälöä toisen kerran:

$$|a+b| + |c| \leq |a| + |b + |c|$$

Lisäksi $|b| \leq 2|b|$, joten

$$|a| + |b| + |c| \leq |a| + 2|b| + |c|$$

23.5 Raja-arvoja

Esimerkki 23.15. Laske raja-arvo

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-1}{x^2-1}\right)$$

Ratkaisu: Tässä käytetään kahta algebran kaavaa: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ ja $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$. Näiden aktiivinen osaaminen kokeessa on oleellista.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-1}{x^2-1}\right) &= \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-1}{(x-1)(x+1)}\right)\\
&= \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}\right)\\
&= \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x^2+x+1)}{(x+1)}\right) = 3/2.
\end{aligned}$$

Esimerkki 23.16. Laske raja-arvo

$$\lim_{x\to 9}\left(\frac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}\right)$$

Ratkaisu: Tämä on vähän edellistä vaikeampi: nyt kaavaa $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ käytetään kahteen otteeseen:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 9}\left(\frac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}\right) &= \lim_{x\to 9}\left(\frac{(x-9)(x+9)}{\sqrt{x}-3}\right)\\
&= \lim_{x\to 9}\left(\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)(x+9)}{\sqrt{x}-3}\right)\\
&= \lim_{x\to 9}\left(\frac{(\sqrt{x}+3)(x+9)}{1}\right)\\
&= 6\cdot 18 = 108
\end{aligned}$$

Esimerkki 23.17. Laske raja-arvo

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^4-16}{x-2}\right)$$

Ratkaisu: Jälleen käytetään kaavaa $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ kahdesti:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^4-16}{x-2}\right) &= \lim_{x\to 2}\left(\frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x-2}\right)\\ &= \lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x-2}\right)\\ &= \lim_{x\to 2}\left(\frac{(x+2)(x^2+4)}{1}\right) = 32\end{aligned}$$

Esimerkki 23.18. Laske raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$$

Ratkaisu. Huomataan, että raja-arvo muistuttaa Neperin luvun e määritelmää. Muokataan lauseketta:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{3}\\ &= \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{3}\\ &= e^3.\end{aligned}$$

Huomaa, että tässä raja-arvo otettiin ulkofunktion $g(x) = x^3$ sisältä. Koska tämä funktio on jatkuva, niin raja-arvon saa ottaa tällä tavalla funktion sisältä. Lisäksi käytettiin algebran tulosta, jonka mukaan $x^{ab} = (x^a)^b$.

Esimerkki 23.19. Laske raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{27}{n}\right)^{3n}$$

Ratkaisu. Huomataan, että jälleen raja-arvo muistuttaa Neperin luvun e

määritelmää:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{27}{n}\right)^{3n} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/27}\right)^{3n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n/27}\right)^{n}\right)^{3} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n/27}\right)^{n/27}\right)^{3\cdot 27} \\
&= \lim_{n/27\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n/27}\right)^{n/27}\right)^{3\cdot 27} \\
&= \left(\lim_{n/27\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/27}\right)^{n/27}\right)^{3\cdot 27} \\
&= (e)^{3\cdot 27} \\
&= e^{81}
\end{aligned}
$$

Huomaa, että tässä otettiin jälleen raja-arvo ulkofunktion sisästä. Lisäksi käytettiin tietoa, jonka mukaan silloin kun n kasvaa rajatta eli $n \to \infty$ niin myös $n/27$ kasvaa rajatta eli $n/27 \to \infty$.

Esimerkki 23.20. Laske raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}-n$$

Ratkaisu. Tässä tehtävässä nimittäjä on 1. Kirjoitetaan lauseke siis muodossa.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}-n}{1}$$

Nyt osoittajassa on erotus $a-b$. Kerrotaan nyt osoittaja ja nimittäjä summalla $a+b$, jolloin voidaan hyödyntää kaavaa $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}-n}{1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{(\sqrt{n^2+n}+n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n})^2-n^2}{(\sqrt{n^2+n}+n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+n)-n^2}{(\sqrt{n^2+n}+n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(\sqrt{n^2+n}+n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2(1+1/n)}+n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+1/n}+n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n(\sqrt{1+1/n}+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1} = 1/2
\end{aligned}$$

Tässä siis pyrittiin löytämään yhteisiä tekijöitä nimittäjästä ja osoittajasta. Tekijä n saatiin yhteiseksi tekijäksi. Huomaa erityisesti kuinka n otettiin ulos neliöjuuresta.

23.6 Sarjoja

Oleellista on osata geometriset sarjat ja minorantti- ja majoranttiperiaate. Itseistä suppenemista voi joutua käyttämään. Huomaa, että etsittäessä minoranttisarjaa, on kyseinen minoranttisarja yleensä

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Vastaavasti etsittäessä majoranttisarjaa, on tämä sarja yleensä jokin suppeneva geometrinen sarja.

Esimerkki 23.21. Mitkä seuraavista ovat geometrisia sarjoja? Jos kyseessä on geometrinen sarja, mikä on sen suhdeluku?

$$\begin{aligned}
&(a)\ 1+2+3+4+5+\cdots \\
&(b)\ 1+4+16+64+\cdots \\
&(c)\ 1+1/2+1/4+\cdots \\
&(d)\ 1-1/2+1/4-1/8+\cdots \\
&(e)\ \frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}+\cdots
\end{aligned}$$

Ratkaisu: Kaikki muut paitsi (a) ovat geometrisia sarjoja. Suhdeluvut: (b): 4, $(c): 1/2$, $(d): -1/2$, $(e): 1/(x-1)$.

Esimerkki 23.22. Mikä on geometrisen sarjan

$$1+1/2+1/4+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

summa?

Ratkaisu: Geometrisen sarjan summa on ensimmäinen termi A jaettuna $1-q$:lla, jossa q on suhdeluku. $A=1$ ja $q=1/2$, joten kyseinen summa on $1/(1-(1/2))=2$

Esimerkki 23.23. Mikä on geometrisen sarjan

$$1-1/2+1/4-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

summa?

Ratkaisu: $A=1$ ja $q=-1/2$, joten kyseinen summa on $1/(1-(-1/2))=2/3$

Esimerkki 23.24. Millä x:n arvoilla

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^5}+\cdots$$

suppenee?

Ratkaisu: Kirjoitetaan lauseke ensin geometrisen sarjan kaavamuodossa:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^5}+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)^i$$

Kyseessä on siis geometrinen sarja. Geometrinen sarja suppenee kun sen suhdeluku on itseisarvoltaan pienempi kuin yksi. Eli kun

$$\left|\frac{1}{(x-1)^2}\right| < 1 \iff 1 < |(x-1)^2| \iff x > 2 \text{ tai } x < 0$$

Esimerkki 23.25. Esitä $1,111111\overline{11}$ kahden kokonaisluvun osamääränä.

Ratkaisu:

$$1,111111\overline{11} = 1+1/10+1/100+\cdots = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^i = \frac{1}{1-1/10} = 1/(9/10) = 10/9$$

Esimerkki 23.26. Keksi itse geometrinen sarja, jonka summa on (a) 10 (b) e.

Esimerkki 23.27. Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2}$$

Ratkaisu: Havaitaan aluksi, että sarja on positiivisterminen. Lisäksi:

$$\frac{n+1}{n^2} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

on puolestaan harmoninen sarja joka hajaantuu. Minoranttiperiaatteen nojalla

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2}$$

hajaantuu.

Esimerkki 23.28. Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n+1}$$

Ratkaisu: Havaitaan aluksi, että sarja on positiivisterminen. Lisäksi

$$\frac{1}{4^n+1} < \frac{1}{4^n},$$

joka on geometrisen sarja yleinen termi.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1/4}{1-1/4} = 1/3$$

eli kyseinen sarja suppenee, joten majoranttiperiaatteen nojalla myös

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n+1}$$

suppenee.

Esimerkki 23.29. Suppeneeko vai hajaantuuko

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!+n}$$

Ratkaisu: Havaitaan aluksi, että sarja on positiivisterminen. Lisäksi sen nimittäjässä on kertoma $n!$, mikä viittaisi että voimme ehkä verrata tätä sarjaan[11]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Huomataan, että tehtävän sarjan jokainen termi on pienempi kuin tuon sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ vastaava termi. Eli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!+n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

joten sarja suppenee majoranttiperiaatteen nojalla.

Esimerkki 23.30. Kehitä itse oma majoranttiperiaatetehtävä ja minoranttiperiaatetehtävä. Tämä on yllättävän helppoa, majoranttiperiaatteen tapauksessa tämä etenee seuraavasti:

1. Etsi sarja jonka tiedän suppenevan.

2. Lisää nimittäjään jokin vakio tai vähennä osoittajasta jokin vakio, jolloin saat uuden sarjan, jonka jokainen termi on pienempi kuin aikaisemman suppenevan sarjan vastaava termi.

Minoranttiperiaatteen tapauksessa etsit sarjan, joka haantuu ja muokkaat tästä uuden sarjan jonka jokainen vastaava termi on suurempi kuin tämän hajaantuvan minoranttisarjan.

[11] Lisäksi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1$, koska $0! = 1$.

Osa II
Toinen välikoe

24 Potenssisarjat

Jokainen **potenssisarja** on muotoa

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Yksinkertainen esimerkki potenssisarjasta on

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2},$$

jossa siis $a_k = 1/k^2$. Toinen esimerkki on

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^4 x^k,$$

jossa puolestaan $a_k = k^4$. Yleisesti ottaen on hyvä oppia tunnistamaan, mikä on potenssisarjan "yleinen termi" a_k.

Potenssisarjasta tekee potenssisarjan se, että siinä esiintyy x:n potensseja. Tämä x voidaan tulkita muuttujaksi, jolloin voidaan tutkia miten potenssisarjan suppeneminen tai hajaantuminen riippuu luvusta x. Merkitään nyt potenssisarjan summaa $f(x)$:llä. Eli

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Tuo potenssisarja selvästi suppenee joillakin x:n arvoilla ja mahdollisesti hajaantuu toisilla x-arvoilla. Se suppenee varmasti ainakin silloin, kun $x = 0$ koska tällöin sen summa on a_0.

Kiinnostuksen kohteena on löytää *kaikki ne x-arvot joilla sarja suppenee.* Tämä olisi huomattavan haastava tehtävä, jos potenssisarja $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ suppenisi vaikkapa arvoilla $x \in \{1, 3, 6, \pi\}$. Onneksi potenssisarjat suppenevat kuitenkin aina tietyllä *välillä.* Eli x-arvot, joilla $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ suppenee (eli joilla kyseinen summa on äärellisenä olemassa) muodostavat **suppenemisvälin** $x \in (-R, R)$. Sarja siis suppenee välillä $x \in$

$(-R, R)$. Se hajaantuu, kun $|x| > R$. Kun $x = R$ tai $x = -R$, sarja voi joko supeta tai hajaantua eli tapaukset $x = \pm R$ pitää tarkistaa erikseen.

Tämän välin päätepiste R on potenssisarjan **suppenemissäde**. Tämä saadaan käytännössä laskettua helposti seuraavan lauseen avulla:

Lause 5. Sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ suppenemissäde saadaan laskemalla raja-arvo:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R,$$

mikäli tämä raja-arvo on olemassa.

Esimerkki 24.1. Sarjassa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2},$$

yleinen termi $a_k = 1/k^2$. Siten

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{1/k^2}{1/(k+1)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{k^2} = 1.$$

Täten sarjan suppenemissäde on $R = 1$. Täten sarja suppenee ainakin välillä $x \in (-1, 1)$. Päätepisteet $x = \pm 1$ pitäisi vielä tarkistaa erikseen, ja itse asiassa voitaisiin todistaa[12], että kun $x = 1$, sarja suppenee:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \pi^2/6,$$

ja tämän nojalla kun $x = -1$, sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k^2}$$

suppenee itseisesti, joten se suppenee. Täten sarjan **suppenemisjoukko** on suljettu väli $[-1, 1]$. Sarja suppenee tällä välillä ja hajaantuu sen ulkopuolella.

Esimerkki 24.2. Tarkastellaan nyt sarjaa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{k^2}.$$

[12] Todistus on vaikeahko ja tulos annetaan tässä ainoastaan tiedoksi.

Tässä ”ongelmana” on se, että siinä esiintyy termin x asemesta termi $x+1$. Tällaisessa tapauksessa tehdään sijoitus $y = x+1$, jolloin sarja palautuu muotoon

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{k^2}.$$

Yllä todettiin, että tälläisen sarjan suppenemisjoukko on $y \in [-1,1]$. Sijoitetaan takaisin $x+1=y$: kun $y \in [-1,1]$ niin $x = y-1 \in [-1,0]$. Täten sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{k^2}$$

suppenemisjoukko on $x \in [-1,0]$.

Potenssisarjojen suppenemisessa hämärintä lienee se, että aiheeseen liittyy useita lähes samaa tarkoittavia termejä:

- Suppenemissäde on luku R.
- Suppenemisväli on avoin väli $(-R,R)$
- Suppenemisjoukko muodostuu kaikista niistä arvoista, joilla potenssisarja suppenee: se sisältää suppenemisvälin ja mahdollisesti sen päätepisteet R:n ja $-R$:n. Suppenemisjoukko voi olla siis neljää eli lajia:

$$\begin{aligned} &(-R,R) \text{ tai} \\ &[-R,R] \text{ tai} \\ &[-R,R) \text{ tai} \\ &(-R,R]. \end{aligned}$$

Eli jos tehtävässä kysytään millä arvoilla sarja suppenee, pyydetään suppenemisjoukkoa. Tällöin täytyy laskea suppenemissäde yllä esitellyllä tavalla ja tämän jälkeen tarkistaa päätepisteet R ja $-R$ erikseen.

25 Korkolaskentaa

Oletetaan, että korkoaste on r. Jos esimerkiksi $r = 0,02$, niin korko on 2 prosenttia. Tätä korkoastetta käytettään diskonttaamaan tulevia tuloja siten, että vuoden päästä saatava rahavirta jaetaan luvulla $1+r$ ja n:n vuoden kuluttua saatava rahamäärä jaetaan luvulla $1/(1+r)^n$. Täten jos vaikkapa yritys saa vuosittain voittoja rahamäärän π verran, on tämän voittovirran nykyarvo

$$\pi + \frac{\pi}{1+r} + \frac{\pi}{(1+r)^2} + \frac{\pi}{(1+r)^3} + \cdots$$

Tämä on geometrinen sarja, jonka summa on

$$\frac{\pi}{1 - 1/(1+r)} = \left(\frac{1+r}{r}\right)\pi.$$

Jos tämä voitto saadaan ainoastaan t:n periodin päähän tulevaisuuteen asti, niin summa on

$$\pi + \frac{\pi}{1+r} + \frac{\pi}{(1+r)^2} + \frac{\pi}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{\pi}{(1+r)^t}$$

Tämän summa on

$$\frac{\pi - (\pi/(1+r)^{t+1})}{1 - 1/(1+r)} = \pi\left(\frac{1 - 1/(1+r)^{t+1}}{1 - 1/(1+r)}\right).$$

Sijoituksella $q = 1/(1+r)$ tämä voidaan ilmaista muodossa

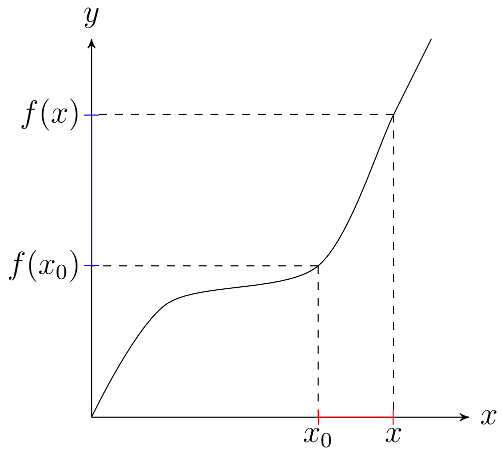
$$\pi\left(\frac{1 - q^{t+1}}{1 - q}\right).$$

26 Derivaatta

Tarkastellaan funktion f keskimääräistä muutosta tietyllä välillä (x_0, x). Funktio f muuttuu tällä välillä määrän $f(x) - f(x_0)$. Kun tämä määrä jaetaan välin pituudella $x - x_0$, saadaan **erotusosamäärä**

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Tämä kertoo funktion keskimääräisen muutoksen välillä (x_0, x). Alla tämä suhde on kuvattu:



Erotusosamäärä riippuu luonnollisesti luvusta x. Funktion derivaatan idea on laskea funktion keskimääräinen muutos pisteessä x_0. Tämä tapahtuu valitsemalla luku x yhä lähempää ja lähempää lukua x_0 ja katsomalla lähestyykö erotusosamäärä

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

tällöin jotakin lukua. Toisin sanottuna derivaatta on tämän erotusosamäärän raja-arvo:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{26.3}$$

Eli funktion f derivaatta pisteessä x_0 on sen erotusosamäärän raja-arvo, kun x lähestyy pistettä x_0.

Kaavalla (1) voi suoraan laskea derivaattoja, kuten seuraavista esimerkeistä selviää.

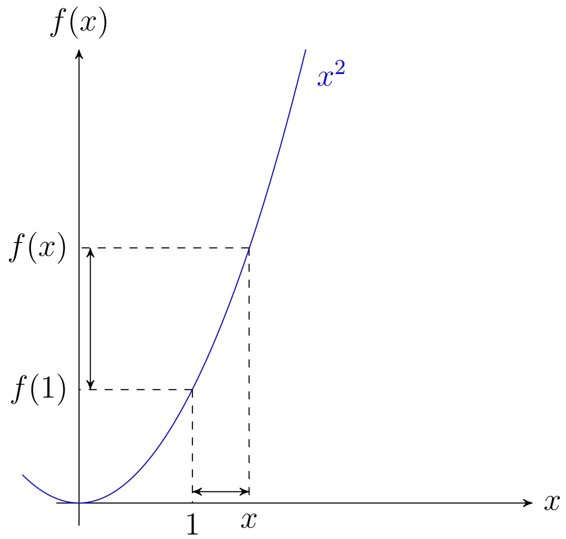
Esimerkki 26.1. Tunnetusti funktion $f(x) = x^2$ derivaatta on $2x$. Osoitetaan tämä kuitenkin derivaatan määritelmän eli kaavan (1) avulla: lasketaan osamäärän

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0}$$

raja-arvo, kun $x \to x_0$. Tätä varten palautetaan mieliin kaava $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, jonka avulla tämä raja-arvo on helppo laskea:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0. \end{aligned}$$

Eli funktion $f(x) = x^2$ derivaatta on olemassa kaikkialla, ja pisteessä x_0 tämä derivaatta saa arvon $2x_0$. Alla olevassa kuvassa esitetään piste $x_0 = 1$, jossa derivaatta saa siis arvon 2. Tämä nähdään kuvassa siten, että erotus $f(x) - f(1)$ lähestyy kahdella kerrottua erotusta $x - 1$, kun x lähestyy lukua 1:



Eli toisin sanottuna pystysuora nuoli on noin kaksi kertaa vaakasuora nuoli silloin, kun x on lähellä yhtä. Koska erotusosamäärän raja-arvo (eli derivaatta) on 2, niin näiden nuolien pituuksien suhde saadaan mielivaltaisen lähelle lukua 2, kun x valitaan tarpeeksi läheltä lukua 1.

Esimerkki 26.2. Laske suoraan derivaatan määritelmän avulla funktion $f(x) = 1/x$ derivaatta.

Ratkaisu. Lasketaan erotusosamäärä

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{1/x - 1/x_0}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{x_0/xx_0 - x/xx_0}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{(x_0 - x)/xx_0}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{-(x - x_0)/xx_0}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{-1}{xx_0} = \frac{-1}{x_0^2}.\end{aligned}$$

Huomaa, että funktion $f(x) = 1/x$ derivaatta ei ole tässä pisteessä määritelty. Eli toisin sanottuna funktio $f(x) = 1/x$ ei ole **derivoituva** origossa.

Funktion sanotaan siis olevan derivoituva niissä pisteissä, joissa erotusosamäärän raja-arvo on määritelty.

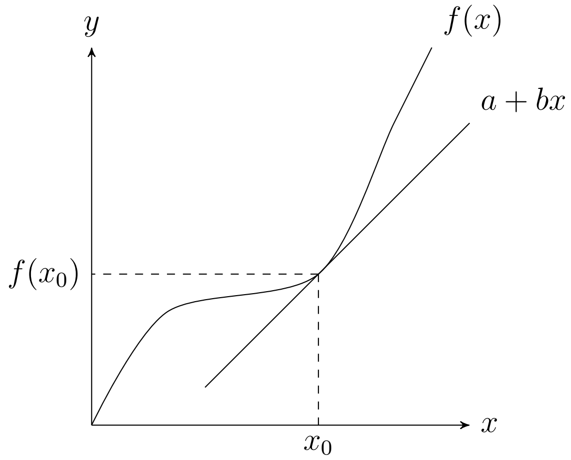
Esimerkki 26.3. Osoita derivaatan määritelmän avulla, että suoran $f(x) = a + bx$ derivaattafunktio on vakio b.

Ratkaisu. Erotusosamäärän raja-arvo on nyt

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{a + bx - a - bx_0}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{bx - bx_0}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{b(x - x_0)}{x - x_0} \\
&= b.
\end{aligned}$$

27 Tangenttisuoran yhtälö

Funktion $f(x)$ **tangenttisuora** pisteessä x_0 on suora $a + bx$, joka sivuaa funktiota f pisteessä x_0. Eli kuvana tämä tangenttisuora on seuraava:



Kuten yllä olevasta kuvasta näkee, funktion f tangenttisuoralle pisteessä x_0 on kaksi ehtoa:

1. Tangentin $a + bx$ derivaatta (eli b) pisteessä x_0 on sama kuin funktion f derivaatta tässä pisteessä. Eli

$$b = f'(x_0)$$

2. Funktio ja sen tangentti saavat saman arvon pisteessä x_0 eli

$$a + bx = f(x_0)$$

Nämä kaksi ehtoa määrittelevät funktion tangenttisuoran tietyssä pisteessä täysin, koska tangenttisuorassa $a + bx$ on kaksi valittavaa parametria: a ja b. Parametri b määräytyy siten, että tangentin ja funktion derivaatta yhtyvät. Parametri a määräytyy siten, että tangentti ja funktio saavat saman arvon tässä pisteessä.

Esimerkki 27.1. Etsitään funktion $f(x) = x^2$ tangenttisuora pisteessä $x = 5$. Ensinnä huomataan, että funktion x^2 derivaatta tässä pisteessä on $2 \cdot 5 = 10$. Täten tangenttisuoran $a+bx$ parametri b on 10. Täten tangenttisuora on siis muotoa $a+10x$, josta pitäisi vielä ratkaista a. Tämän ratkeaa asettamalla tangenttisuoran ja funktion x^2 arvot yhtä suuriksi pisteessä $x = 5$:

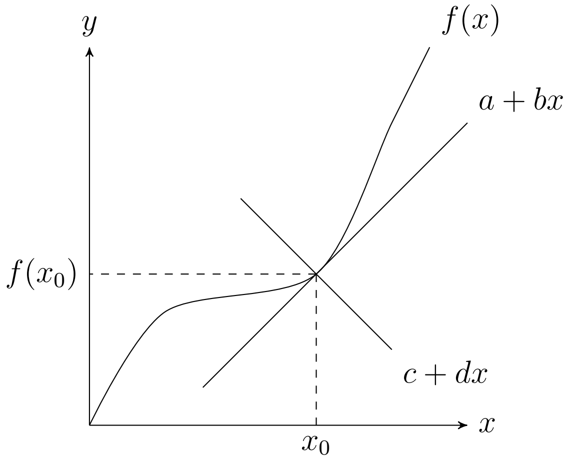
$$5^2 = a + 10 \cdot 5 \iff a = 25 - 50 = -25.$$

Täten vaaditun tangenttisuoran kaava on $-25 + 10x$.

Esimerkki 27.2. Etsi funktion $f(x) = \sqrt{x}$ tangenttisuoran kaava pisteessä $x = 1$

Ratkaisu. Derivoimalla saadaan, että funktion $f(x)$ derivaatta pisteessä x on yhtä kuin $1/(2\sqrt{x})$, joten tämä derivaatta saa arvon $1/2$ pisteessä $x = 1$. Täten tangenttisuoran parametri b on $1/2$. Toisaalta $\sqrt{1} = 1$, joten tangenttisuoran $a + (1/2)x$ pitää saada myös arvo 1 pisteessä $x = 1$: $a + 1/2 = 1 \iff a = 1/2$. Täten haluttu tangenttisuora on muotoa $1/2 + (1/2)x$.

Tangenttisuoralle on sukua normaalisuora, joka myös yhtyy funktioon f pisteessä x_0. Se kuitenkin leikkaa funktion tangentin kohtisuorassa: kuten suora $c + dx$ seuraavassa kuvassa:



Normaalisuora voidaan löytää samankaltaisella päättelyllä kuin tangenttisuorakin. Ensinnä on syytä huomata, että normaalisuoran kulmakerroin on $-1/f'(x_0)$, koska se on tangentin vastainen. Täten normaalisuoran parametri d saadaan laskemalla kaavalla $d = -1/f'(x_0)$. Parametri c puolestaan saadaan yhtälöstä $c - (1/f'(x_0))x = f(x_0)$.

Esimerkki 27.3. Etsi funktion $f(x) = \sqrt{x}$ normaalisuora pisteessä $x = 1$

Ratkaisu. Funktion $f(x)$ derivaatta pisteessä $x = 1$ on edelleen $1/2$. Täten normaalisuoran parametri d on $-1/(1/2) = -2$. Toisaalta $\sqrt{1} = 1$, joten normaalisuoran $c - 2d$ pitää saada myös arvo 1 pisteessä $x = 1$: $c - 2 = 1 \iff c = 3$. Täten normaalisuora on muotoa $3 - 2x$.

28 Differentiaalikehitelmä

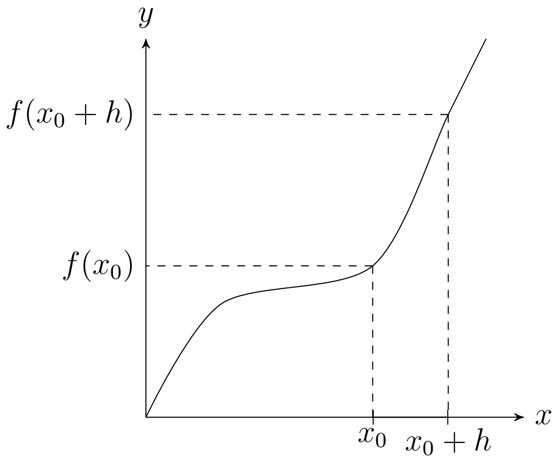
Funktion f derivaatta pisteessä x_0 eli $f'(x_0)$ on siis erotusosamäärän raja-arvo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Tämä voidaan esittää hieman eri muodossa sijoittamalla $h = x - x_0$: tällöin $x = x_0 + h$, joten derivaatan määritelmä saa muodon:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Tämä on siis sama määritelmä derivaatalle kuin aikaisemmin: teimme ainoastaan sijoituksen $h = x - x_0$. Kuvana tämä näyttää tällä uudella notaatiolla seuraavalta:



Jos luku h on lähes nolla, pätee approksimaatio

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \approx f'(x) \text{ eli } f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0)h.$$

Toisin sanottuna kun tutkitaan funktion f muutosta pienellä välillä $f(x_0 + h) - f(x_0)$, niin tätä muutosta voi approksimoida luvulla $f'(x_0)h$ eli derivaatalla, joka on kerrottu välin pituudella. Samoin yllä olevasta lausekkeesta saadaan suoraan arvio:

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h.$$

Eli jos funktio saa vaikkapa pisteessä x_0 arvon 1 ja $f'(x) = 3$, niin funktion arvo pisteessä $x_0 + h$ on kutakuinkin $f(x_0) + f'(x_0)h = 1 + 3h$. Tämä arvio pätee sitä paremmin mitä pienempi h on.

Funktion f **differentiaalikehitelmä** pisteessä x_0 on

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h\epsilon(h)$$

Tämä ei enää ole arvio vaan virhetermi $h\epsilon(h)$ varmistaa että yhtäsuuruus pätee. Huomaa että $\epsilon(h)$ on h:sta riippuva korjaus: tälle pätee, että kun h lähestyy nollaa, niin $\epsilon(h)$ lähestyy nollaa.

Esimerkki 28.1. Määrittele funktion $f(x) = x^2$ differentiaalikehitelmä pisteessä $x_0 = 1$

Ratkaisu. Erotus $f(x_0 + h) - f(x_0)$ on pisteessä $x_0 = 1$ seuraava:

$$f(1 + h) - f(1) = (1 + h)^2 - 1 = 1 + 2h + h^2 - 1 = 2h + h^2$$

Tästä nähdään heti, että termi $2h$ on yhtä kuin termi $f'(x_0)h$, jolloin $h\epsilon(h) = h^2 \iff \epsilon(h) = h$.

29 Derivoimissääntöjä

Kuten yllä todettiin, derivaatan voi tunnetusti laskea erotusosamäärän raja-arvona

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Tämä on kuitenkin usein turhan työläs tapa laskea funktion derivaattaa. Ilmenee, että on olemassa **derivoimissääntöjä**, joilla tietyntyyppisten funktioiden derivaatat voi laskea helposti ja turvautumatta erotusosamäärän laskemiseen. Nämä säännöt ovat varmaankin jo lukiosta tuttuja. On kuitenkin hyvä muistaa, että ne ovat kaikki todistettavissa käyttämällä yllä olevaa derivaatan määritelmää.

Esimerkiksi sääntö, jonka mukaan vakiofunktion derivaatta on nolla, todistetaan seuraavasti: Olkoon $f(x) = c$. Täten sen erotusosamäärä on

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

Eli vakiofunktion derivaatta on nolla. Kyseinen derivoimissääntö oli helppo todistaa, ei muissakaan säännöissä ole kovin suuria hankaluuksia. Ne ovat kuitenkin laskennallisesti usein melko raskaita, joten niitä ei tässä esitetä. On syytä kuitenkin muistaa, että nämä säännöt todistetaan samalla tavalla kuin vakion derivoimissääntö yllä: laskemalla erotusosamäärän raja-arvo.

Lause 6. Derivoinnin potenssisääntö kertoo, että

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$$

Esimerkiksi $d/dx(x^{455}) = 455x^{454}$ ja $d/dx(5x^7) = 35x^6$.

Hieman vaikeampi sääntö on tulon derivoimissääntö:

Lause 7. Funktion $f(x)g(x)$ derivaatta on $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Esimerkki 29.1. Laske funktion $F(x) = (5x^2 + 8x)(e^x + 10x)$ derivaatta.

Ratkaisu. $F(x)$ on selvästi kahden funktion tulo. Olkoon $\begin{cases} f(x) & = 5x^2 + 8x \\ g(x) & = e^x + 10x. \end{cases}$

Tällöin $\begin{cases} f'(x) & = 10x + 8 \\ g'(x) & = e^x + 10. \end{cases}$

Tulon derivoimissääntö kertoo, että $F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, joten

$$F'(x) = \underbrace{(10x+8)}_{f'(x)}\underbrace{(e^x + 10x)}_{g(x)} + \underbrace{(5x^2+8x)}_{f(x)}\underbrace{(e^x+10)}_{g'(x)}$$

Lause 8. Osamäärän derivoimissääntö:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Täten esimerkiksi

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2+5x}{8x^2-x}\right) = \frac{(6x+5)(8x^2-x) - (3x^2+5x)(16x-1)}{(8x^2-x)^2}$$

Lause 9. Yhdistetyn funktion $f \circ g = f(g(x))$ derivaatta on muotoa $f'(g(x))g'(x)$.

Esimerkki 29.2. Olkoon $f(x) = 5x^2$ ja $g(x) = 6x^7$. Laske yhdistetyn funktion $f \circ g$ derivaatta.

Ratkaisu. $f'(x) = 10x$, joten $f'(g(x)) = 10(6x^7)$. Toisaalta $g'(x) = 42x^5$. Täten

$$\frac{d}{dx}(f \circ g) = f'(g(x))g'(x) = (10(6x^7))(42x^5)$$

Alla vielä yksi sääntö: **käänteisfunktion derivoimissääntö**:

Lause 10. Funktion f käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ derivaatta on

$$\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Todistus. Määritelmän mukaisesti käänteisfunktiolle f^{-1} pätee

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x.$$

Kyseessä on identiteetti, joka pätee kaikilla x:n arvoilla. Mikäli käänteisfunktion derivaatta on olemassa, se saadaan derivoimalla kyseisen yhtälön kumpikin puoli ketjusäännön avulla:

$$\begin{aligned} f'\left(f^{-1}(x)\right)\frac{d}{dx}f^{-1}(x) &= 1 \\ \frac{d}{dx}f^{-1}(x) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \end{aligned}$$

Käänteisfunktion f^{-1} derivaatan pisteessä x_0 voi siis laskea kun tietää

1. Käänteisfunktion arvon tässä pisteessä eli arvon $f^{-1}(x_0)$
2. Funktion f derivaattafunktion.

Näitä ideoita käytetään alla olevassa esimerkissä:

Esimerkki 29.3. Laske $(f^{-1})'(1)$, kun $f(x) = x^5 + 4$.

Ratkaisu. Ensinnä f:n derivaatta on $f'(x) = 5x^4$. Seuraavaksi pitää laskea $f^{-1}(1)$. Tämä tarkoittaa, että

$$f^{-1}(1) = x \iff f(x) = 1 \iff x^5 + 4 = 1 \iff x = (-3)^{1/5}.$$

Täten $f'(f^{-1}(1)) = f'((-3)^{1/5}) = 5(-3)^{4/5} = 5 \cdot 81^{1/5}$ ja

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{5 \cdot 81^{1/5}}$$

Derivoimissääntöjä on erittäin tärkeää oppia käyttämään hyvin. Oppiminen tapahtuu tässä tapauksessa runsaasti tehtäviä tekemällä. Alla muutama alkuun.

Esimerkki 29.4. Olkoon $f(x) = x^2 e^x$. Laske $f'(x)$.

Ratkaisu. $f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x$ (tulosääntö).

Esimerkki 29.5. Kokeile tulosäännön toimivuutta funktioon $f(x) = x^2 = x \cdot x$.

Ratkaisu. $f'(x) = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$.

Esimerkki 29.6. Olkoon $f(x) = x^{1/7} e^{2x}$. Laske $f'(x)$.

Ratkaisu. $f'(x) = 1/7x^{-6/7} e^{2x} + x^{1/7} 2e^{2x}$.

Esimerkki 29.7. Olkoon $f(x) = (5x^2)/(6e^x + 7x)$. Laske $f'(x)$.

Ratkaisu.

$$f'(x) = \frac{10x(6e^x + 7x) - 5x^2(6e^x + 7)}{(6e^x + 7x)^2} \text{ (osamääräsääntö).}$$

Esimerkki 29.8. Olkoon $f(x) = (12x^5 + 3)/(e^x + 7)$. Laske $f'(x)$.

Ratkaisu.

$$f'(x) = \frac{60x^4(e^x + 7) - (12x^5 + 3)e^x}{(e^x + 7)^2}.$$

Esimerkki 29.9. Olkoon $f(x) = 5x^6$ ja $g(x) = 6e^{2x}$. Laske derivaatat funktioista $f \circ g$ ja $g \circ f$ ketjusäännön avulla.

Ratkaisu. $f'(x) = 30x^5$ ja $g'(x) = 12e^{2x}$, joten

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = 30(6e^{2x})^5 \cdot 12e^{2x}$$

ja

$$\frac{d}{dx}g(f(x)) = 12e^{10x^6} \cdot 30x^5$$

30 Korkeamman asteen derivaatat

Tutkitaan nyt funktiota f, jonka kaikki derivaatat on olemassa. Kuten tunnettua, funktion toista derivaattaa pisteessä x merkitään $f''(x)$. Vastaavasti funktion n:ttä derivaattaa merkitään $f^{(n)}(x)$.

Joskus funktion n:lle derivaatalle on mahdollista löytää eksplisiittinen kaava. Tämä kaava löydetään derivoimalla funktio aluksi muutamaan kertaan, minkä jälkeen n:nen derivaatan kaavan voi usein arvata. Tämä arvaus sitten todistetaan induktiolla, kuten alla olevassa esimerkissä:

Esimerkki 30.1. Todistetaan induktiolla, että funktiolle e^{10x} pätee $f^{(n)}(x) = 10^n e^{10x}$:

1. Väite pätee arvolla $n = 1$, koska $f'(x) = 10e^{10x}$.

2. Oletetaan, että väite pätee arvolla n. Todistetaan induktiolla, että tällöin se pätee myös arvolla $n+1$: Induktio-oletus on siis $f^n(x) = 10^n e^{10x}$. Kun tämän derivoi kerran, saadaan $f^{n+1}(x) = 10 \cdot 10^n e^{10x} = 10^{n+1}e^{10x}$. Täten väite on tosi kaikilla n.

31 Taylorin sarja

Funktiota f voi approksimoida tietyn pisteen a ympäristössä astetta n olevalla polynomilla. Funktiolle f pisteeseen a tehty n:nen asteen **Taylorin polynomi** saa muodon:

$$T(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}+f^{(3)}(a)\frac{(x-a)^3}{3!}+\cdots+f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

Tämä on siis n:nen asteen polynomi, jonka avulla funktiota f approksimoidaan pisteessä a. Funktion f derivaattojen arvoja pisteessä a siis käytetään tämän polynomin kertoimina. Kun Taylorin polynomi on n:ttä astetta, sille pätee:

$$\begin{aligned} T(a) &= f(a) \\ T^{(i)}(a) &= f^{(i)}(a) \text{ kaikilla } 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Eli toisin sanottuna Taylorin polynomin hyvyys funktion f approksimaationa pisteen a ympäristössä perustuu siihen, että sen derivaatat $T^{(i)}(a)$ ja arvo $T(a)$ yhtyvät tämän funktion derivaattoihin ja arvoon tässä pisteessä a.

Huomaa, että ensimmäisen asteen Taylorin polynomi pisteessä a on funktion tangenttisuora. Usein Taylorin polynomin asteeksi valitaan $n = 2$, jolloin saadaan toisen asteen Taylorin polynomi, joka on siis paraabeli:

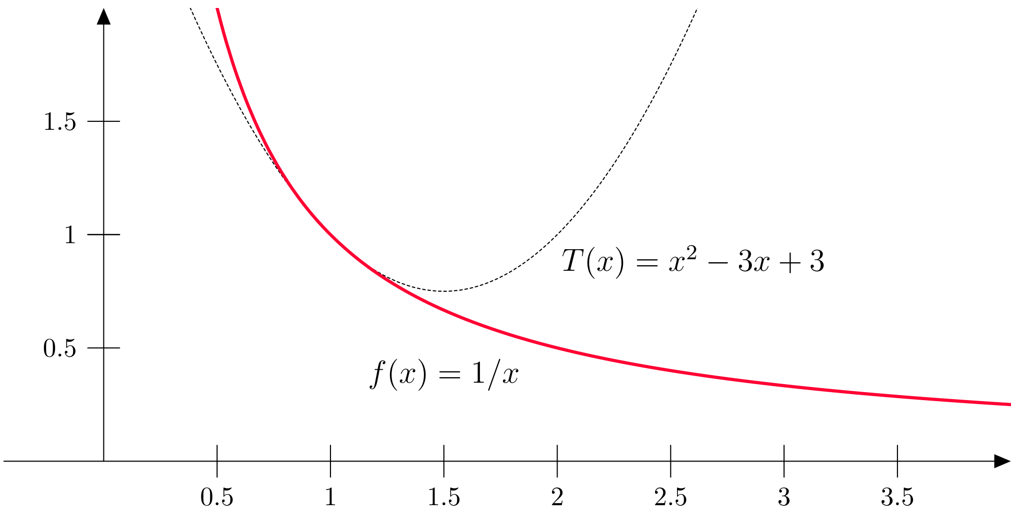
Esimerkki 31.1. Muodostetaan funktion $f(x) = 1/x$ toisen asteen Taylorin polynomi, kun $a = 1$. Tässä pisteessä:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1/x^2 \Rightarrow f'(1) = -1 \\ f''(x) &= 2/x^3 \quad \Rightarrow f''(1) = 2 \end{aligned}$$

Täten haluttu Taylorin polynomi on

$$\begin{aligned} T(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + f''(1)\frac{(x-1)^2}{2} \\ &= 1 - (x-1) + (x-1)^2 \\ &= 1 - (x-1) + x^2 - 2x + 1 \\ &= x^2 - 3x + 3. \end{aligned}$$

Kuvana tämä polynomi näyttää seuraavalta. Katkoviivana esitetty Taylorin polynomi approksimoi funktiota $f(x) = 1/x$ hyvin pisteen (1,1) läheisyydessä, mutta huonosti heti kun mennään kauemmaksi tästä pisteestä:



Esimerkki 31.2. Muodosta funktion $f(x) = 1/x$ kolmannen asteen Taylorin sarja pisteessä $a = 1$. Approksimoiko se funktiota $f(x) = 1/x$ paremmin kuin toisen asteen Taylorin polynomi?

Ratkaisu. Haluttu Taylorin polynomi on

$$
\begin{aligned}
T(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + f''(1)\frac{(x-1)^2}{2} + f^{(3)}(1)\frac{(x-1)^3}{6} \\
&= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 \\
&= x^2 - 3x + 3 - (x-1)^3 \\
&= x^2 - 3x + 3 - x^3 + 3x^2 - 3x \\
&= -x^3 + 4x^2 - 6x + 3,
\end{aligned}
$$

koska $f^{(3)}(1) = -6$.

Kun Taylorin sarjassa $a = 0$, puhutaan Maclaurinin sarjasta:

$$T(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f^{(3)}(0)\frac{x^3}{3!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$$

32 Väliarvolause

Oletetaan, että funktio f on jatkuva jollain reaalilukuvälillä $[a, b]$ ja derivoituva avoimella välillä (a, b). Funktion muutos tällä välillä on luonnollisesti $f(b) - f(a)$. Keskimääräinen muutos tällä välillä on siis

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Väliarvolause kertoo meille seuraavaa: välillä (a, b) on olemassa luku c, jossa funktion derivaatta $f'(c)$ kertaa välin pituus $b-a$ on yhtä kuin funktion muutos tällä välillä. Eli on olemassa $c \in (a, b)$, jolla

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \iff \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Eli jossain välin (a, b) pisteessä funktion muutosnopeus on yhtä suuri kuin funktion keskimääräinen muutosnopeus koko välillä. Kyseisen pisteen voi myös ratkaista, jos haluaa.

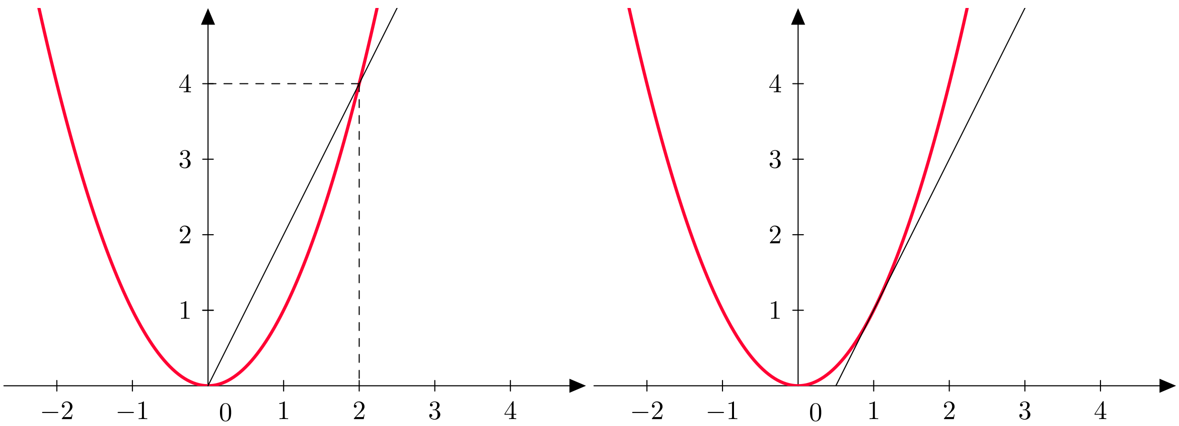
Esimerkki 32.1. Etsi piste c jossa $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$, kun $f(x) = x^2$.

Ratkaisu. Funktion derivaatta on $2x$. Haluttu piste c löytyy ratkaisemalla yhtälö

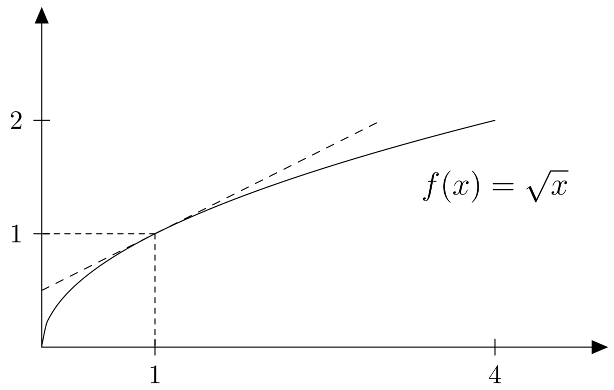
$$\frac{b^2 - a^2}{b-a} = 2c.$$

Tästä saadaan $c = (a+b)/2$. Eli funktio x^2 kasvaa jokaisen välin keskipisteessä yhtä nopeaa kuin keskimäärin tällä välillä. Esimerkiksi välillä $(0, 2)$ tämä funktio kasvaa yhteensä $f(2) - f(0) = 4$, eli keskimäärin $4/2 = 2$. Tämän välin keskipisteessä $x = 1$ funktion f derivaatta on juurikin tämä 2:

Graafisesti tulkittuna väliarvolause kertoo, että jos funktion f välin (a, b) päätepisteet $(a, f(a))$ ja $(b, f(b))$ yhdistää suoralla viivalla, niin jossain välin (a, b) pisteessä tämän suoran kulmakerroin on yhtä kuin funktion f derivaatta. Toisin sanottu väliarvolause kertoo, että tätä suoraa voi siirtää siten, että siitä tulee funktion tangenttisuora jossain välin (a, b) pisteessä:



Esimerkki 32.2. Alla on kuvattu funktio $f(x) = \sqrt{x}$ välillä $(0, 4)$. Tämän funktion keskimääräinen muutos tällä välillä on $1/2$. Toisaalta väliarvolauseen nojalla tiedämme, että tämän dunktion derivaatta on tällä välillä jossain pisteessä $1/2$. Tämä piste on $x = 1$:



Väliarvolauseella voi arvioida funktion muutosta tietyllä välillä. Sillä voi antaa rajat funktion mahdolliselle muutokselle tietyllä välillä, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

Esimerkki 32.3. Funktion derivaatalle pätee $1 \leq f'(x) \leq 2$ kaikissa pisteissä x. Lisäksi tiedetään, että $f(5) = 1$. Kuinka suuri tai pieni voi $f(10)$ olla?

Ratkaisu. Väliarvolauseen mukaan jollekin $c \in (5, 10)$ pätee

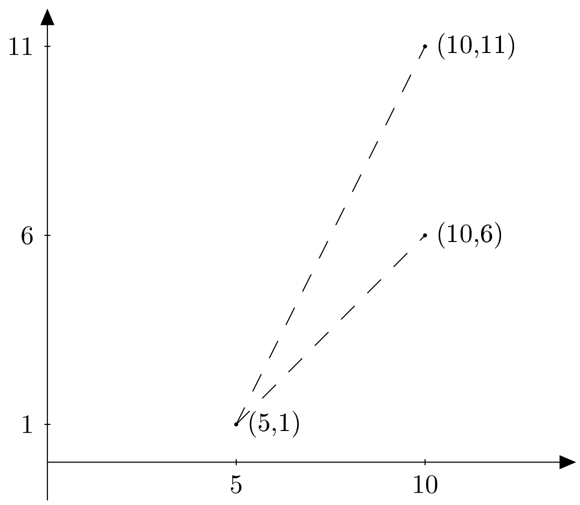
$$\begin{aligned} f(10) - f(5) &= f'(c)(10-5) \text{ eli} \\ f(10) &= f(5) + f'(c)(10-5) \\ &= f(5) + 5f'(c) \\ &= 1 + 5f'(c). \end{aligned}$$

Nyt koska funktion derivaatta on rajoitettu, niin myös luku $f(10)$ on rajoitettu:

$$\begin{aligned}
&1 \leq f'(x) \leq 2 && \Rightarrow \\
&5 \leq 5f'(x) \leq 10 && \Rightarrow \\
&6 \leq 1 + 5f'(x) \leq 11 && \Rightarrow \\
&6 \leq f(10) \leq 11
\end{aligned}$$

Täten $f(10)$ voi olla korkeintaan 11 ja se on vähintään 6.

Alla olevassa kuvassa nämä rajat näkyvät katkoviivoina. Näistä ylempi katkoviiva antaa ylärajan funktion muutokselle, kun taas alempi katkoviiva antaa alarajan tälle muutokselle:



Esimerkki 32.4. Anna väliarvolauseen perusteella rajat arvolle $f(2)$, kun $f(0) = 2$ ja $0 \leq f'(x) \leq 2$.

33 Funktion monotonisuus

Derivoituva funktio f on aidosti kasvava, jos sen derivaatta on positiivinen eli jos $f'(x) > 0$. Funktio on aidosti vähenevä jos sen derivaatta on negatiivinen eli $f'(x) < 0$. Tämä tulos on jo lukiosta tuttu ja kohtalaisen helppo perustella: esimerkiksi jos funktio on kasvava eli $f(x) > f(x_0)$ kun $x > x_0$, niin voimme katsoa derivaatan määritelmää:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Tämä on selvästi positiivinen, sillä osamäärän nimittäjä ja osoittaja ovat joko kumpikin positiivia tai kumpikin negatiivisia. Kasvavan funktion derivaatta on siis positiivinen. Vastaavalla tavalla voi todeta, että vähenevän funktion derivaatta on negatiivinen.

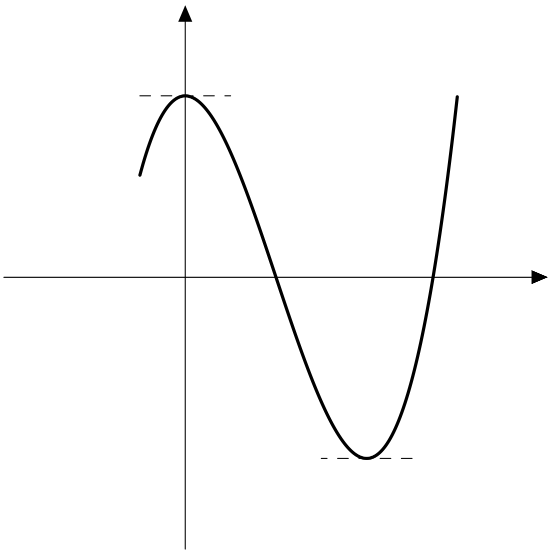
Huomaa että kasvava/vähenevä funktio on eri asia kuin *aidosti* kasvava/vähenevä funktio:

1. Derivoituva funktio f on kasvava, jos sen derivaatta on ei-negatiivinen eli $f'(x) \geq 0$
2. Derivoituva funktio f on aidosti kasvava, jos sen derivaatta on positiivinen eli $f'(x) > 0$

Vähenevä ja aidosti vähenevä funktio määritellään vastaavalla tavalla. Täten esimerkiksi vakiofunktio on kasvava ja vähenevä, muttei aidosti kasvava eikä aidosti vähenevä. Tämä johtuu siitä, että vakiofunktion derivaatta on nolla.

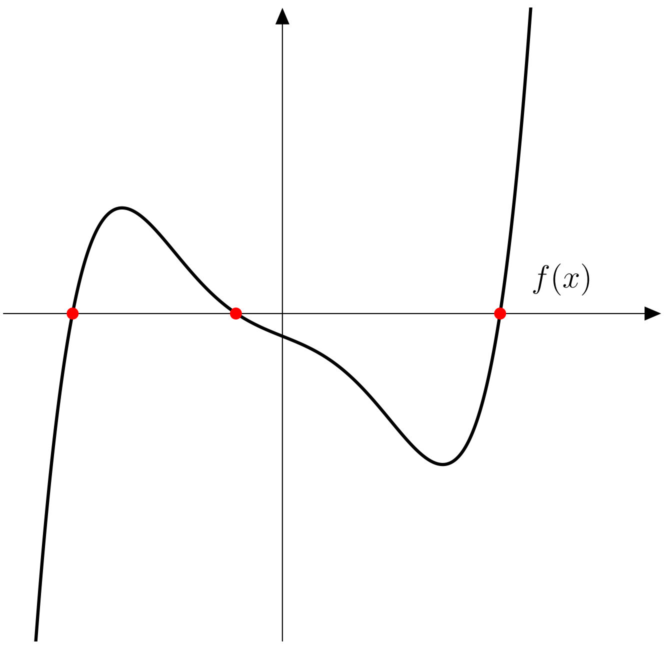
Funktio on jollakin välillä **monotoninen**, jos se on tällä välillä kasvava tai vähenevä. Funktio on **aidosti monotoninen**, jos se on koko tällä välillä aidosti kasvava tai aidosti vähenevä.

Derivaatan hieman vähemmän tunnettu sovellus on **tietyn funktion nollakohtien lukumäärän löytäminen**. Tämä tekniikka perustuu siihen, että jos funktiolla on kaksi perättäistä derivaatan nollakohtaa, x_0 ja x_1, niin funktio on näiden välissä monotoninen eli joko kasvava tai vähenevä. Täten itse funktio voi välillä (x_0, x_1) leikata x-akselin korkeintaan kerran:

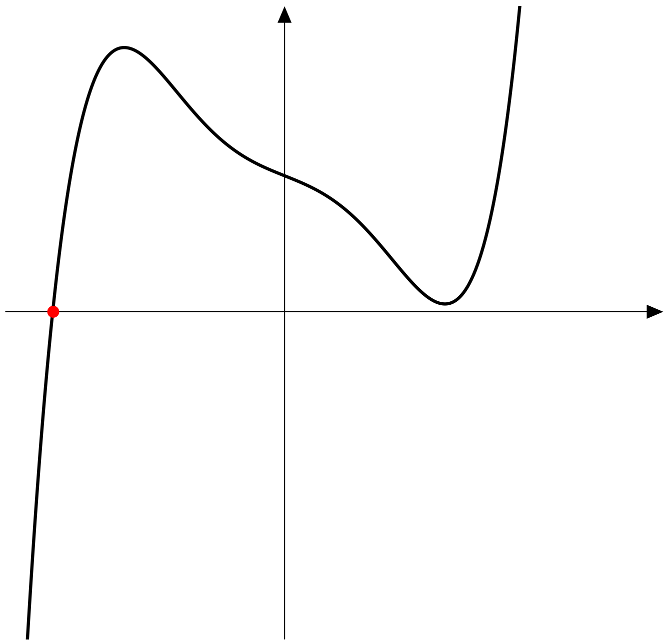


Täten jos funktion derivaatalla on jollakin välillä n nollakohtaa, niin itse funktiolla on tällä välillä enintään $n+1$ nollakohtaa.

Esimerkiksi alla olevan funktion $f(x)$ derivaatalla on kaksi nollakohtaa. Tästä seuraa että tällä funktiolla on tällä välillä *enintään* 3 nollakohtaa, ja tällä funktiolla myös on juurikin 3 nollakohtaa:



Alla olevalla funktiolla on samalla välillä myös kaksi derivaatan nollakohtaa, joten tälläkin funktiolla on enintään 3 nollakohtaa tällä välillä. Sillä on kuitenkin ainoastaan yksi nollakohta tällä välillä:



Toisin sanottuna siitä että derivaatalla on jollakin välillä vaikkapa 4 nollakohtaa voidaan päätellä sen, että itse funktiolla on 5,4,3,2,1 tai 0 nollakohtaa tällä välillä. Käytännössä funktion nollakohtien todellinen määrä on tarkastettava katsomalla funktion arvoja derivaatan nollakohdissa.

Esimerkki 33.1. Etsitään funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ nollakohtien määrä. Funktion derivaatta on $3x^2 - 6x$, jonka nollakohdat ovat $x_1 = 0$ ja $x_2 = 2$. Täten funktiolla $f(x)$ on enintään 3 nollakohtaa. Tarkistetaan jokainen tapaus erikseen:

1. Välillä $(-\infty, 0)$ funktiolla on nollakohta, sillä $f(0) = 2 > 0$ ja funktio menee miinus äärettömään kun x vähenee rajatta.

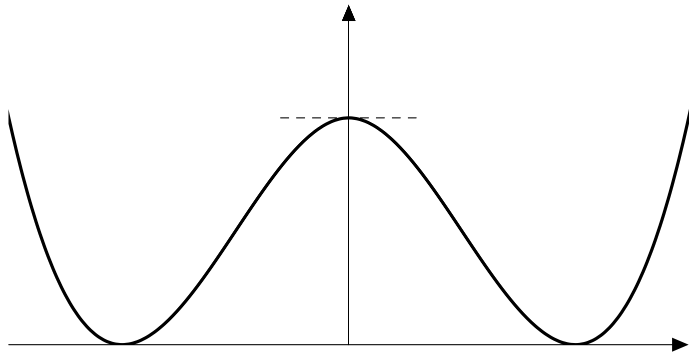
2. Välillä $(0, 2)$ funktiolla on nollakohta, sillä $f(0) = 2 > 0$ ja $f(2) = -2 < 0$.

3. Välillä $(2, \infty)$ funktiolla on nollakohta, sillä $f(2) = -2 < 0$ ja funktio menee äärettömään kun x kasvaa rajatta. Täten funktiolla on kolme nollakohtaa.

34 Lokaalit ja globaalit ääriarvot

Funktiolla $f(x)$ on **lokaali maksimi** pisteessä x_0, jos on olemassa pisteen x_0 ympäristö siten, että $f(x_0)$ on suurempi tai yhtä suuri kuin mikään muu arvo $f(x)$ tässä ympäristössä. Eli jos $f(x_0) \geq f(x)$ pätee kaikille pisteille x, jotka kuuluvat pisteen x_0 ympäristöön.

Jos funktio f on derivoituva, niin sen lokaalissa ääriarvopisteessä pätee $f'(x_0) = 0$:



Yllä olevassa kuvassa funktiolla on lokaali maksimi pisteessä $x_0 = 0$ ja, kuten näkyy, $f'(0) = 0$. Tällä funktiolla on kuvassa myös kaksi lokaalia minimiä.

Derivoituvan funktion lokaalit ääriarvot on käytännössä helppo löytää derivoimalla funktio ja asettamalla derivaatan nollaksi. Huomaa kuitenkin, että tieto $f'(x_0) = 0$ ei takaa, että pisteessä x_0 olisi lokaali ääriarvo. Esimerkiksi funktiolle $f(x) = x^3$ pätee origossa $f'(0) = 0$, mutta tämä funktio ei saavuta tässä pisteessä lokaalia ääriarvoa. Seuraavassa kappaleessa esitetään tapa varmistaa onko kyseessä todella lokaali ääriarvo.

Globaalien ääriarvojen löytäminen on hieman työläämpää, joskaan ei erityisen vaikeata. Välillä $[a, b]$ määritellyn funktion $f(x)$ globaalit ääriarvot löytyvät joko derivaatan nollakohdista, välin päätepisteistä tai pisteistä, joissa funktio ei ole derivoituva. Alla esimerkki jokaisesta tapauksesta:

1. Funktion $f(x) = x^2$ globaali minimi löytyy derivaatan $f'(x) = 2x$ nollakohdasta $x = 0$. Tällä funktiolla ei ole globaalia maksimia.

2. Välille $[0, 1]$ rajatun funktion $g(x) = x$ globaali minimi ja globaali maksimi löytyvät päätepisteistä: $g(0) = 0$ on minimi ja $g(1) = 1$ maksimi.

3. Funktion $h(x) = |x|$ globaali minimi löytyy pisteestä $x = 0$, jossa tämä funktio ei ole derivoituva.

Huomaa, että pisteet joissa funktio ei ole derivoituva sisältävät myös epäjatkuvuuspisteet. Tämä johtuu siitä, että jos funktio on tietyssä pistessä epäjatkuva, niin se on tässä pisteessä myös ei-derivoituva.

35 Funktion kuperuussuunnat

Derivoituva funktio $f(x)$ on pisteessä x aidosti **konveksi**, jos sen toinen derivaatta on positiivinen

$$f''(x) > 0.$$

Vastaavasti $f(x)$ on aidosti **konkaavi**, jos sen toinen derivaatta on negatiivinen

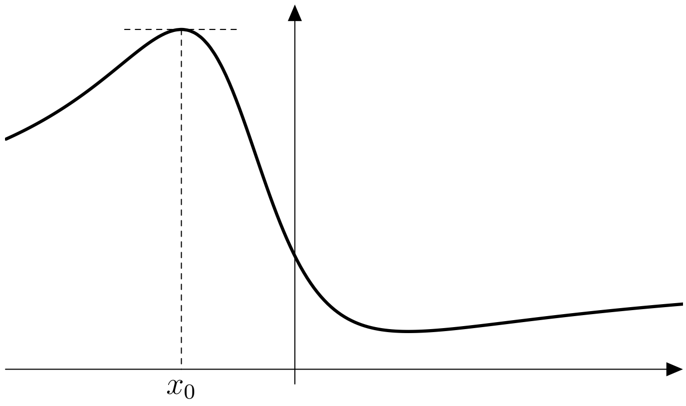
$$f''(x) < 0.$$

Tuttuun tapaan funktion ensimmäisen derivaatan etumerkki kertoo onko funktio kasvava vaiko vähenevä. Täten funktion toisen derivaatan etumerkki (eri konveksisuus/konkaavius) kertoo meille onko funktion derivaatta kasvava vaiko vähenevä. Jos funktio on konkaavi, on sen derivaatan derivaatta negatiivinen eli ensimmäinen derivaatta on vähenevä. Tämä tarkoittaa, että funktion kasvunopeus pienenee. Jos funktio on konveksi, sen kasvunopeus kasvaa eli funktio kiihtyy.

Mikä on konkaaviuden/konveksisuuden käytännön merkitys? Ajatellaan funktion derivaatalla olevan nollakohta pisteessä x_0 eli $f'(x_0) = 0$. Jos funktio on tässä pisteessä konkaavi, on edellisen perusteella funktion derivaatta pisteessä x_0 vähenevä ($f''(x_0) < 0$). Tällöin jos siirrymme pisteestä x_0 hieman oikealle, on derivaatan vähenevyyden perusteella $f'(x)$ tässä pisteessä negatiivinen. Samoin jos siirrymme x_0:sta hieman vasemmalle, on $f'(x)$ tässä pisteessä positiivinen. Koska derivaatta on negatiivinen x_0:n oikealla puolella ja positiivinen sen vasemmalla puolella, on itse funktio kasvava x_0:n vasemmalla puolella ja vähenevä x_0:n oikealla puolella. Täten funktiolla on pakko olla lokaali maksimi tässä pisteessä. Tämän pohjalta päädymme seuraavaan tulokseen:

> *Jos funktion toinen derivaatta on derivaatan nollakohdassa x_0 negatiivinen (eli jos funktio on tässä pisteessä konkaavi), saavuttaa funktio tässä pisteessä lokaalin maksimin.*

Alla tämä idea vielä kuvana:



Maksimipisteessä x_0 pätee siis $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) < 0$ eli funktio derivaatta on tässä pisteessä nolla ja vähenevä. Täten funktion derivaatta on positiivinen pisteen x_0 vasemmalla puolella ja negatiivinen pisteen x_0 oikealla puolella.

Vastaava tulos pätee konveksisuudelle:

> *Jos funktion toinen derivaatta on derivaatan nollakohdassa x_0 positiivinen (eli jos funktio on tässä pisteessä konveksi), saavuttaa funktio tässä pisteessä lokaalin minimin.*

Täten olemme päätyneet seuraavaan erittäin tärkeään tulokseen:

Lause 11. Jos $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) < 0$, funktiolla on pisteessä x_0 lokaali maksimi.

Lause 12. Jos $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) > 0$, funktiolla on pisteessä x_0 lokaali minimi.

Konveksisuus ja konkaavius kannatta oppia tulkitsemaan myös graafisesti.

- Funktio on konkaavi, jos sen kuvaaja on tangenttinsa alapuolella
- Funktio on konveksi, jos sen kuvaaja on tangenttinsa yläpuolella

Luonnollisesti funktio, joka saavuttaa maksimin tietyssä pisteessä, on tämän pisteen ympäristössä tangenttinsa alapuolella (samoin minimissä funktio on tangenttinsa yläpuolella), joten tämä graafinen määritelmä on yhtäpitävä ylempänä olevan määritelmän kanssa.

Esimerkki 35.1. Aiemmin todettiin, että toisen asteen polynomi ax^2+bx+c saavuttaa ääriarvon pisteessä $x = -b/2a$. Funktion toinen derivaatta on $2a$, joka on suurempi kuin nolla, jos a on suurempi kuin nolla. Täten funktio saavuttaa minimin, jos $a > 0$. Samoin funktio saavuttaa maksimin, jos $a < 0$. Tulos on selkeästi sopusoinnussa sen kanssa, että jos $a > 0$, kyseessä on ylös aukeava paraabeli, ja jos $a < 0$, kyseessä on alas aukeava paraabeli.

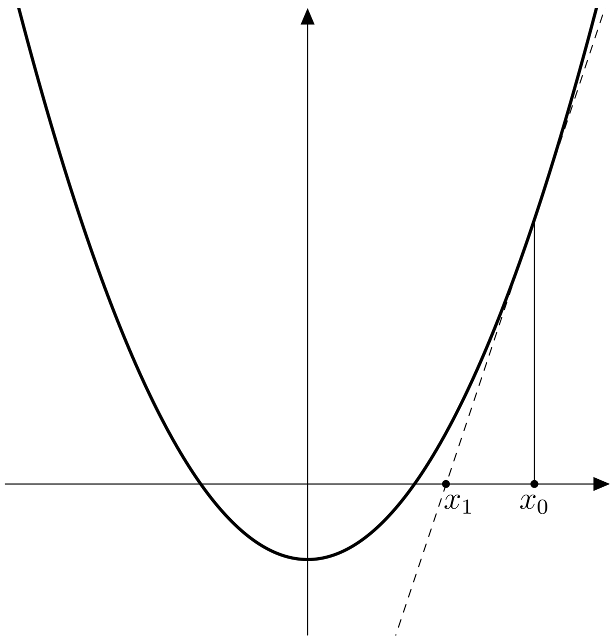
Jos funktio vaihtaa pisteessä x_0 kuperuussuuntaa eli muuttuu aidosti konkaavista aidosti konveksiksi tai päinvastoin, niin x_0 on tämän funktion **käännekohta**. Tämä kohta löytyy derivoimalla funktion kahteen kertaan ja asettamalla $f''(x_0) = 0$

Esimerkki 35.2. Funktion $x^3 - 2x + 1$ toinen derivaatta on $6x$, joka vaihtaa merkkiä käännepisteessä $x = 0$. Kun $x > 0$ funktio on konveksi ja kun $x < 0$ funktio on konkaavi.

36 Newtonin menetelmä

Oletetaan, että haluamme löytää funktion $f(x)$ nollakohdan. Usein tämä tehtävä on mahdoton suorittaa täydellisellä tarkkuudella, koska tiettyjen funktioiden nollakohdille ei ole olemassa mitään eksaktia kaavaa, joten joudumme turvautumaan numeerisiin menetelmiin. Numeeriset menetelmät ovat joukko menetelmiä, joilla kyseistä nollakohtaa voi approksimoida.

Oletetaan vaikkapa, että funktiolla $f(x)$ on nollakohta välillä $[a, b]$. **Newtonin menetelmä** perustuu siihen, että jos funktiolle piirretään tangentti johonkin nollakohdan läheisyyteen (merkitään tätä pistettä x_0), on tämän tangentin ja x-akselin leikkauspiste (merkitään tätä pistettä x_1) aiempaa lähempänä itse funktion nollakohtaa:



Funktion tangentin yhtälö tässä pisteessä x_0 on

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Yllä mainitsin funktion tangentin ja x-akselin leikkauspisteen olevan lähempänä funktion nollakohtaa. Tämä leikkauspiste on x-akselilla eli suoralla $y = 0$. Sijoitetaan $y = 0$ tangentin yhtälöön:

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ratkaistaan edellisestä x, ja merkitään sitä x_1:llä:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Nyt x_1 on entistä lähempänä funktion nollakohtaa. Nyt sama voidaan toistaa: piirretään funktiolle tangentti pisteeseen x_1 ja ratkaistaan tämän tangentin ja x-akselin leikkauskohta x_2:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Nyt taas x_2 on entistä lähempänä funktion nollakohtaa. Täten voimme vastaavasti muodostaa jonon lukuja $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$, jonka jäsenet lähestyvät tiettyjen ehtojen vallitessa funktion $f(x)$ nollakohtaa. Newtonin menetelmä toimii siis seuraavasti:

1. Valitaan jokin piste x_0 lähellä funktion nollakohtaa
2. Kun $i \geq 1$, muodostetaan piste x_i, joka on x_{i-1}:tä lähempänä funktion nollakohtaa seuraavasti:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$

3. Toistetaan vaihe 2 halutun monta kertaa. Jos vaikkapa halutaan ratkaisu, joka on kahden desimaalin tarkkuudella oikea, pitää vaihe 2 toistaa niin monta kertaa, että luku x_i pyöristettynä kahden desimaalin tarkkuudelle ei enää muutu.

37 Sarjakehitelmiä

Palautetaan mieliin, että **potenssisarja** on sarja joka on muotoa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots.$$

Kyseinen sarja on x_0-keskeinen. Jos $x_0 = 0$, kyseinen sarja on **origokeskeinen** (tällaisia olivat suurin osa kurssilla aikaisemmin käsitellyistä sarjoista). Tällöin se on siis muotoa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Tätä muotoa ovat muun muassa geometriset sarjat. Geometrisilla sarjoilla a_n oli jokin vakio A eli x^n:n kerroin ei riipu n:stä. Yleisesti potenssisarjoilla se joko riippuu tai ei riipu n:stä. Täten vaikkapa

$$1 + 2(x-x_0) + 4(x-x_0)^2 + 8(x-x_0)^3 + \cdots$$

on potenssisarja, jolla $a_n = 2^n$. Puolestaan

$$(x-x_0) + 2(x-x_0)^2 + 3(x-x_0)^3 + \cdots$$

on potenssisarja, jolla $a_n = n$.

Huomataan, että sarjasta

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots$$

voidaan löytää luku a_0 helposti asettamalla $x = x_0$. Eli $a_0 = f(x_0)$ Muut luvut a_n löydetään derivoimalla kyseinen sarja: sarjan

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \cdots$$

ensimmäinen derivaatta $f'(x)$ on

$$a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4(x - x_0)^3 + \cdots,$$

joten $a_1 = f'(x_0)$ eli luku a_1 löydetään derivoimalla sarja kerran, ja asettamalla $x = x_0$. Yritetään nyt löytää a_n. Sarja

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$

täytyy ensin derivoida n kertaa. Tällöin a_n:n kerroin on $n!$. Asettamalla $x = x_0$ muut termit häviävät, joten

$$f^{(n)}(x_0) = n! \cdot a_n,$$

jossa $f^{(n)}$ tarkoittaa funktio f n:ttä derivaattaa. Tästä seuraa, että

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

eli potenssisarjan kertoimet a_n tulevat suoraan kyseisen sarjan derivaatoista.

Esimerkki 37.1. Tiedetään, että

$$f(x) = \ln(x + 1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Laske $f^{(5)}(0)$, $f^{(3)}(0)$ ja $f^{(4)}(0)$.

Ratkaisu. Kyseessä on potenssisarja. Yllä tultiin tulokseen $f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$ (kysessä on origokeskeinen sarja, eli $x_0 = 0$). Sarjan termi a_n on selvästi $(-1)^{n+1}/n$, joten

$$f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n = n! \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Sijoittamalla n:n paikalle arvot 5, 3 ja 4 saadaan

$$f^{(5)}(0) = 5! \cdot \frac{(-1)^6}{5} = 24$$
$$f^{(3)}(0) = 3! \cdot \frac{(-1)^4}{3} = 2$$
$$f^{(4)}(0) = 4! \cdot \frac{(-1)^5}{4} = -6$$

Esimerkki 37.2. Eksponenttifunktion e^x sarjakehitelmä on seuraava:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Tässä sarjakehitelmässä potenssin x^n kerroin eli termi a_n on yhtä kuin $1/n!$. Tämä on origokeskeinen sarja, joten

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= n! \cdot a_n \\ &= n! \cdot 1/n! \\ &= 1. \end{aligned}$$

Täten eksponenttifunktion jokainen derivaatta origossa on yksi.

38 Luonnollinen logaritmi ja logaritminen derivointi

Palautetaan mieliin, että luonnollinen logaritmi $\ln(x)$ on eksponenttifunktion e^x käänteisfunktio eli

$$\begin{aligned} \ln(e^x) &= x \text{ ja} \\ e^{\ln x} &= x. \end{aligned}$$

Logaritmifunktion sisässä voi yhtä hyvin olla mikä tahansa funktio $f(x)$. Pitää kuitenkin huomata, että $\ln(f(x))$ on määritelty ainoastaan, kun $f(x) > 0$. Tämä johtuu siitä, että ensinnäkin $e^x > 0$ aina, ja lisäksi $e^{\ln f(x)} = f(x)$, joten jos $f(x)$ olisi nollaa pienempi, olisi myös $e^{(\cdot)}$ nollaa pienempi, mikä on mahdotonta. Verbaalisesti ilmaistuna logaritmifunktio $\ln x$ kertoo mihin potenssiin e pitää nostaa, jotta saataisiin x. Eli

$$\ln x = y \iff x = e^y.$$

Lienee myös syytä palauttaa mieliin, että eksponenttifunktio on oma derivaattansa eli $\frac{d}{dx} e^x = e^x$. Täten derivoimalla yllä oleva identiteetti $e^{\ln x} = x$ kummaltakin puolelta x:n suhteen saadaan seuraavaa: Oikean puolen derivaatta on 1 ($\frac{d}{dx}(x) = 1$). Vasemman puolen derivaatta puolestaan on ketjusäännön mukaisesti $e^{\ln x} \frac{d}{dx} \ln x$, joten:

$$\begin{aligned} e^{\ln x} &= x \quad \text{(derivoidaan kumpikin puoli)} \\ e^{\ln x} \frac{d}{dx} \ln x &= 1. \end{aligned}$$

Joten (jaetaan kumpikin puoli $e^{\ln x}$:llä):

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{e^{\ln x}} \text{ eli}$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}.$$

Täten logaritmifunktion derivaatta pisteessä x on $\frac{1}{x}$, mikäli kyseinen logaritmifunktio on olemassa (ja se itse asiassa on olemassa). Jos logaritmin sisässä on jokin funktio $f(x)$, voidaan syntynyt yhdistetty funktio $\ln f(x)$ derivoida ketjusäännön avulla:

$$\frac{d}{dx}\ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Tämä on erittäin tärkeä sääntö, jota on syytä valaista esimerkeillä.

Esimerkki 38.1. Funktion $\ln(5x^5)$ derivaatta on

$$\frac{25x^4}{5x^5} = \frac{5}{x},$$

sillä $f(x) = 5x^5$ ja $f'(x) = 25x^4$.

Esimerkki 38.2. Funktion $\ln(4x^{10})$ derivaatta on

$$\frac{40x^9}{4x^{10}} = \frac{10}{x},$$

sillä $f(x) = 4x^{10}$ ja $f'(x) = 40x^9$.

Logaritmifunktiolla $\ln(\cdot)$ on joitain ominaisuuksia, jotka on syytä osata. Alla on listattu kolme tärkeää ominaisuutta.

1. Potenssifunktion logaritmi on potenssi kertaa kyseisen funktion logaritmi: $\ln x^n = n \ln x$

2. Tulon logaritmi on logaritmien summa: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

3. Osamäärän logaritmi on logaritmien erotus: $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$

Logaritminen derivointi perustuu seuraavaan ideaan: koska

$$\frac{d}{dx}\ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

on oltava (kerrotaan kumpikin puoli $f(x)$:llä)

$$f(x)\frac{d}{dx}\ln f(x) = f'(x).$$

Eli *funktion derivaatta on yhtä kuin funktion logaritmin derivaatta kertaa itse funktio.*

Useita funktioita on mahdoton derivoida millään muulla tavalla kuin laskemalla näiden logaritmien derivaatta ja kertomalla se itse funktiolla. Toisin sanottuna useita funktioita on mahdoton derivoida muutoin kuin logaritmisen derivoinnin avulla.

Esimerkki 38.3. Funktio x^x lienee tunnetuin esimerkki funktiosta, jonka voi derivoida ainoastaan logaritmisesti. Tehdään siis näin. Ensinnä huomataan, että

$$\ln x^x = x \ln x,$$

joten

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \ln x^x &= \frac{d}{dx}(x \ln x) \\ &= \ln x + 1.\end{aligned}$$

Viimeisessä kohdassa käytettiin derivoinnin tulosääntöä. Täten yhtälöön $f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}\ln f(x)$ perustuen

$$\frac{d}{dx}x^x = x^x(\ln x + 1).$$

Esimerkki 38.4. Samoin x^{x^2} voidaan derivoida samalla tavalla.

$$\ln x^{x^2} = x^2 \ln x,$$

joten

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \ln x^{x^2} x &= \frac{d}{dx}(x^2 \ln x) \\ &= 2x \ln x + x.\end{aligned}$$

Täten yhtälöön $f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}\ln f(x)$ perustuen

$$\frac{d}{dx}x^{x^2} = x^{x^2}(2x \ln x + x).$$

10-kantainen logaritmi $\lg x$ kertoo, mikä potenssi luvusta 10 pitää ottaa, jotaa saadaan x:

$$\lg x = y \iff x = 10^y$$

Täten esimerkiksi $\lg 10 = 1$, $\lg 100 = 2$ ja $\lg 1000 = 3$. Tämä logaritmi voidaan palauttaa luonnolliseen logaritmiin seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned} \lg x &= y \\ x &= 10^y \\ \ln x &= y \ln 10 \\ y &= \frac{\ln x}{\ln 10} \end{aligned}$$

Vastaavasti a-kantaiselle logaritmille pätee

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Tämä voidaan derivoida, jolloin saadaan a-kantaisen logaritmin derivoimissääntö.

$$\frac{d}{dx} \log_a(x) = \frac{1}{x \ln a}.$$

39 L'Hospitalin sääntö

Tutkitaan raja-arvoa

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

jossa x:n lähestyessä a:ta sekä $f(x)$ että $g(x)$ lähestyvät ääretöntä[13] eli

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}.$$

L'Hospitalin sääntö kertoo meille, että voimme derivoida sekä $f(x)$:n että $g(x)$:n, jolloin näiden derivaattojen osamäärän raja-arvo on sama kuin alkuperäisen osamäärän raja-arvo, eli

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Esimerkki 39.1. Laske

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x}.$$

[13] $f(x)$ ja $g(x)$ voivat lähestyä kumpikin myös miinus ääretöntä tai nollaa, jolloin täsmälleen samat menetelmät pätevät.

Ratkaisu. Raja-arvo on muotoa ∞/∞, joten voimme soveltaa l'Hospitalin sääntöä. Derivoimalla kummankin funktion kerran saamme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Esimerkki 39.2. Laske

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}.$$

Ratkaisu. Raja-arvo on muotoa ∞/∞, joten voimme soveltaa l'Hospitalin sääntöä. Derivoimalla kummankin funktion kerran saamme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x}.$$

Syntynyt raja-arvo on edelleen muotoa ∞/∞, joten voimme soveltaa l'Hospitalin sääntöä toistamiseen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Esimerkki 39.3. Edellisen kahden esimerkin perusteella voimme päätellä, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

kaikilla luonnollisilla luvuilla. Eli eksponenttifunktio kasvaa nopeampaa kuin mikään polynomifunktio.

40 Eksponenttifuntio

Palautetaan mieliin, että Neperin luvulle e pätee:

$$\begin{aligned} e &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n}. \end{aligned}$$

Tästä määritelmästä seuraa, että eksponenttifunktio e^x voidaan määrittää seuraavana raja-arvona:

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \tag{40.4}$$

Tämä johtuu siitä, että yhtälöä (40.4) voidaan muokata siten, että päästään takaisin luvun e määritelmään:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/x}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/x}\right)^{(n/x)\cdot x} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n/x}\right)^{(n/x)}\right)^x \\
&= \lim_{(n/x)\to\pm\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n/x}\right)^{(n/x)}\right)^x \\
&= e^x.
\end{aligned}$$

Tässä käytettiin kahta tulosta

1. Eksponenttifunktiolle pätee $e^{ab} = (e^a)^b$.

2. Jos $n \to \infty$, niin $n/x \to \infty$ jos x on positiivinen ja $n/x \to -\infty$, jos x on negatiivinen. Täten $n/x \to \pm\infty$.

Yllä oleva tekniikka on erittäin hyödyllinen. Tässä siis ideana on *palauttaa raja-arvo luvun e määritelmään.* Ideana on siis muokata raja-arvon sisässä oleva lauseke muotoon

$$\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^a.$$

Esimerkiksi yllä olevassa laskussa oli $y = n/x$ ja $a = x$. Tällä samalla tekniikalla voi laskea vastaavantyyppisiä raja-arvoja:

Esimerkki 40.1. Laske

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{100}{x}\right)^{10x}$$

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{100}{x}\right)^{10x} &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/100}\right)^{10x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/100}\right)^{(x/100)\cdot(100/x)\cdot(10x)}\\
&= \lim_{x/100\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x/100}\right)^{(x/100)}\right)^{(100/x)\cdot(10x)}\\
&= e^{10}
\end{aligned}$$

Esimerkki 40.2. Laske

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{100x}$$

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{100x} &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x/3}\right)^{100x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-x/3}\right)^{-x/3}\right)^{(-3/x)\cdot 100x}\\
&= e^{-300}
\end{aligned}$$

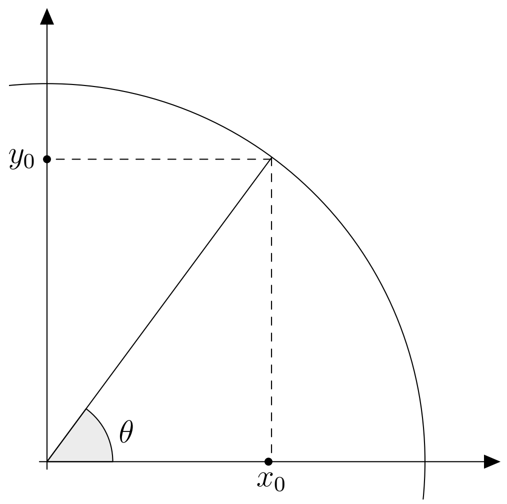
Tässä esimerkissä argumentti $-x/3$ lähestyy itse asiassa *miinus* ääretöntä, kun x kasvaa rajatta. Yllä esitellyn perusteella tämä ei kuitenkaan muuta tulosta.

41 Trigonometriset funktiot

Trigonometriset funktiot määritellään tietylle suorakulmaisen kolmion kulmalle θ kyseisen kolmion sivujen suhteena:

$$\sin\theta = \frac{\text{Vastainen sivu}}{\text{Hypotenuusa}}$$
$$\cos\theta = \frac{\text{Viereinen sivu}}{\text{Hypotenuusa}}.$$

Kun kulman θ annetaan muuttua, saadaan trigonometriset funktiot $\sin\theta$ ja $\cos\theta$.



Yllä olevassa kuvassa oleva ympyrä on osa yksikköympyrää, jonka säde on 1. Koska suorakulmaisen kolmion hypotenuusa kulkee origosta tälle säteelle, on tämä hypotenuusa pituudeltaan 1. Tällöin kuvassa pätee:

$$\sin\theta = \frac{\text{Vastainen sivu}}{\text{Hypotenuusa}} = y_0$$
$$\cos\theta = \frac{\text{Viereinen sivu}}{\text{Hypotenuusa}} = x_0.$$

Vastaavasti kulman θ tangentti määritellään vastakkaisen ja viereisen kulman suhteena, mistä seuraa että $\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta$. Yksikköympyrästä tulee myös selväksi, että $\sin x$ ja $\cos x$ ovat aina nollan ja yhden välillä, eli

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$
$$-1 \leq \cos x \leq 1.$$

Asian voi ilmaista myös itseisarvojen avulla:

$$|\sin x| \leq 1$$

$$|\cos x| \leq 1$$

Trigonometriassa kulmat ilmaistaan yleensä **radiaaneina**. Radiaanit on helppo kääntää asteiksi (ja toisinpäin) muistamalla, että π rad $= 180°$, eli pii radiaania on yhtä kuin kulma 180 astetta. Täten 360 asteen kulma eli täysi kierros on 2π radiaania ja suora kulma on $\pi/2$ radiaania.

Tästä seuraa, että trigonometriset funktiot $\sin x$ ja $\cos x$ ovat **jaksollisia** eli niiden arvo on sama tietyin välein. Yllä olevaa yksikköympyrää katsomalla selviää, että kulman sini ja kosiini saavat saman arvon aina kun kulmaa lisätään tai vähennetään täysi kierros eli 2π. Täten

$$\begin{aligned}\sin(x+2\pi) &= \sin x\\ \cos(x+2\pi) &= \cos x.\end{aligned}$$

Esimerkiksi yksikköympyrätarkastelulla havaitaan lisäksi, että $\sin 0 = 0$ ja $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Tästä ja jaksollisuudesta voidaan päätellä, että

$$\begin{aligned}\sin(n\cdot 2\pi) &= 0 \text{ kaikilla } n\in\mathbb{Z} \text{ ja}\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi\right) &= 0 \text{ kaikilla } n\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Huomionarvoista on myös, että $\cos x$ on $\sin x$:n derivaatta ja $\cos x$:n derivaatta $-\sin x$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin x &= \cos x\\ \frac{d}{dx}\cos x &= -\sin x\end{aligned}$$

Yllä todettiin kosiinin ja sinin olevan aina yhden ja miinus yhden välissä. Yllä olevasta derivoimissäännöstä seuraa, että näiden derivaatat ovat myöskin aina nollan ja yhden välissä. Täten väliarvolauseen nojalla voi osoittaa, että sini- ja kosiinifunktio muuttuvat tietyllä välillä $[a,b]$ aina vähemmän kuin kyseisen välin pituus. Täten esimerkiksi $|\sin b - \sin a| \le |b-a|$. Lisäksi nämä funktiot ovat kaikkialla jatkuvia ja derivoituvia.

Esimerkki 41.1. Laske raja-arvo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

käyttäen l'Hospitalin sääntöä.

Ratkaisu. Sekä $\sin x$ että x lähestyvät nollaa kun x lähestyy nollaa, joten raja-arvo on muotoa $\frac{0}{0}$. Täten l'Hospitalin sääntöä voi käyttää. Derivoimalla osoittaja ja nimittäjä erikseen saadaan

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1,$$

sillä $\cos 0 = 1$.

Esimerkki 41.2. Derivoi $\sin(\cos x)$.

Ratkaisu. Kyseessä on yhdistetty funktio, joka derivoidaan ketjusäännöllä. Ulkofunktiona on $\sin x$, sisäfunktiona $\cos x$. Sisäfunktion derivaatta on $-\sin x$, ulkofunktion derivaatta $\cos x$. Ketjusäännön mukaisesti yhdistetyn funktion derivaatta on sisäfunktion derivaatta kerrottuna ulkofunktion derivaatalla arvolla sisäfunktio, eli

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x),$$

mikä tässä tilanteessa on

$$\underbrace{-\sin x}_{=g'(x)} \cdot \underbrace{\cos(\cos x)}_{=f'(g(x))}.$$

Esimerkki 41.3. Laske raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 10x}{x}$$

käyttäen l'Hospitalin sääntöä.

Ratkaisu. Sekä $\sin 10x$ että x lähestyvät nollaa kun x lähestyy nollaa, joten raja-arvo on muotoa $\frac{0}{0}$. Täten l'Hospitalin sääntöä voi käyttää. Derivoimalla osoittaja ja nimittäjä erikseen (osoittajan derivoinnissa käytetään ketjusääntöä) saadaan

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 10x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{10\cos 10x}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{10\cos 10x}{1} = 10,$$

sillä $\cos 10x \to 1$, kun $x \to 0$.

Esimerkki 41.4. Laske

$$\lim_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x}$$

Ratkaisu. Sijoitetaan $t = 1/x$. Nyt kun $x \to \infty$ niin $t \to 0$. Tämän jälkeen voidaan soveltaa L'Hospitalin sääntöä.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\sin t \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\cos t}{1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Esimerkki 41.5. Laske derivaatta funktiosta $\sin x + x$. Koska tämä derivaatta on nolla? Mitä voidaan sanoa funktion kasvavuudesta/vähenevyydestä?

Ratkaisu. Kyseinen derivaatta on selvästi $\cos x + 1$. Tämä on nolla kun $\cos x = -1$. Tämä tapahtuu kun $x = \pi + n \cdot 2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Funktion derivaatta saavuttaa siis äärettömän monessa pisteessä nollakohdan. Kuitenkin kyseinen funktio on aidosti kasvava, mikä tulee selväksi jo funktion kuvaajaa katsoessa. (Matemaattinen syy aitoon kasvavuuteen on se, että funktion derivaatta on nolla ainoastaan erittäin pienessä joukossa pisteitä).

Vaikka funktiot $\sin x$ ja $\cos x$ eivät ole aidosti kasvavia, voidaan ne rajoittaa tietylle välille, jolla ne ovat kasvavia. Esimerkiksi sinifunktio on kasvava välillä $[-\pi/2, \pi/2]$. Tällä välillä sille on mahdollista muodostaa käänteisfunktio eli **arkussini**:

$$\sin \alpha = y \iff \alpha = \arcsin y.$$

Vastaavat käänteisfunktiot voidaan määritellä myös kosiinin ja tangentin tietyille rajoittumille.

42 Kertausta 2. välikokeeseen

Toisessa välikokeessa on syytä osata ainakin seuraavat asiat:

1. Potenssisarjojen suppenemissäde, suppenemisväli ja suppenemisjoukko.
2. Derivaatan laskeminen määritelmän avulla.
3. Tangenttisuoran ja normaalisuoran yhtälöt.
4. Differentiaalikehitelmien muodostaminen.
5. Derivoimissäännöt: potenssifunktion derivaatta, tulon derivoimissääntö, osamäärän derivoimissääntö sekä vaikeampina sääntöinä ketjusääntö ja käänteisfunktion derivoimissääntö. Logaritminen derivointi.
6. Taylorin sarjat. Sarjakehitelmät.
7. Väliarvolause.
8. Derivoinnin sovelluksia: funktion nollakohtien määrän löytäminen, suurimman ja pienimmän arvon löytäminen.
9. Newtonin menetelmä.

10. L'Hospitalin sääntö.

11. Logaritmit ja eksponentiaalifunktiot.

12. Trigonometriset funktiot.

Alla tehtäviä näistä osaan liittyen.

42.1 Potenssisarjojen suppenemissäde

Esimerkki 42.1. Etsi geometrisen sarjan

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

suppenemissäde. Suppeneeko kyseinen sarja suppenemissäteen päätepisteissä?

Ratkaisu. Tässä $a_n = 1$, joten

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1.$$

Täten suppenemissäde on 1, eli kyseinen sarja suppenee ainakin kun $x \in (-1, 1)$. On vielä tarkistettava erikseen välin päätepisteet. Kun $x = 1$, saadaan sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots ,$$

joka selvästi hajaantuu. Samoin, kun $x = -1$, sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

ei lähesty mitään tiettyä lukua, joten se hajaantuu. Täten suppenemisväli on avoin väli $(-1, 1)$. Tämä varmistaa aikaisemmin kurssilla mainitun seikan geometrisista sarjoista: ne suppenevat[14], jos suhdeluku $|q| < 1$.

Esimerkki 42.2. Etsi sarjan

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

[14] Ne *voivat* supeta myös arvoilla $q = \pm 1$. Nämä arvot pitää tarkistaa erikseen.

suppenemissäde. Suppeneeko kyseinen sarja suppenemissäteen päätepisteissä?

Ratkaisu. Koska $a_n = 1/n$, on

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1/n}{1/(n+1)}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| \\ &= 1,\end{aligned}$$

joten sarja suppenee, kun $x \in (-1, 1)$. Jälleen on tarkistettava välin päätepisteet erikseen. Kun $x = 1$, syntyy harmoninen sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n},$$

joka hajaantuu. Kun $x = -1$, syntyy *suppeneva* sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

Täten suppenemisväli on $[-1, 1)$ eli puoliavoin väli miinus yhdestä yhteen. Esimerkin tarkoitus oli osoittaa, että suppenemissäteen päätepisteissä sarja voi joko supeta tai hajaantua vieläpä siten, että se hajaantuu toisessa päätepisteessä ja suppenee toisessa.

Esimerkki 42.3. Etsi geometrisen sarjan

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(x-10)^n$$

suppenemissäde.

Ratkaisu. Tämä on 10-keskeinen potenssisarja. Tehdään sijoitus (y=x-10), jolloin saadaan origokeskeinen sarja

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y^n$$

Tämä on täsmälleen sama kuin harjoituksen 42.1 sarja. Se siis suppenee, kun

$$\begin{aligned}-1 <& y < 1 \\ -1 <& x - 10 < 1 \\ 9 <& x < 11\end{aligned}$$

Täten sarjan suppenemisväli on $[9, 11)$.

Esimerkki 42.4. Etsi potenssisarjan

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^3 (x-1)^n$$

suppenemissäde.

Ratkaisu. Suppenemissäde on

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^3}{(n+1)^3} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^3}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} \right| \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Täten sarjan suppenemissäde, kun $-1 < x - 1 < 1 \iff 0 < x < 2.$

Esimerkki 42.5. Etsi potenssisarjan

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+7)^n}{n^2}$$

suppenemissäde.

Ratkaisu. Suppenemissäde on

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1/n^2}{1/(n+1)^2} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{n^2} \right| \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Täten sarjan suppenemissäde, kun $-1 < 3x + 7 < 1 \iff -8/3 < x < -2.$

Esimerkki 42.6. Etsi potenssisarjan

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

suppenemissäde.

Ratkaisu. Suppenemissäde on

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!/n^n}{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^n}{n^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\
&= e.
\end{aligned}
$$

Täten sarjan suppenemissäde, kun $-e < x < e$.

42.2 Derivointia ja sen sovelluksia

Kokeessa on syytä osata derivoimissäännöt hyvin, sillä niitä tarvitaan useissa tehtävissä. Erityisesti osamääräsääntö ja yhdistetyn funktion derivoimissääntö on hyvä opetella huolella.

Esimerkki 42.7. Derivoi funktio $f(x) = 3x$ erotusosamäärän avulla.

Ratkaisu. Derivaatta on erotusosamäärän raja-arvo eli

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{3x-3x_0}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{3(x-x_0)}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} 3 \\
&= 3.
\end{aligned}
$$

Esimerkki 42.8. Derivoi funktio $f(x) = \sqrt{x}$ erotusosamäärän avulla. Laske pisteeseen $x = 1$ piirretyn tangentin yhtälö. Laske $\lim_{x\to 0+} f'(x)$.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x_0}}
\end{aligned}$$

Tangenttisuoran yhtälö on

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Tangenttisuoraan pitää nyt sijoittaa arvot $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ ja $f'(1) = 1/2$. Täten pisteeseen $x = 1$ piirretyn tangentin yhtälö on

$$\begin{aligned}
y - 1 &= 1/2(x-1) \\
y &= x/2 + 1/2
\end{aligned}$$

Kun $x \to 0+$, $f'(x) = 1/(2\sqrt{x}) \to \infty$ (huomaa että $\lim_{x\to 0-} f'(x)$ ei ole olemassa, koska neliöjuuri ei ole määritelty negatiivisille luvuille).

Esimerkki 42.9. Derivoi x^2e^x.

Ratkaisu.

$$\frac{d}{dx}x^2e^x = 2xe^x + x^2e^x$$

Esimerkki 42.10. Derivoi $x^{10}\ln x^{10}$

Ratkaisu.

$$\frac{d}{dx}(x^{10}\ln x^{10}) = 10x^9\ln x^{10} + \frac{10}{x}x^{10} = 10x^9\ln x^{10} + 10x^9$$

Esimerkki 42.11. Derivoi

$$\frac{e^{x^3}}{x^2}$$

Ratkaisu.

$$\frac{d}{dx}\frac{e^{x^3}}{x^2} = \frac{3x^2e^{x^3}x^2 - 2xe^{x^3}}{x^4}$$

Esimerkki 42.12. Derivoi

$$\frac{e^{x^3}}{f(x)}$$

Ratkaisu.

$$\frac{d}{dx}\frac{e^{x^3}}{f(x)} = \frac{3x^2e^{x^3}f(x) - f'(x)e^{x^3}}{(f(x))^2}$$

Esimerkki 42.13. Derivoi

$$\frac{\cos x^4}{4x}$$

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\frac{\cos x^4}{4x} &= \frac{4x^3(-\sin x^4)4x - 4\cos x^4}{16x^2} \\ &= \frac{-4x^2\sin x^4 - \cos x^4}{4}\end{aligned}$$

Esimerkki 42.14. Derivoi x^{x^3}

Ratkaisu. Derivoidaan logaritmisesti: $\ln x^{x^3} = x^3 \ln x$. Tämän derivaatta saadaan tulosäännön avulla:

$$\frac{d}{dx}x^3\ln x = 3x^2\ln x + x^2.$$

Täten logaritmisella derivoinnilla saadaan

$$\frac{d}{dx}(\ln x^{x^3}) = x^{x^3}(3x^2\ln x + x^2).$$

Esimerkki 42.15. Derivoi $\sqrt{x^3+1}$

Ratkaisu.

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x^3+1} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$$

Esimerkki 42.16. Derivoi $\cos(\sin x)$.

Ratkaisu. $\frac{d}{dx}\cos(\sin x) = -\sin(\sin x)\cos x$ ketjusäännön nojalla.

Esimerkki 42.17. Derivoi $\ln(x^2+1)$.

Ratkaisu.
$$\frac{d}{dx}\ln(x^2+1) = \frac{2x}{x^2+1}.$$

Esimerkki 42.18. Oletetaan että f ja sen käänteisfunktio f^{-1} ovat derivoituvia. Tiedetään, että $f(10) = 1$ ja $f'(10) = 2$. Laske $(f^{-1})'(1)$.

Ratkaisu. Käänteisfunktion derivoimissäännön mukaan
$$(f^{-1})(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Valitaan $x = 1$. Nyt laskettavana on
$$(f^{-1})(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))}.$$

Koska $f(10) = 1$, $f^{-1}(1) = 10$. Sijoittamalla tämä ja tehtävänannossa annettu $f'(10) = 2$ saadaan
$$\begin{aligned}(f^{-1})(1) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(1))}\\ &= \frac{1}{f'(10)}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Esimerkki 42.19. Etsi kaava $f^{(n)}$:lle kun $f(x) = e^{ax}$. Tee sama funktiolle $g(x) = \sqrt{x}$.

Ratkaisu. Selvästi $f'(x) = ae^{ax}$ ja $f''(x) = a^2e^{ax}$. Tästä on helppo muodostaa väite: $f^{(n)} = a^ne^{ax}$. Todistus on helppo muodostaa induktiolla: väite pätee arvolla $n = 1$ ja väitteen pätemisestä arvolla n voi päätellä väitteen pätevän arvolla $n+1$:
$$\begin{aligned}f^{(n)} &= a^ne^{ax}\\ f^{(n+1)} &= a^{n+1}e^{ax}.\end{aligned}$$

Esimerkki 42.20. Arvioi lukua $\sqrt{50}$ differentiaaliapproksimaatiolla.

Ratkaisu. Differentiaaliapproksimaation kaava on
$$f(x_0+h) \approx f(x_0) + hf'(x_0).$$

Tässä ideana on valita jokin piste x_0, ja edetä tästä pisteestä h:n pituinen matka oikealle tai vasemmalle. Nyt funktion arvo pisteessä $x_0 + h$ on kutakuinkin sama kuin funktion arvo pisteessä x_0 plus funktion muutosnopeus pisteessä x_0 (eli funktion derivaatta tässä pisteessä) kertaa kuljettu matka, h.

Kun meillä on luku $\sqrt{50}$, on luonnollista valita funktioksi $f(x) = \sqrt{x}$. Haluttu arvo, jota approksimoidaan, on 50 eli $x_0 + h = 50$. Nyt saamme vapaasti valita x_0:n siten, että approksimaatio olisi mahdollisimman helppo tehdä. Luonnollista on valita $x_0 = 49$, jolloin $f(x_0) = 7$ ja $f'(x_0) = 1/2\sqrt{49} = 1/14$, joten

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0).$$
$$f(50) \approx 7 + 1 \cdot 1/14.$$

Esimerkki 42.21. Etsi $f'(x)$, kun $\frac{d}{dx}(f(3x)) = 1$.

Ratkaisu. Ketjusäännön mukaan $\frac{d}{dx}f(3x) = 3f'(3x) = 1$. Tästä saadaan $f'(3x) = 1/3$. Toisin sanottuna funktion derivaatta on vakio: 1/3. Täten $f'(x) = 1/3$.

Esimerkki 42.22. Etsi funktion $f(x) = \sin x$ maksimi ja minimi välillä $[0, 2\pi]$.

Ratkaisu. Kyseinen maksimi on pisteessä $\pi/2$ ja minimi pisteessä $3\pi/2$. Derivoi funktio ja laita derivaatta nollaksi. Varmista derivaatan nollakohtien laatu (minimi/maksimi) joko derivoimalla funktio toiseen kertaan ja tarkistamalla funktion etumerkki tai merkkikaavion avulla. Koska kyseessä on suljettu väli, funktion maksimi ja/tai minimi tällä välillä voi olla myös välin päätepisteissä, joten tarkista myös funktion arvo näissä pisteissä.

Esimerkki 42.23. Oletetaan, että $f(0) = 0$ ja $0 \leq f'(x) \leq 1$. Millä välillä $f(1)$ on? Entä $f(10)$?

Ratkaisu. Väliarvolauseen mukaan välillä $(0, 1)$ on olemassa ξ siten että

$$f(1) - f(0) = f'(\xi)(1 - 0).$$

Koska funktion derivaatta on välillä yhdestä nollaan, edellisen lausekkeen oikea puoli on myös tällä välillä. Täten myös edellisen lausekkeen vasen puoli on välillä yhdestä nollaan. Eli

$$0 \leq f(1) - f(0) \leq 1$$
$$f(0) \leq f(1) \leq 1 + f(0).$$

Koska $f(0) = 0$, $f(1)$ on välillä yhdestä nollaan. $f(10)$ ratkaistaan vastaavasti.

Esimerkki 42.24. Todista väliarvolauseen avulla, että $|\cos b - \cos a| \leq |b - a|$.

Ratkaisu. Väliarvolause kertoo, että kaikilla derivoituvilla funktioilla

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

jollakin luvulla $\xi \in (a, b)$. Kyseessä oleva funktio on $f(x) = \cos x$. Täten $f(b) = \cos b$ ja $f(a) = \cos a$. Funktion derivaatta $f'(x) = -\sin x$. Täten $f'(\xi) = -\sin \xi$. Täten funktion $f(x) = \cos x$ kohdalla väliarvolause kertoo, että $\cos b - \cos a = (-\sin \xi)(b - a)$ jollakin $\xi \in (a, b)$. Koska $-1 \leq \sin x \leq 1$, $-1 \leq -\sin x \leq 1$. Täten funktion $\cos x$ derivaatta on välillä yhdestä miinus yhteen. Eli

$$\begin{aligned}
-1 \leq& -\sin \xi \leq 1 \\
-1 \leq& \frac{\cos b - \cos a}{b - a} \leq 1 \\
-(b - a) \leq& \cos b - \cos a \leq (b - a) \\
& |\cos b - \cos a| \leq |b - a|.
\end{aligned}$$

Esimerkki 42.25. Olkoon $f(x) = x^5 + x + 10$. Laske $(f^{-1})'(10)$.

Ratkaisu. Käänteisfunktion derivoimissäännön mukaan

$$(f^{-1})(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Lasketaan ensin funktion derivaatta: $f'(x) = 5x^4 + 1$. Katsotaan vielä kerran mitä meidän pitää laskea. Käänteisfunktio derivaatta on laskettava pisteessä $x = 10$ eli meidän on laskettava

$$(f^{-1})(10) = \frac{1}{f'(f^{-1}(10))}.$$

Tiedossa on funktion f derivaatta. Nyt tämä derivaatta pitäisi laskea pisteessä $f^{-1}(10)$. Mutta mikä tämä piste on? Tämän voi ratkaista seuraavasti: $f^{-1}(10) = y \iff 10 = f(y)$. Funktion lausekkeesta nähdään, että kyseinen funktio saa arvon 10 kun $x = 0$. Täten $f(0) = 10 \iff f^{-1}(10) = 0$. Täten laskemme funktion derivaatan pisteessä nolla:

$$\begin{aligned}(f^{-1})(10) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(10))}\\ &= \frac{1}{f'(0)}\\ &= \frac{1}{1} = 1\end{aligned}$$

Esimerkki 42.26. Laske

$$\lim_{\psi\to 0} \frac{e^{\psi}-1}{\sin\psi}.$$

Ratkaisu. Kyseinen raja-arvo on muotoa $\frac{0}{0}$, joten voimme käyttää L'Hospitalin sääntöä:

$$\lim_{\psi\to 0} \frac{e^{\psi}-1}{\sin\psi} = \lim_{\psi\to 0} \frac{e^{\psi}}{\cos\psi} = 1$$

Esimerkki 42.27. Määritä funktion $f(x) = x^3 + 2x^2$ kuperuussuunnat ja käännepisteet.

Ratkaisu. Funktion kuperuussuunnat (eli sen konkaavius/konveksisuus) määrittyvät sen toisen derivaatan etumerkin perusteella. Koska $f'(x) = 3x^2 + 4x$, $f''(x) = 6x + 4$. Funktio on konkaavi kun $f'' > 0$ ja konveksi kun $f'' < 0$. Käännepiste on piste jossa $f'' = 0$. Täten funktio on konkaavi, kun

$$\begin{aligned}6x + 4 &> 0\\ x &> -4/6 = -2/3\end{aligned}$$

ja konveksi kun

$$\begin{aligned}6x + 1 &< 0\\ x &< -2/3.\end{aligned}$$

Käännepiste ratkaisee yhtälön $6x + 4 = 0$. Täten käännepiste on $x = -2/3$.

Esimerkki 42.28. Laske $f^9(0)$ ja $f^{10}(0)$, kun $f(x) = 1/(1 - x^3)$.

Ratkaisu. Kirjoitetaan tämä funktio sarjakehitelmänä. Tämä on sallittua silloin, kun $|x| \leq 1$:

$$\begin{aligned}f(x) &= 1/(1 - x^3)\\ &= 1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + \cdots.\end{aligned}$$

Kun tämän derivoi yhdeksän kertaa, niin kaikki potenssit, jotka ovat alle 9 häviävät. Toisaalta koska tämä derivaatta arvioidaan pisteessä $x = 0$, niin kaikki termit, joiden potenssi on yli yhdeksän häviävät myös. Sen sijaan termin x^9 yhdeksäs derivaatta jää. Se on 9!, joten $f^9(0) = 9!$. Sen sijaan $f^{10}(0) = 0$, koska funktiossa ei esiinny termiä x^{10}.